Übungen zur klassischen Elektrodynamik

WS 2014/2015

4.Übungsblatt: Abgabe bis zum 18.11.2014

Aufgabe 1:

Das elektrostatische Potential einer homogen mit Ladung angefüllten Kugel mit dem Radius R und dem Mittelpunkt im Ursprung ist durch

$$\Phi(\vec{x}) = \begin{cases} \dfrac{q}{r} & ; r > R \\ \dfrac{3}{2}\dfrac{q}{R}\left(1 - \dfrac{1}{3}\dfrac{r^2}{R^2}\right) & ; r < R \end{cases}$$

gegeben. Dabei ist q die Gesamtladung der Kugel.

Man bestimme

(a) die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{x})$, [1P]

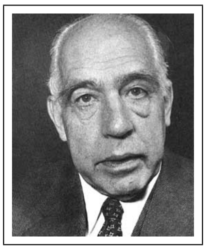
(b) die Divergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x})$ und Rotation $\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x})$ des Feldes. [1P]

Aufgabe 2:

Für ein Wasserstoffatom im Grundzustand lässt sich nach Bohr die (kugelsymmetrische) Ladungsdichte durch

$$\rho(r) = \frac{e}{4\pi r^2}\,\delta(r) - \frac{e}{\pi a^3}\exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$$

beschreiben, d.h. als eine positive Punktladung im Ursprung (Kernladung) umgeben von einer negativen Raumladung (Elektronenladungsdichte). Hier bezeichnen e die Elementarladung, a den Bohrschen Radius und r den Abstand vom Ursprung.



Niels Bohr (1895 - 1962) hat das nach ihm benannte Atommodell aufgestellt und die Quantentheorie mitbegründet.

(a) Berechnen Sie das elektrische Feld des Wasserstoffatoms. [3P]

(b) Berechnen Sie das zugehörige elektrische Potential. [2P]

(c) Vereinfachen Sie das Potential für die Grenzfälle $r \gg a$ und $r \ll a$ und diskutieren Sie die Ergebnisse. [1P]

Hinweis:

$$\int \frac{1}{x^2}\exp(-x)\,dx \quad = \quad -\frac{1}{x}\exp(-x) - \int \frac{1}{x}\exp(-x)\,dx$$

⇒ **Bitte wenden**

Aufgabe 3:

Die zweite Green'sche Identität lautet

$$\int_V (\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi)\, d^3r = \oint_{S(V)} (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi)\cdot \mathbf{n} dS$$

wobei $S(V)$ die das Volumen V umschließende Oberfläche bezeichnet. Außerdem sei $\mathbf{n}$ der Normalenvektor auf dieser Oberfläche.

Mit dieser Identität kann nun ein interessantes Problem betrachtet werden. Dazu sei ϕ wie üblich das Potential, das in diesem Fall innerhalb einer Kugel des Radius R die Laplace-Gleichung erfüllen möge. Für ψ sei nun die Funktion

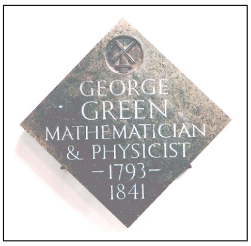
$$\psi = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)$$

gegeben, wobei r die radiale Koordinate sei. Zeigen Sie, dass damit die zweite Greensche Identität folgenden Ausdruck liefert, wenn diese auf die Kugel mit Radius R angewandt wird

$$\phi(0) = \frac{1}{4\pi R^2}\oint_S \phi\, dS.$$

Hinweis: Benutzen Sie [2P]

$$\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{0}).$$



Leider war kein Bild von George Green, der nebst den Green'schen Sätzen noch weitere wichtige Beiträge zur Physik leistete, zu finden. Die abgebildete Gedenktafel wurde im Rahmen der Gedenkfeier zum 200. Jahrestag seiner Geburt neben Newtons Grab in der Westminster Abbey präsentiert.