

Grundlagen der Mechanik

Oktober 2017

Vorbemerkung: Dieses Skript basiert auf der Vorlesung „Grundlagen der Mechanik und Elektrodynamik“, die seit 2005 an der Ruhr-Universität Bochum von Dr. Udo Arendt, PD Dr. Horst Fichtner und Dr. Anne Stockem gehalten wurde. Es wurde in der vorliegenden LaTeX-Version von Alexander Aab, Caroline Fink, Steffen Meyer und David L. Pohl erstellt.

Das vorliegende Skript kann (und soll ☺) kein Lehrbuch ersetzen. Insbesondere ist es nicht so gründlich Korrektur gelesen wie manches Buch. Daher sind wir dankbar für jeden Hinweis auf (wahrscheinlich noch existierende) Fehler.

Inhaltsverzeichnis

1	Historische Einführung	1
2	Newton'sche Mechanik	5
2.1	Moderne Formulierung der Newton'schen Axiome	5
2.2	Inertialsysteme und Galilei-Transformation	7
2.3	Wechselwirkungen und Kräfte	8
2.3.1	Wechselwirkungen	8
2.3.2	Kräfte	8
2.4	Einfache Anwendung der Newton'schen Mechanik	9
2.4.1	Senkrechter Wurf im Erdschwerefeld	9
2.4.2	Fallender Regentropfen	10
2.4.3	Schwingendes Spinnennetz	12
2.5	Schwingungen	13
2.5.1	Freie, harmonische Schwingung	14
2.5.2	Freie, gedämpfte Schwingung	16
2.5.3	Erzwungene, gedämpfte Schwingung	18
2.6	Erhaltungssätze	19
2.6.1	Impulserhaltung	19
2.6.2	Energieerhaltung	19
2.6.3	Drehimpulserhaltung	21
2.7	Bewegung im konservativen Zentralkraftfeld	22
3	Das Zweikörperproblem	29
3.1	Allgemeines zu Mehrteilchensystemen	29
3.2	Erhaltungssätze für Mehrteilchensystem	30
3.2.1	Impulserhaltung	30
3.2.2	Energieerhaltung	31
3.3	Das Zweiteilchensystem	32
3.4	Planetenbewegung als Zweikörperproblem	34
4	Lagrange-Mechanik	35
4.1	Generalisierte Koordinaten und Geschwindigkeiten	35
4.2	Die Lagrange-Gleichungen 2. Art	36
4.3	Anwendungsbeispiele	38
4.3.1	Das freie Teilchen ($s=3$)	38
4.3.2	Der schiefe Wurf ($s=3$)	38
4.3.3	Atwood'sche Fallmaschine ($s=1$)	38
4.4	Erhaltungssätze und Symmetrien	39
4.4.1	Anzahl der Erhaltungsgrößen	39
4.4.2	Zyklische Koordinaten	39
4.4.3	Energieerhaltung	40
4.4.4	Impulserhaltung	41
4.5	Das Hamilton-Prinzip	42

5	Der starre Körper	44
5.1	Freiheitsgrade und Bewegung eines starren Körpers	44
5.2	Kinetische Energie und Trägheitstensor eines starren Körpers	45
5.2.1	Kinetische Energie	45
5.2.2	Trägheitstensor	46
5.3	Drehimpuls und Drehimpulssatz	51
5.4	Die Eulerschen Gleichungen	53
5.5	Lagrangefunktion des Starren Körpers	55
6	Spezielle Relativitätstheorie	57
6.1	Grundlagen	57
6.1.1	Michelson-Morley-Experiment (1881, 1887)	57
6.1.2	Die Lorentztransformation	58
6.2	Folgerungen	60
6.2.1	Gleichzeitigkeit	60
6.2.2	Zeitdilatation	60
6.2.3	Längenkontraktion	61
6.2.4	Geschwindigkeitsaddition	62

1 Historische Einführung

- Die Mechanik nimmt ihren **Anfang** mit Aristoteles (384 - 322 v. Chr.).
- Die erste Entwicklung der Mechanik erfolgte **aufgrund und in Übereinstimmung mit der Alltagserfahrung**; die wesentlichen Aussagen des Aristoteles waren:
 - (1) Zur Aufrechterhaltung einer Bewegung wird eine Kraft benötigt.
 - (2) Die Geschwindigkeit ist proportional zur Kraft.
 - (3) Bewegung ist ein Prozess (kein Zustand)

Diese Feststellungen sind zwar anschaulich bzw. der Alltagserfahrung gemäß „plausibel“, aber **falsch** und eignen sich nicht als Axiome oder Grundgesetze der Mechanik.

Bemerkung: Schon Aristoteles schloss, dass es im Vakuum keinen Grund für die Änderung der Bewegung eines Körpers gibt: „... entweder ständige Ruhe oder aber ... unendlich fortgehende Bewegung“. Er betrachtete das aber als absurd und glaubte so die Unmöglichkeit des Vakuums begründen zu können - nicht ahnend, dass er das erste Newtonsche Axiom (s.u.) fast 2000 Jahre vor diesem formuliert hatte!

Die „Frühgeschichte“ der Mechanik lässt sich fortsetzen mit:

- (1) **Archimedes** (3. Jhdt. v. Chr.), Syrakus (Sizilien)
 - Statik, Hebelgesetze, archimedisches Prinzip \cong $\left\{ \begin{array}{l} \text{ältestes noch ungeändert gel-} \\ \text{tendes physikalisches Gesetz} \end{array} \right.$
- (2) **Hipparch** (2. Jhdt. v. Chr.), Rhodos (Ägäisinsel)
 - astronomische Beobachtungen, Helligkeitsskala
- (3) **Ptolemäus** (2. Jhdt. n. Chr.), Alexandria (Ägypten)
 - Beschreibung des Weltsystems im „Almagest“
- (4) **Heron** (2. Jhdt. n. Chr.), Alexandria (Ägypten)
 - „einfache“ Maschinen: Hebel, Schraube, Flaschenzug
- (5) **Pappus** (3./4. Jhdt.), Alexandria (Ägypten)
 - schiefe Ebene: Bewegung, Gleichgewicht
- (6) **Johannes Philoponus** (6./7. Jhdt.), Byzanz (Türkei)
 - Zweifel an Aristotelischer Mechanik (am Bsp. des freien Falls)

(7) **Jordamus Nemorarius** (13. Jhdt.), (Deutschland)

- erste Ansätze zum Energieerhaltungssatz
„Ist irgendeine Wirkung fähig eine Last um eine gegebene Strecke zu heben, dann kann sie die n -fache Last auf die $1/n$ -fache Höhe heben.“ (sinngemäßes Zitat)

Bemerkung: Erster selbstständiger Schritt der europäischen Wissenschaft nach der Antike und nach den von den Arabern verfeinerten Erkenntnissen

(8) **Nikolaus Kopernikus** (1473 - 1543), Frauenburg (Polen)

- heliozentrisches Weltbild

(9) **Simon Stevin** (1548 - 1620), Leiden (Niederlande)

- Einführung des Kräfteparallelogramms

(10) **Johannes Kepler** (1571 - 1630), Graz/Linz (Österreich) und Prag (Tschechoslowakei)

- Gesetze der Planetenbewegung

(11) **Galileo Galilei** (1564 - 1642), Florenz (Italien)

- Fallgesetze

(12) **Christian Huygens** (1629 - 1695), Den Haag (Niederlande)

- Trägheitsprinzip, Relativitätsprinzip, Zykloidenpendel

(13) **Isaac Newton** (1643 - 1727), Cambridge (England)

- Axiome der modernen Mechanik
- Gravitationsgesetz

Beginn der „**modernen**“ **Mechanik** mit Isaac Newton bzw. der Veröffentlichung seiner „Principia“ (1687), in der die **Grundgesetze der Mechanik** als **Axiome** formuliert sind:

- (1) Jeder Körper verharrt in einem Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Bewegungszustand zu ändern.
- (2) Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegten Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.
- (3) Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich;
oder: die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.

Bemerkung: Teile der „Principia“ online: <http://members.tripod.com/~gravitee/>

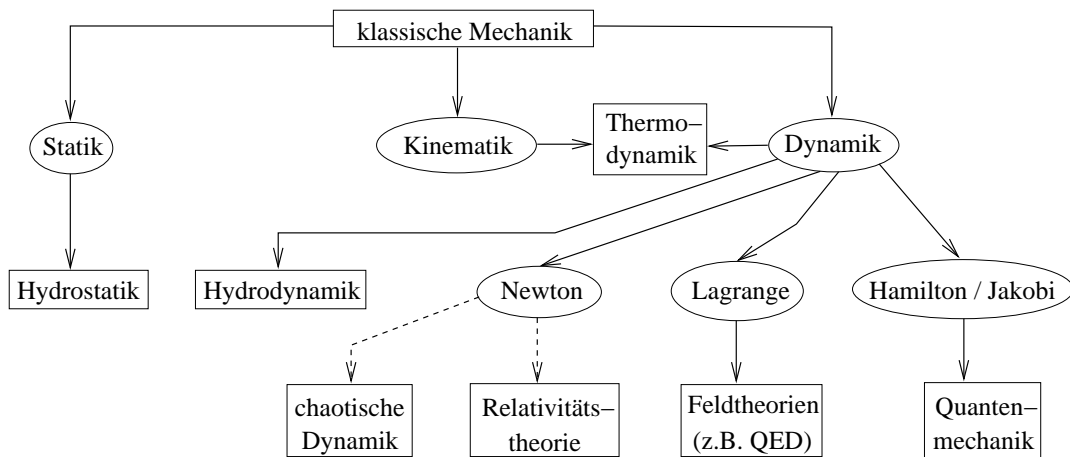


Abbildung 1.1: Der Aufbau der Theoretischen Physik

Bemerkung: Zitat aus **Leonardo da Vinci's** (1452-1519) Tagebuch: „Die Mechanik ist das Prinzip der mathematischen Wissenschaften, weil man mit ihr zur Frucht des mathematischen Wissens gelangt.“

2 Newton'sche Mechanik

2.1 Moderne Formulierung der Newton'schen Axiome

Die Theorie der Mechanik beruht auf den drei Newton'schen Axiomen und einem Zusatz (Korollar). In moderner Formulierung lauten diese Grundgesetze:

Axiom 1 ($\hat{=}$ lex prima $\hat{=}$ Galilei'sches Trägheitsgesetz)

Es gibt Bezugs- oder Koordinatensysteme, in denen ein kräftefreie Körper (Massenpunkt) im Zustand der Ruhe oder der geradlinig gleichförmigen Bewegung verharrt.

Axiom 2 ($\hat{=}$ lex secunda $\hat{=}$ Bewegungsgesetz)

Die Änderung des Impulses ist der Einwirkung der bewegendes Kraft proportional und geschieht in Richtung der Kraft:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \vec{v}) \underset{\substack{\text{wenn} \\ m \neq m(t)}}{=} m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \dot{\vec{v}} = m \vec{a}$$

Axiom 3 ($\hat{=}$ lex tertia $\hat{=}$ Reaktionsprinzip)

Sei \vec{F}_{12} (\vec{F}_{21}) die Kraft des Körpers 1 (2) auf den Körper 2 (1), dann gilt:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Korollar ($\hat{=}$ lex quarta $\hat{=}$ Superpositionsprinzip)

Wirken auf einen Körper (Massenpunkt) mehrere Kräfte $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$, so addieren sich diese vektoriell zu einer resultierenden Kraft \vec{F} gemäß:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

Zum vollen Verständnis dieser Axiome sind folgende **Definitionen** erforderlich:

- (1) Kraft bzw. Kraftvektor \vec{F} $\hat{=}$ diejenige „Anstrengung“, die erforderlich ist, den Bewegungszustand oder die Gestalt eines Körpers zu ändern
- (2) Masse m $\hat{=}$ skalare Materialeigenschaft eines Körpers, die seinen Trägheitswiderstand gegenüber Bewegungsänderungen bestimmt
- (3) Massenpunkt (MP) $\hat{=}$ physikalischer Körper der Masse m mit allseitig vernachlässigbarer Ausdehnung
- (4) kräftefreier MP $\hat{=}$ ein MP, der keiner äußeren Einwirkung unterliegt
- (5) Geschwindigkeit bzw. Geschwindigkeitsvektor \vec{v} $\hat{=}$ zeitliche Änderung des Ortsvektors $\vec{r}(t)$ eines Körpers:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$
- (6) Beschleunigung bzw. Beschleunigungsvektor \vec{a} $\hat{=}$ zeitliche Änderung des Geschwindigkeitsvektors eines Körpers:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$
- (7) (linearer) Impuls bzw. Impulsvektor \vec{p} $\hat{=}$ Produkt aus Masse und Geschwindigkeitsvektor eines Körpers:

$$\vec{p} = m \vec{v} = m \dot{\vec{r}}$$

Bemerkung: Die Gültigkeit der Newton-Axiome erfordert die Existenz einer **absoluten Zeit** und eines **absoluten Raumes** (beide existieren aber gemäß der Relativitätstheorie (s.u.) nicht!)

Bemerkung: $\vec{F} = m \vec{a}$ ist die **dynamische Grundgleichung** der Newton'schen Mechanik und setzt $m \neq m(t)$ voraus (Allgemein: $m = m(t)$ für viele Anwendungen wie z.B. Auto, Rakete oder Relativitätstheorie)

Bemerkung: Axiom I ist ein Spezialfall von Axiom II, denn es gilt:

$$\vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad m \vec{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \text{const.}$$

Bemerkung: Das Korollar beschreibt das Kräfteparallelogramm. In Newtons Worten: „Ein Körper, auf den zwei Kräfte gleichzeitig wirken, bewegt sich entlang der Diagonalen eines Parallelogramms in derselben Zeit, in der er sich entlang der Seiten des Parallelogramms unter Einwirkung jeweils nur einer der beiden Kräfte bewegen würde.“

Also:

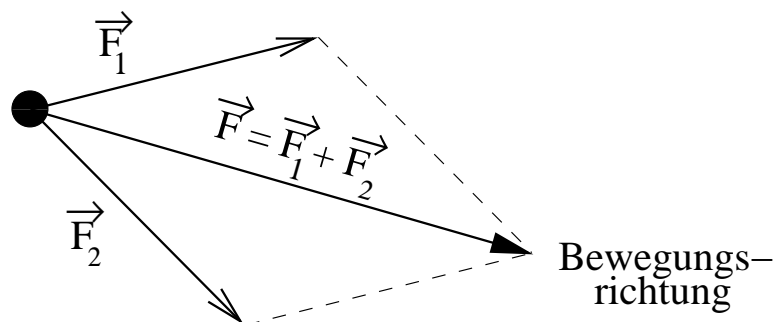


Abbildung 2.1: Kräfteparallelogramm

2.2 Inertialsysteme und Galilei-Transformation

Definition: Gelten in einem Bezugs- oder Koordinaten-System die Newton'schen Axiome, dann bezeichnet man dieses als **Inertialsystem**.

Bemerkung: Nicht alle Bezugssysteme sind Inertialsysteme (z.B. rotierende Systeme).

Damit ist die Frage nach der **Gesamtheit aller Inertialsysteme** sinnvoll: Seien Σ, Σ' zwei Bezugssysteme mit $\Sigma = \Sigma'$ bei $t = 0$. Mit den Annahmen $t = t'$ (absolute Zeit) und $m = m'$ (absolute Masse) gilt $\vec{F} = m \ddot{\vec{r}} = m \ddot{\vec{r}}' = \vec{F}'$. Weiter ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \ddot{\vec{r}} &\stackrel{!}{=} \ddot{\vec{r}}' & \Leftrightarrow & \ddot{\vec{r}} - \ddot{\vec{r}}' = 0 & \quad \Big| \int \dots dt \\
 & & \Rightarrow & \dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}' = \vec{v} = \text{const.} & \quad \Big| \int \dots dt \\
 & & \Rightarrow & \vec{r} - \vec{r}' = \vec{v} t + \Delta \vec{r}_0 \\
 & & \Leftrightarrow & \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v} t - \Delta \vec{r}_0 \\
 & & \Rightarrow & \boxed{\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v} t \quad ; \quad t' = t} & \quad \text{Galilei-Transformation} \\
 & & & \downarrow & \\
 & & & \boxed{\Delta \vec{r}_0 = 0 \text{ wegen} \\ & & & \Sigma = \Sigma' \text{ bei } t = 0} &
 \end{aligned}$$

Sie ist die allgemeinste Transformation, die in der Newtonschen Mechanik von einem Inertialsystem Σ in ein anderes Inertialsystem Σ' überführt. Es gilt also: Wenn Σ ein Inertialsystem ist, dann ist Σ' genau dann ebenfalls ein Inertialsystem, wenn $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v} t$ gilt.

Bemerkung: Es gibt unendlich viele Inertialsysteme.

Bemerkung: Prinzipiell ist bei der Galilei-Transformation auch eine Drehung um einen zeit-unabhängigen Winkel möglich (siehe z.B. Fließbach: Mechanik), d.h. die Achsen zweier Inertialsysteme müssen nicht paarweise orthogonal sein.

2.3 Wechselwirkungen und Kräfte

... sollten begrifflich unterschieden werden, da Folgendes gilt:

2.3.1 Wechselwirkungen

Die scheinbar zahlreichen in der Natur beobachtbaren Wechselwirkungen lassen sich auf **vier fundamentale Wechselwirkungen** zurückführen:

- (1) Gravitative Wechselwirkung
- (2) Elektromagnetische Wechselwirkung
- (3) Schwache Wechselwirkung
- (4) Starke Wechselwirkung

Es besteht die begründete **Hoffnung**, diese fundamentalen Wechselwirkungen auf **eine** Wechselwirkung zurückzuführen.

2.3.2 Kräfte

(A) Die den zwei „makroskopischen“ (Alltagserfahrung!) fundamentalen Wechselwirkungen zugeordneten Kräfte:

Gravitationskraft (Newton): $\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r$

(mit der Gravitationskonstante $G = 6,672 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$)

Coulomb-Kraft (Coulomb): $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r$

(mit der Dielektrizitätskonstante [des Vakuums] $\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A s}}{\text{Vm}}$)

Lorentz-Kraft (Lorentz): $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

(wobei \vec{v} die Geschwindigkeit der Ladung q bezeichnet)

Bemerkung: Für Bewegungen nahe der Erdoberfläche gilt für die Gravitationskraft:

$$\boxed{h \ll R_E}$$

$$|\vec{F}| = F = m \frac{G M_E}{(R_E + h)^2} \Big|_{h \ll R_E} \approx m \frac{G M_E}{R_E^2} =: m g ; \quad g \approx 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Messung von $g = \frac{G M_E}{R_E^2}$ erlaubt die Bestimmung der Erdmasse!

(B) Beispiele für weitere Kräfte:

Reibung zwischen Festkörpern:

Haftreibung: $|\vec{F}| = \mu_s |\vec{N}|$ (statische Reibungskraft)

Gleitreibung: $|\vec{F}| = \mu_k |\vec{N}|$ (kinematische Reibungskraft)

mit \vec{N} als die die reibenden Flächen zusammenhaltende Normalkraft. μ_s und μ_k sind Materialkonstanten.

Reibung in Gasen oder Flüssigkeiten:

Es gilt: $\vec{F} = -\mu(v) \vec{v}$ mit $v = |\vec{v}|$ und

$$\begin{aligned} \mu(v) &= \text{const.} && \hat{=} \text{ Stokes'sche Reibung} \\ \mu(v) &= \alpha |\vec{v}| = \alpha v && \hat{=} \text{ Newton'sche Reibung} \end{aligned}$$

Bemerkung: Reibungskräfte sind bis heute nicht vollständig verstanden, d. h. die Ansätze zu ihrer Beschreibung sind oft empirisch.

lineare Rückstellkraft:

In vielen physikalischen Systemen (z.B. Feder, Bogensehne) erfährt ein Körper bei einer Auslenkung $\Delta \vec{r}$ aus seiner Gleichgewichtslage ($\vec{r} = 0$) eine Kraft (Hooke'sches Gesetz):

$$\vec{F} = -k \Delta \vec{r} \quad ; \quad k = \text{const.} > 0$$

Bemerkung: Wegen der dann oft resultierenden harmonischen Schwingung wird ein so beschriebenes System **harmonischer Oszillator** genannt. Dieser ist wichtig wegen

- seiner mathematisch strengen Behandelbarkeit
- seiner Funktion als gute Approximation für viele Situationen (z.B. kleine Störungen)
- seines entsprechend häufigen Auftretens in der Mechanik, Elektrodynamik und Quantenmechanik

2.4 Einfache Anwendung der Newton'schen Mechanik

2.4.1 Senkrechter Wurf im Erdschwerefeld

Ein Stein der Masse m werde mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 > 0$ aus einer Höhe $h_0 > 0$ über dem Boden senkrecht nach oben geworfen. Wie lautet die Bahnkurve $h(t)$ und wann schlägt der Stein mit welcher Geschwindigkeit auf den Boden auf?

Unter Vernachlässigung der Luftreibung gilt:

Dynamische Grundgleichung

Betrachtung nur der
z-Koordinate:
 $\vec{r} = h \vec{e}_z$

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \Leftrightarrow m \ddot{h} = -mg \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\ddot{h} = -g} \quad \text{Bewegungsgleichung}$$

$$\Rightarrow \dot{h} = -gt + v_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0} \quad \text{Bahnkurve}$$

Aufschlagzeitpunkt:

$$\begin{aligned}
 h(t) \stackrel{!}{=} 0 &\Rightarrow -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + h_0 = 0 \\
 &\Leftrightarrow t^2 - \left(\frac{2v_0}{g}\right) t - \left(\frac{2h_0}{g}\right) = 0 \\
 &\Rightarrow t_{1,2} = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2h_0}{g}} \\
 &\stackrel{\boxed{t>0}}{\Rightarrow} t_{\text{Aufschlag}} = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2h_0}{g}} \quad \text{Aufschlagzeitpunkt}
 \end{aligned}$$

Aufschlaggeschwindigkeit:

$$\begin{aligned}
 v_{\text{Aufschlag}} &= \dot{h}(t_A) = -gt_A + v_0 \\
 &= -v_0 - \sqrt{v_0^2 + 2gh_0} + v_0 = -\sqrt{v_0^2 + 2gh_0} \quad \text{Aufschlaggeschwindigkeit}
 \end{aligned}$$

2.4.2 Fallender Regentropfen

Ein Regentropfen der Masse m löse sich zum Zeitpunkt t_0 in der Höhe $h_0 > 0$ mit der Fallgeschwindigkeit $v_0 < 0$ aus (s)einer Wolke. Auf den Tropfen wirke eine Newton'sche Reibungskraft $\vec{F}_R = -\alpha |\vec{v}| \vec{v}$; $\alpha = \text{const} > 0$. Zu bestimmen sind die Funktionen $h(t)$, $v(t) = \dot{h}(t)$, die asymptotische Fallgeschwindigkeit v_∞ , sowie die typische Zeitdauer bis letztere erreicht ist.

Dynamische Grundgleichung:

$$\begin{aligned}
 m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} &\Leftrightarrow m \ddot{\vec{r}} = m \vec{g} - \alpha |\vec{v}| \vec{v} \Leftrightarrow \boxed{m \ddot{h} = -m g + \alpha v^2} \quad \text{Bewegungsgleichung} \\
 &\quad \quad \quad \downarrow \\
 &\quad \quad \quad \boxed{\vec{r} = h \vec{e}_z}
 \end{aligned}$$

Asymptotische Fallgeschwindigkeit:

$$\begin{aligned}
 v \stackrel{!}{=} \text{const} &\Leftrightarrow \dot{h} = \text{const} \Rightarrow \ddot{h} = 0 \Leftrightarrow -m g + \alpha v_\infty^2 = 0 \\
 &\Rightarrow v_\infty = -\sqrt{\frac{m g}{\alpha}} \quad (< 0, \text{ da } \vec{v} \text{ nach unten gerichtet ist!})
 \end{aligned}$$

Geschwindigkeitsverlauf:

$$\begin{aligned}
m \ddot{h} &= -m g + \alpha v^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m}{\alpha} \dot{v} = v^2 - v_\infty^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m}{\alpha} \frac{dv}{dt} = v^2 - v_\infty^2 \\
\Rightarrow \quad \frac{1}{v^2 - v_\infty^2} \frac{dv}{dt} &= \frac{\alpha}{m} \quad \Bigg| \quad \int_{t_0}^t \dots dt \\
\Rightarrow \quad \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv'}{v'^2 - v_\infty^2} &= \frac{\alpha}{m} \int_{t_0}^t dt' \quad \Leftrightarrow \quad \int_{v_0}^{v(t)} \frac{1}{2 v_\infty} \left(\frac{1}{v' - v_\infty} - \frac{1}{v' + v_\infty} \right) dv' = \frac{\alpha}{m} (t - t_0) \\
\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2 v_\infty} \left\{ \left(\ln |v - v_\infty| - \ln |v + v_\infty| \right) - \left(\ln |v_0 - v_\infty| - \ln |v_0 + v_\infty| \right) \right\} &= \frac{\alpha}{m} (t - t_0) \\
\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2 v_\infty} \ln \left\{ \left(-\frac{v_\infty - v}{v + v_\infty} \right) \left(-\frac{v_0 + v_\infty}{v_\infty - v_0} \right) \right\} &= \frac{\alpha}{m} (t - t_0) \\
\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2 v_\infty} \ln \left\{ A \left(\frac{v - v_\infty}{v + v_\infty} \right) \right\} &= \frac{\alpha}{m} (t - t_0); \quad A := \frac{v_0 + v_\infty}{v_0 - v_\infty} < 0 \\
\Leftrightarrow \quad v - v_\infty &= \frac{1}{A} \exp \left\{ \frac{2 \alpha v_\infty}{m} (t - t_0) \right\} (v + v_\infty) \\
\Leftrightarrow \quad v \left(1 - \frac{1}{A} \exp \{ \dots \} \right) &= v_\infty \left(1 + \frac{1}{A} \exp \{ \dots \} \right) \quad \Bigg| \cdot (v_0 + v_\infty) \\
\Rightarrow v(t) &= v_\infty \frac{(v_0 + v_\infty) + (v_0 - v_\infty) \exp \{ \dots \}}{(v_0 + v_\infty) - (v_0 - v_\infty) \exp \{ \dots \}} = v_\infty \frac{v_0 (1 + \exp \{ \dots \}) + v_\infty (1 - \exp \{ \dots \})}{v_0 (1 - \exp \{ \dots \}) + v_\infty (1 + \exp \{ \dots \})}
\end{aligned}$$

Grenzfälle:

$$\begin{aligned}
t = t_0 &\Rightarrow v(t_0) = v_\infty \frac{2 v_0}{2 v_\infty} = v_0 \\
t \rightarrow \infty &\Rightarrow v(t \rightarrow \infty) = v_\infty \frac{v_0 + v_\infty}{v_0 + v_\infty} = v_\infty
\end{aligned}$$

Zeitdauer, nach der v_∞ erreicht wird:

$$\Delta t = t - t_0 \geq \frac{m}{2 \alpha |v_\infty|} = \frac{|v_\infty|}{2 g} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{\alpha g}}$$

Grenzfälle:

$$\begin{aligned}
\alpha \rightarrow 0 &\Rightarrow \Delta t \rightarrow \infty \\
\alpha \rightarrow \infty &\Rightarrow \Delta t \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Bahnkurve:

$$v(t) = v_\infty \frac{B + C \exp \{ \dots \}}{B - C \exp \{ \dots \}} = v_\infty \left\{ 1 + \frac{2 C \exp \{ \dots \}}{B - C \exp \{ \dots \}} \right\}; \quad \begin{array}{l} B = v_0 + v_\infty \\ C = v_0 - v_\infty \end{array}$$

Damit:

$$\begin{aligned}
\dot{h} = \frac{dh}{dt} = v &\Rightarrow dh = v dt \\
\Rightarrow h(t) - h_0 &= \int_{t_0}^t v(t) dt = \int_{t_0}^t \left\{ 1 + \frac{2 C \exp \{ \dots \}}{B - C \exp \{ \dots \}} \right\} dt \\
&= v_\infty \left[t + \frac{m}{\alpha v_\infty} \ln |B - C \exp \{ \dots \}| \right]_{t_0}^t
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow h(t) = h_0 + v_\infty \left\{ t + \frac{m}{\alpha v_\infty} \ln \left[C \exp \{ \dots \} - B \right] - t_0 - \frac{m}{\alpha v_\infty} \ln [C - B] \right\}$$

$$\Rightarrow h(t) = h_0 + v_\infty \left\{ t - t_0 + \frac{m}{\alpha v_\infty} \ln \left[\frac{C \exp \left\{ \frac{2\alpha v_\infty}{m} (t - t_0) \right\} - B}{C - B} \right] \right\}$$

Grenzfälle: $h(t_0) = h_0 + v_\infty \left\{ 0 + \frac{m}{\alpha v_\infty} \ln 1 \right\} = h_0$

$t > t_0 + \Delta t \Rightarrow h(t) \approx h_0 + v_\infty \left\{ t - t_0 + \frac{m}{\alpha v_\infty} \ln \left(\frac{-B}{C - B} \right) \right\} \hat{=} \text{lineare Funktion}$

Vergleich mit freiem Fall (siehe 2.4.1):

$$\begin{aligned} h(t) &= -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + h_0 \\ &= -\frac{1}{2} g \left(t^2 - \frac{2v_0}{g} t \right) + h_0 \\ &= -\frac{1}{2} g \left(t - \frac{v_0}{g} \right)^2 + \frac{v_0^2}{2g} + h_0 \end{aligned}$$

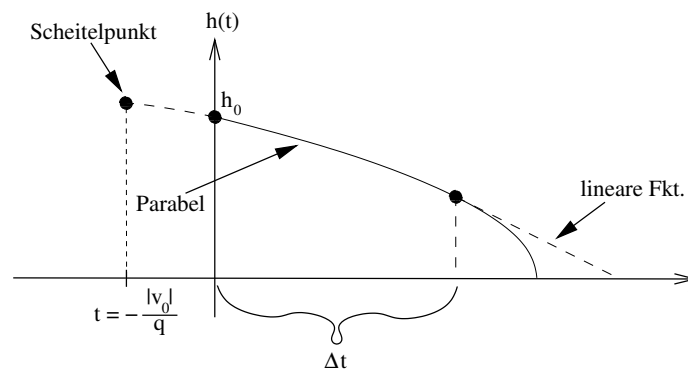


Abbildung 2.2: Der freie Fall

2.4.3 Schwingendes Spinnennetz

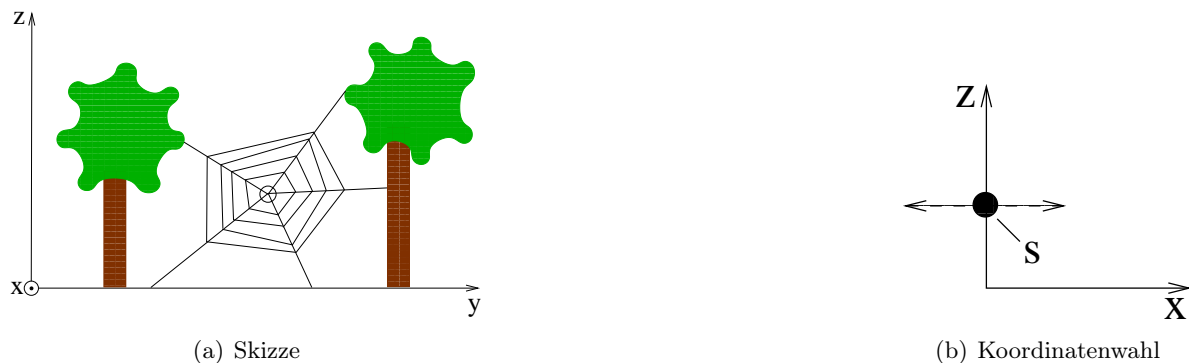


Abbildung 2.3: System einer schwingenden Spinne

Das Spinnennetz schwingt nach dem Windstoß: „Netzform“ bewirkt Rückstellkraft proportional zur Auslenkung (Hooke'sches Gesetz):

$$\vec{F} = -k x \vec{e}_x \quad ; \quad k > 0$$

Masse des Systems „Netz + Spinne“ sei m , betrachtet werde die Bewegung des Schwerpunktes S ohne Luftreibung :

Dynamische Grundgleichung:

$$m \vec{r}'' = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad m \ddot{x} = -k x \quad \Leftrightarrow \quad m \ddot{x} + k x = 0 \quad (\star)$$

Lösungsansatz:

$$\begin{aligned} \text{Da } \ddot{x} \text{ bis auf Konstante gleich } x : \quad & x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \\ & \dot{x}(t) = A \omega \cos(\omega t) - B \omega \sin(\omega t) \\ & \ddot{x}(t) = -A \omega^2 \sin(\omega t) - B \omega^2 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

In (\star) eingesetzt:

$$\begin{aligned} \Rightarrow & -m A \omega^2 \sin(\omega t) - m B \omega^2 \cos(\omega t) + k A \sin(\omega t) + k B \cos(\omega t) = 0 \\ \Leftrightarrow & (-m \omega^2 + k) A \sin(\omega t) + (-m \omega^2 + k) B \cos(\omega t) = 0 \\ \Rightarrow & -m \omega^2 + k = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \hat{=} \quad \text{„Schwingungsfrequenz“} \end{aligned}$$

Die Amplituden A und B folgen aus den

Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} \text{Für } t = 0 \text{ gilt:} \quad & x(0) = B \quad \Rightarrow \quad B = x(0) \\ & \dot{x}(0) = A \omega \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{\omega} \dot{x}(0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \sin(\omega t) + x(0) \cos(\omega t)} \quad \text{Bahnkurve}$$

Also: Netz (+Spinne) schwingt harmonisch, ist also ein „harmonischer Oszillator“

2.5 Schwingungen

Die grundlegenden Schwingungsformen (harmonische, gedämpfte bzw. erzwungene Schwingung) ergeben sich aus folgender dynamischer Grundgleichung:

$$m \vec{r}'' = \vec{F}_H + \vec{F}_R + \vec{F}_E$$

$$\begin{aligned} \text{mit: } \vec{F}_H &= \text{Rückstellkraft} \\ \vec{F}_R &= \text{Reibungskraft} \\ \vec{F}_E &= \text{externe (periodische) Kraft} \end{aligned}$$

Um die Notation im Folgenden übersichtlich zu halten, sei der **1-dim. Fall** betrachtet, für den $x = 0$ die Ruhelage sei. Außerdem:

$$\begin{aligned}\vec{F}_H &= -k x \vec{e}_x && ; \quad k > 0 && \text{(Hooke'sches Gesetz)} \\ \vec{F}_R &= -\mu v_x \vec{e}_x = -\mu \dot{x} \vec{e}_x && ; \quad \mu > 0 && \text{(Stokes'sche Reibung)} \\ \vec{F}_E &= F_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x && ; \quad F_0 > 0 && \text{(harmonisch variierende Kraft)}\end{aligned}$$

Bemerkung: Diese Wahl der Kräfte führt auf eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.
Eine weitgehende **analytische** Behandlung ist möglich.

Bemerkung: Im Fall der Newton'sche Reibung (s.o.) ergibt sich eine nichtlineare Dgl.

Für den 1-dim. Fall reduziert sich die obige allgemeine Form der dynamischen Grundgleichung mit $\vec{r} = \ddot{x} \vec{e}_x$ auf:

$$\begin{aligned}m \ddot{x} &= -k x - \mu \dot{x} + F_0 \cos(\omega t) \\ \Leftrightarrow & \boxed{m \ddot{x} + \mu \dot{x} + k x = F_0 \cos(\omega t)}\end{aligned}$$

Man unterscheidet für $k \neq 0$:

$$\begin{aligned}\mu = 0 \quad ; \quad F_0 = 0 & \hat{=} \quad \text{freie, harmonische Schwingung} \\ \mu \neq 0 \quad ; \quad F_0 = 0 & \hat{=} \quad \text{freie, gedämpfte Schwingung} \\ \mu \neq 0 \quad ; \quad F_0 \neq 0 & \hat{=} \quad \text{erzwungene, gedämpfte Schwingung}\end{aligned}$$

die im Folgenden diskutiert werden.

2.5.1 Freie, harmonische Schwingung ($\mu = 0, F_0 = 0$)

Die dynamische Grundgleichung nimmt folgende Form an:

$$m \ddot{x} + k x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

mit der Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Lösungsansatz ($a, b \in \mathbb{C}$):

$$\begin{aligned}x(t) &= a \exp\{bt\} \\ \dot{x}(t) &= ab \exp\{bt\} \\ \ddot{x}(t) &= ab^2 \exp\{bt\}\end{aligned}$$

Bemerkung: Diese Form des Lösungsansatzes heißt „Euler'scher Ansatz“.

Einsetzen ergibt:

$$b^2 a \exp\{bt\} + \frac{k}{m} a \exp\{bt\} = 0 \Rightarrow b^2 + \frac{k}{m} = 0$$

$$\Rightarrow b_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i \omega_0$$

Form der **allgemeinen Lösung**:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = a_1 \exp\{i \omega_0 t\} + a_2 \exp\{-i \omega_0 t\}$$

Da die **physikalische Lösung** reell sein muss, verwende die Euler'sche Formel $\exp\{i \alpha\} = \cos \alpha + i \sin \alpha$:

$$\Rightarrow x(t) = a_1 [\cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t)] + a_2 [\cos(-\omega_0 t) + i \sin(-\omega_0 t)]$$

$$= (a_1 + a_2) \cos(\omega_0 t) + i (a_1 - a_2) \sin(\omega_0 t)$$

$$\begin{aligned} \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \end{aligned}$$

Da $a_{1,2} \in \mathbb{C}$ und $a_1 \neq a_2$, folgt wegen $x(t) \stackrel{!}{=} \bar{x}(t)$

$$\Rightarrow (a_1 + a_2) \cos(\omega_0 t) + i (a_1 - a_2) \sin(\omega_0 t) \stackrel{!}{=} (\bar{a}_1 + \bar{a}_2) \cos(\omega_0 t) - i (\bar{a}_1 - \bar{a}_2) \sin(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} a_1 + a_2 &= \bar{a}_1 + \bar{a}_2 \\ a_1 - a_2 &= -(\bar{a}_1 - \bar{a}_2) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \text{„}\oplus\text{“ : } 2a_1 &= 2\bar{a}_2 \\ \text{„}\ominus\text{“ : } 2a_2 &= 2\bar{a}_1 \end{aligned} \right\} a_1 = \bar{a}_2 \Rightarrow \bar{a}_1 = a_2$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} a_1 + a_2 &= a_1 + \bar{a}_1 = B \\ a_1 - a_2 &= a_1 - \bar{a}_1 = -iA \end{aligned} \right\} x(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) \quad \text{mit } A, B \in \mathbb{R}$$

Mit Hilfe von **Anfangsbedingungen** bei $t = 0$ folgt wieder (s.o.)

$$A = \frac{1}{\omega_0} \dot{x}(0), \quad B = x(0)$$

und

$$x(t) = \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + x(0) \cos(\omega_0 t)$$

Skizze:

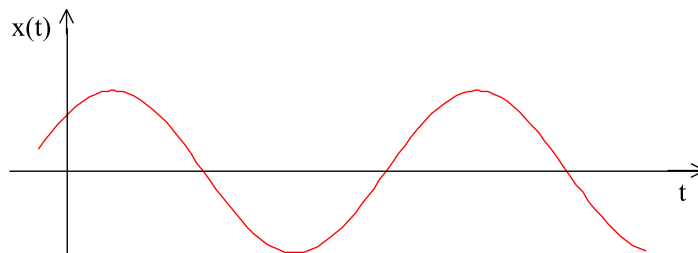


Abbildung 2.4: Freie, harmonische Schwingung

2.5.2 Freie, gedämpfte Schwingung ($\mu \neq 0, F_0 = 0$)

Hier gilt: $m \ddot{x} + \mu \dot{x} + kx = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \left(\frac{\mu}{m}\right) \dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$

Lösungsansatz ($a, b \in \mathbb{C}$):

$$x(t) = a \exp\{bt\} \Rightarrow \dot{x}(t) = ab \exp\{bt\} \Rightarrow \ddot{x}(t) = ab^2 \exp\{bt\}$$

Einsetzen:

$$b^2 + \left(\frac{\mu}{m}\right)b + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow b_{1,2} = -\frac{\mu}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} = -\frac{\mu}{2m} \pm \sqrt{D}$$

$$\boxed{D := \left(\frac{\mu}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}$$

Form der allgemeinen Lösung: $x(t) = a_1 \exp\{b_1 t\} + a_2 \exp\{b_2 t\}$

Es lassen sich drei Fälle unterscheiden:

$$D \left\{ \begin{array}{l} < 0 \hat{=} \text{schwache} \\ = 0 \hat{=} \text{kritische} \\ > 0 \hat{=} \text{starke} \end{array} \right\} \text{ Dämpfung}$$

(1) Schwache Dämpfung $D < 0$:

$$\begin{array}{l} \text{Schwingungsfrequenz:} \\ \omega := \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\mu}{2m}\right)^2} = \sqrt{-D} \\ \Rightarrow b_{1,2} = -\frac{\mu}{2m} \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\mu}{2m}\right)^2} = -\frac{\mu}{2m} \pm i\omega \\ \Rightarrow x(t) = \exp\left\{-\frac{\mu}{2m}t\right\} \left[a_1 \exp\{i\omega t\} + a_2 \exp\{-i\omega t\} \right] \\ = \exp\left\{-\frac{\mu}{2m}t\right\} \left[(a_1 + a_2) \cos(\omega t) + i(a_1 - a_2) \sin(\omega t) \right] \end{array}$$

Aus:

$$x(0) = a_1 + a_2 ; \quad \dot{x}(0) = -\frac{\mu}{2m}(a_1 + a_2) + i\omega(a_1 - a_2) = -\frac{\mu}{2m}x(0) + i\omega(a_1 - a_2)$$

folgt: $\boxed{x(t) = \exp\left\{-\frac{\mu}{2m}t\right\} \left[\left(\dot{x}(0) + \frac{\mu}{2m}x(0)\right) \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) + x(0) \cos(\omega t) \right]}$

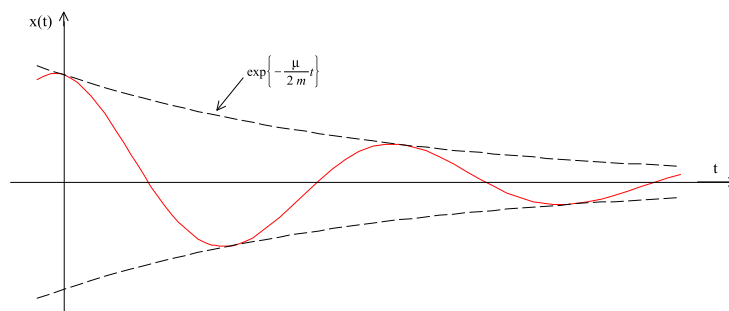


Abbildung 2.5: Schwach gedämpfte Schwingung

(2) **kritische Dämpfung $D = 0$:**

$\Rightarrow b_1 = b_2 = -\frac{\mu}{2m}$; d.h. $\omega = \sqrt{-D} = 0$ und man findet nur eine spezielle Lösung:
 $x_1 = a_1 \exp\left\{-\frac{\mu}{2m}t\right\}$. Die zweite Lösung folgt aus einer Grenzwertbetrachtung der Lösung für $D < 0$:

$$\omega \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(\omega t) \rightarrow 1; \quad \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \rightarrow t$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \exp\left\{-\frac{\mu}{2m}t\right\} \left[\left(\dot{x}(0) + \frac{\mu}{2m}x(0)\right)t + x(0) \right]$$

Bemerkung: - da keine Schwingung: „**aperiodischer Grenzfall**“
 - praktische Anwendung: Zeigermessinstrumente, Türschließung

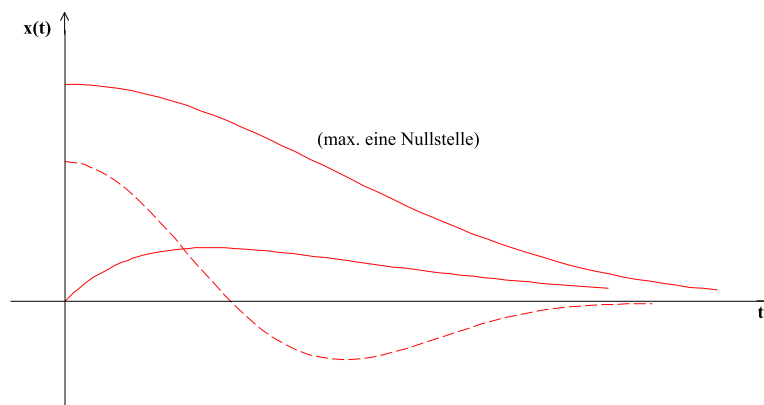


Abbildung 2.6: kritische Dämpfung, aperiodischer Grenzfall

(3) **Starke Dämpfung $D > 0$:**

$$\Rightarrow b_{1,2} = -\frac{\mu}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} < 0$$

$$\Rightarrow x(t) = \exp\left\{-\frac{\mu}{2m}t\right\} \left[a_1 \exp\left\{\sqrt{D}t\right\} + a_2 \exp\left\{-\sqrt{D}t\right\} \right]$$

Aus: $x(0) = a_1 + a_2$; $\dot{x}(0) = -\frac{\mu}{2m}(a_1 + a_2) + \sqrt{D}(a_1 - a_2)$

folgt: $a_{1,2} = \frac{1}{2} \left[x(0) \pm \frac{1}{\sqrt{D}} \left(\dot{x}(0) + \frac{\mu}{2m}x(0) \right) \right]$

Damit:

$$x(t) = \frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{\mu}{2m}t\right\} \left[\left(x(0) + \frac{1}{\sqrt{D}} \left[\dot{x}(0) + \frac{\mu}{2m}x(0) \right] \right) \exp\left\{\sqrt{D}t\right\} + \left(x(0) - \frac{1}{\sqrt{D}} \left[\dot{x}(0) + \frac{\mu}{2m}x(0) \right] \right) \exp\left\{-\sqrt{D}t\right\} \right]$$

Bemerkung: „Aperiodische Kriechbewegung“ ähnlich zu (2) aber mit kleinerer „Amplitude“ und längerer Rückkehr zur Ruhelage.

2.5.3 Erzwungene, gedämpfte Schwingung

Man hat: $m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t) \Leftrightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)}$

Also: inhomogene Dgl. \Rightarrow allgemeine Lösung = allgemeine Lösung der homogenen Dgl. + spezielle (= partikuläre) Lösung der inhomogenen Dgl.

homogene Lösung: siehe 2.5.2

inhomogene Lösung: nach „Einschwingzeit“ schwingt das System mit der Frequenz ω , daher

Ansatz für partikuläre Lösung ($a \in \mathbb{C}, \omega \in \mathbb{R}$):

$$x(t) = a \exp\{i\omega t\} \Rightarrow \dot{x}(t) = i\omega a \exp\{i\omega t\} \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 a \exp\{i\omega t\}$$

$$\cos(\omega t) \mapsto \exp(i\omega t)$$

Einsetzen: $-a\omega^2 m + i\omega \mu a + a k = F_0$

$$\Rightarrow a = \frac{F_0}{k - \omega^2 m + i\omega \mu} \stackrel{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}{=} \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\frac{\mu}{m}\omega} = \frac{F_0}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\frac{\mu}{m}\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\mu^2 \omega^2}{m^2}} \stackrel{!}{=} |a| \exp\{i\phi\}$$

$$\Rightarrow |a| = \sqrt{a\bar{a}} = \frac{F_0}{m} \frac{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\mu^2 \omega^2}{m^2}}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\mu^2 \omega^2}{m^2}} = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\mu^2 \omega^2}{m^2}}}$$

$$\Phi = \arctan \left\{ \frac{\operatorname{Im}(a)}{\operatorname{Re}(a)} \right\} = \arctan \left\{ -\frac{\mu \omega / m}{\omega_0^2 - \omega^2} \right\} = \arctan \left\{ \frac{\mu \omega}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \right\}$$

$$\Rightarrow x_{inhomog}(t) = \frac{F_0}{m} \frac{\exp\{i[\omega t + \Phi]\}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\mu^2 \omega^2}{m^2}}} \hat{=} \text{partikuläre Lösung der inhom. Dgl.}$$

Physikalisch relevant ist der Realteil, daher lautet die allgemeine Lösung:

$$x(t) = \operatorname{Re} \left(x_{inhomog}(t) \right) + x_{homogen}(t)$$

$$\stackrel{\Rightarrow}{\boxed{t \gg \frac{2m}{\mu}}} \quad \boxed{x(t) \approx \frac{F_0}{m} \frac{\cos(\omega t + \Phi)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\mu^2 \omega^2}{m^2}}}$$

Bemerkung:

- max. Amplitude für $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\mu^2}{2m^2}} \hat{=} \text{Resonanzfrequenz}$
- $\mu = 0 \Rightarrow \omega_R = \omega_0 \Rightarrow |a| = \infty \hat{=} \text{Resonanzkatastrophe}$
- $\frac{\mu^2}{2m^2} > \omega_0^2 \Rightarrow \text{keine Resonanz mehr}$

Skizze:

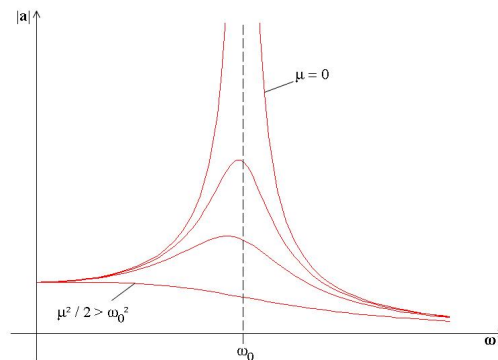


Abbildung 2.7: Grenzfälle bei erzwungener, gedämpfter Schwingung

2.6 Erhaltungssätze

Idee: alternative Problemlösung nicht über die dynamische Grundgleichung

2.6.1 Impulserhaltung

Die Motivation zur Suche nach Erhaltungssätzen ergibt sich für den kräftefreien Fall aus dem 2. Newton'schen Axiom:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \xrightarrow{\vec{F}=0} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{const.} \quad \hat{=} \quad \text{„Impulserhaltung“}$$

Folgerung: Für den kräftefreien Massenpunkt gilt der Impulserhaltungssatz.

Somit erscheint die Frage nach weiteren Erhaltungsgrößen bzw. -sätzen sinnvoll.

2.6.2 Energieerhaltung

Aus der dynamischen Grundgleichung folgt:

$$\begin{aligned} m \ddot{\vec{r}} &= \vec{F} \quad \Big| \cdot \dot{\vec{r}} \\ \Rightarrow m \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} &= \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} \quad \Leftrightarrow \quad m \frac{d\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m}{2} \frac{d\dot{\vec{r}}^2}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \Big| \int_{t_1}^{t_2} \dots dt \\ \Rightarrow \frac{m}{2} (\dot{\vec{r}}_2^2 - \dot{\vec{r}}_1^2) &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

Mit den Definitionen

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} m v^2} \quad \text{kinetische Energie} \quad \boxed{W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}} \quad \text{Arbeit}$$

folgt

$$\frac{m}{2} v_2^2 - \frac{m}{2} v_1^2 = W \quad \Leftrightarrow \quad T_2 - T_1 = W$$

Folgerung: Die Änderung der kinetischen Energie eines Massenpunktes entspricht der an ihm (von außen) geleisteten Arbeit.

Offenbar ist die kinetische Energie keine Erhaltungsgröße. Wir definieren daher "**konservative**" **Kräfte** durch die Wegunabhängigkeit des Integrals:

$$\boxed{V(\vec{r}) = - \int_{P_0}^P \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} \quad \text{Potentielle Energie} \quad \text{oder} \quad \text{Potential}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} W &= \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{P_0}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{P_0}^{P_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{P_0}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) = V_1 - V_2 \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} T_2 - T_1 = W = V_1 - V_2 &\Leftrightarrow T_2 + V_2 = T_1 + V_1 \\ \Rightarrow T + V = E = \text{const.} &\hat{=} \text{„Energieerhaltung“} \end{aligned}$$

Folgerung: Für einen Massenpunkt in einem konservativen Kraftfeld gilt der Energieerhaltungssatz.

Bemerkung: Für $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ ist E i.A. zeitabhängig, also keine Erhaltungsgröße.

Bemerkung: Die Leistung $P = \frac{dW}{dt}$ ist allgemein, also auch für nicht konservative Kräfte, definiert.

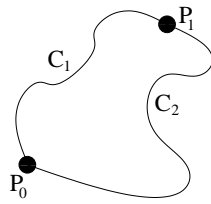
Berechnung von $\vec{F}(\vec{r})$ aus dem Potential $V(\vec{r})$:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= - \int_{P_0}^P \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{t_0}^t \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt \\ \Rightarrow \frac{dV(\vec{r})}{dt} &= \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \stackrel{!}{=} -\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \\ \Rightarrow &\boxed{\vec{F} = - \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial \vec{r}} = - \text{grad} V} \quad \text{„konservatives Kraftfeld“} \end{aligned}$$

Beispiel: In kartesischen Koordinaten gilt mit $V = V(x, y, z)$:

$$\vec{F} = - \text{grad} V = - \vec{\nabla} V = - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) \vec{e}_x - \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) \vec{e}_y - \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right) \vec{e}_z$$

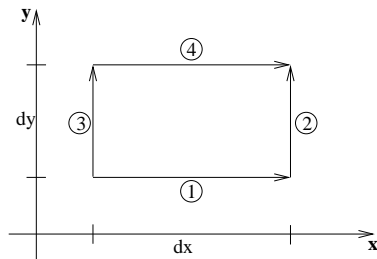
Damit die Definition des Potentials $V(\vec{r})$ als Wegintegral sinnvoll ist, muss das Integral wegunabhängig sein.



$$-\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \stackrel{!}{=} -\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Abbildung 2.8: Wegunabhängigkeit

Wähle kartesische Koordinaten:



$$\begin{aligned} & \int_{(1)} F_x(x, y) dx + \int_{(2)} F_y(x + dx, y) dy \\ & \stackrel{!}{=} \int_{(3)} F_y(x, y) dy + \int_{(4)} F_x(x, y + dy) dx \end{aligned}$$

Abbildung 2.9: Beispieldreieck

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \int \{F_y(x + dx, y) - F_y(x, y)\} dy - \int \{F_x(x, y + dy) - F_x(x, y)\} dx = 0 \\ \Rightarrow & \iint \frac{F_y(x + dx, y) - F_y(x, y)}{dx} dx dy - \iint \frac{F_x(x, y + dy) - F_x(x, y)}{dy} dy dx = 0 \\ \Rightarrow & \iint \frac{\partial F_y}{\partial x} dx dy - \iint \frac{\partial F_x}{\partial y} dy dx = \iint \left\{ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right\} dx dy = 0 \Rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Gültigkeit für alle Komponenten liefert allgemein:

$$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0}$$

„konservatives Kraftfeld“

2.6.3 Drehimpulserhaltung

Ausgehend von der dynamischen Grundgleichung:

$$\begin{aligned} m \ddot{\vec{r}} &= \vec{F} & \Big| & \vec{r} \times (\dots) \\ \Rightarrow & m(\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \vec{F} \\ \Rightarrow & \frac{d}{dt} \{m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})\} = \vec{r} \times \vec{F} & \Leftrightarrow & \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \vec{F} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} (\vec{a} \times \vec{b}) = \dot{\vec{a}} \times \vec{b} + \vec{a} \times \dot{\vec{b}}}$$

und mit den Definitionen:

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}} \quad \text{Drehimpuls} \quad \boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}} \quad \text{Drehmoment}$$

folgt:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \stackrel{\vec{M}=0}{\Rightarrow} \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const.} \hat{=} \text{„Drehimpulserhaltung“}$$

Folgerung: Für einen Massenpunkt im Zentralfeld mit $\vec{F} = F(\vec{r})\vec{e}_r \Rightarrow \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} = 0$ gilt der Drehimpulserhaltungssatz.

2.7 Bewegung im konservativen Zentralkraftfeld

\vec{F} sei Zentralkraftfeld (vgl. 2.6.3): $\vec{F}(\vec{r}) = F(\vec{r})\vec{e}_r$

\vec{F} sei konservative Kraft (vgl. 2.6.2): $\vec{F}(\vec{r}) = -\text{grad}V(\vec{r})$

In sphärischen Polarkoordinaten (r, ϑ, φ) (Wahl aufgrund der Symmetrie des Problems!) gilt:

$$\begin{aligned} \text{grad}V(\vec{r}) &= \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_\varphi \\ \Rightarrow \vec{F}(\vec{r}) = F(\vec{r})\vec{e}_r &\stackrel{!}{=} -\text{grad}V(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)\vec{e}_r - \underbrace{\frac{1}{r}\left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)}_{\stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow V \neq V(\vartheta)}\vec{e}_\vartheta - \underbrace{\frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)}_{\stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow V \neq V(\varphi)}\vec{e}_\varphi \\ \Rightarrow F(\vec{r})\vec{e}_r &= -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)\vec{e}_r \quad \text{und} \quad V(\vec{r}) = V(r) \\ \Rightarrow F(\vec{r}) &= F(r) \end{aligned}$$

Also:

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\vec{e}_r} \quad \text{„konservatives Zentralkraftfeld“}$$

Damit lauten dann der Energie- und Drehimpulserhaltungssatz:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + V(r) = \text{const.} \\ \vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} = \text{const.} \end{aligned}$$

Es gilt in sphärischen Polarkoordinaten:

$$\vec{r} = r\vec{e}_r \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta + r\sin\vartheta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

Damit:

$$\begin{aligned} \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} &= r\vec{e}_r \times m\dot{\vec{r}} = mr\vec{e}_r \times (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta + r\sin\vartheta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) \\ &= mr^2\dot{\vartheta}\vec{e}_\varphi - mr^2\sin\vartheta\dot{\varphi}\vec{e}_\vartheta \stackrel{!}{=} \text{const.} \end{aligned}$$

Da \vec{L} konstant ist, erfolgt die Bewegung wegen $\vec{r} \cdot \vec{L} = \vec{r} \cdot (m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = 0$ in einer Ebene. Wahl dieser Ebene als $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ($\Rightarrow \dot{\vartheta} = 0$), so dass gilt

$$\vec{L} = -mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_\vartheta \quad \Rightarrow \quad L = |\vec{L}| = mr^2\dot{\varphi}$$

und auch

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\sin\vartheta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$$

Für den Erhaltungssatz gilt dann:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

Man schreibt dieses Ergebnis gerne als

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$$

mit

$$\boxed{V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}} \quad \text{„Effektives Potential“}$$

Statt die dynamische Grundgleichung zu lösen, kann man die **Bahnkurve** (durch $r(t)$, $\varphi(t)$ bestimmt) aus den Erhaltungssätzen **berechnen**. Aus dem Energieerhaltungssatz folgt:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{\text{eff}}(r))} = \frac{dr}{dt} \\ \Rightarrow dt &= \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{\text{eff}}(r))}} \Rightarrow \boxed{t - t_0 = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{\text{eff}}(r))}}} \end{aligned}$$

Integration liefert $t(r)$, die Umkehrung dann $r(t)$. Aus dem Drehimpulserhaltungssatz folgt:

$$\begin{aligned} L = m r^2 \dot{\varphi} &\Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{m r^2} \Rightarrow d\varphi = \frac{L}{m r^2} dt \\ \Rightarrow \boxed{\varphi - \varphi_0 = \int \frac{L}{m r^2} \left(\frac{dt}{dr} \right) dr = \int \frac{L dr}{r^2 \sqrt{2m (E - V_{\text{eff}}(r))}}} \end{aligned}$$

Integration liefert $\varphi(r)$, und mit $r(t)$ folgt $\varphi(t)$.

- Folgerung:
- (1) $E < V_{\text{eff}} \Rightarrow$ Diskriminante $< 0 \Rightarrow$ keine reelle Lösung, $\hat{=}$ klassisch nicht mögliche Bahnen
 - (2) $E = V_{\text{eff}} \Rightarrow \dot{r} = 0$ (aber nicht $\dot{\varphi}!$), $\hat{=}$ (klassische) „Umkehrpunkte“ der Bewegung
 - (3) $E > V_{\text{eff}} \Rightarrow$ nicht triviale reelle Lösung existiert, $\hat{=}$ klassisch erlaubte Bewegungen

Bemerkung: In der Quantenmechanik ist ein „Eindringen“ in die klassisch nicht erlaubten Bereiche möglich, man spricht vom **Tunneleffekt**. Man beachte aber, dass in der QM der Bahnbegriff seine Bedeutung verliert, so dass das „Eindringen“ besser als „nicht verschwindende Aufenthaltswahrscheinlichkeit“ bezeichnet wird.

Als **konkrete Anwendung** untersuchen wir die **Planetenbewegung**:

Hier ist die konservative Zentralkraft = Gravitationskraft:

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{e}_r \quad \Rightarrow \quad V(r) = -G \frac{Mm}{r}$$

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla}V}$$

Dann findet man

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{L dr}{r^2 \sqrt{2m \left(E + G \frac{Mm}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}} = \sqrt{\frac{1}{2m}} \int \frac{L dr}{r \sqrt{Er^2 - GMmr - \frac{L^2}{2m}}}$$

$$\stackrel{\text{z.B. Bronstein}}{\underset{=}{\Rightarrow}} \sqrt{\frac{1}{2m}} \frac{L\sqrt{2m}}{L} \arcsin \left\{ \frac{GMmr - L^2/m}{r \sqrt{G^2 M^2 m^2 + \frac{2EL^2}{m}}} \right\} + const.$$

$$\boxed{\tilde{\varphi}_0 = \varphi_0 + const.} \Rightarrow \varphi - \tilde{\varphi}_0 = \arcsin \left\{ \frac{\frac{GMm^2}{L} - \frac{L}{r}}{\sqrt{2mE + \frac{G^2 M^2 m^4}{L^2}}} \right\}$$

$$\Rightarrow \sin(\varphi - \tilde{\varphi}_0) = \frac{\frac{GMm^2}{L} - \frac{L}{r}}{\frac{GMm^2}{L} \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 M^2 m^3}}} = \frac{1 - \left(\frac{L^2}{GMm^2} \right) \frac{1}{r}}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 M^2 m^3}}}$$

Mit den Definitionen

$$p = \frac{L^2}{GMm^2} \quad ; \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 M^2 m^3}}$$

und der Wahl

$$\tilde{\varphi}_0 = \frac{3}{2}\pi$$

erhält man

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad \boxed{r(\varphi) = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}} \quad \text{Kegelschnittgleichung}$$

Daraus folgt man für die **Bahnkurve**:

$e = 0$	$\hat{=}$	Kreis	(Planeten)
$e < 1$	$\hat{=}$	Ellipse	(Planeten)
$e = 1$	$\hat{=}$	Parabel	(Kometen)
$e > 1$	$\hat{=}$	Hyperbel	(Kometen)

Aus diesen Überlegungen folgen die **Kepler'schen Gesetze**:

1. *Gesetz (1609)*: Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

Offenbar gilt für unser obiges Ergebnis:

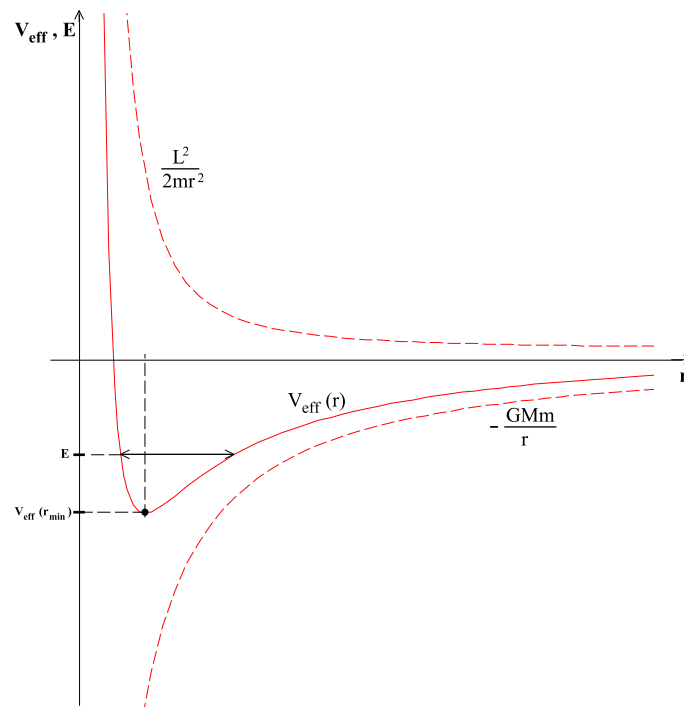


Abbildung 2.10: Effektives Potenzial

Die Kurvenform ist klar wegen:

$$\begin{aligned}
 V_{\text{eff}} &= \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow r_0 = \frac{L^2}{2GMm^2} \\
 V'_{\text{eff}} &= -\frac{L^2}{mr^3} + \frac{GMm}{r^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow r_{\text{min}} = \frac{L^2}{GMm^2} = 2r_0 \\
 \Rightarrow V_{\text{eff}}(r_{\text{min}}) &= -\frac{1}{2} \frac{G^2 M^2 m^3}{L^2}
 \end{aligned}$$

\Rightarrow gebundene Bewegung für $V_{\text{eff}} \leq E < 0$

$\Rightarrow 0 \leq e < 1 \Rightarrow$ **Ellipsen** (Kreise für $e = 0$) **mit Sonne im Ursprung** (=Brennpunkt)

Es gilt auch:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{p}{1-e^2} = \frac{GMm}{2|E|} && \text{große Halbachse} \\
 b &= \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{L}{\sqrt{2|E|m}} = \frac{L}{m} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{GM}} && \text{kleine Halbachse}
 \end{aligned}$$

Für $E = V_{\text{eff}}(r_{\text{min}}) = -\frac{1}{2} \frac{G^2 M^2 m^3}{L^2}$ gilt z. B.:

$$e = 0; \quad a = b = \frac{L^2}{GMm^2} \hat{=} \text{Kreisbahn}$$

2. Gesetz (1609): Der Fahrstrahl von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Betrachte:

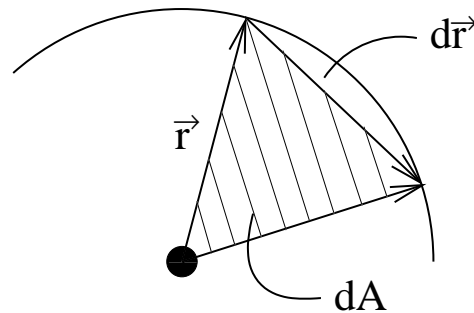


Abbildung 2.11: überstrichene Fläche

$$\Rightarrow dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}| dt = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| dt = \frac{1}{2m} |\vec{r} \times \vec{p}| dt = \frac{L}{2m} dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dA}{dt} = \dot{A} = \frac{L}{2m} = \text{const.}} \quad \text{Flächensatz}$$

\dot{A} heißt **Flächengeschwindigkeit**.

3. Gesetz (1619) Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen der Ellipsen.

Es gilt:

$$\dot{A} = \frac{L}{2m} \quad \Leftrightarrow \quad 2m \dot{A} = L \quad \left| \int_0^T \dots dt \right.$$

$$\Rightarrow 2m [A(T) - A(0)] = L \cdot T$$

$$\boxed{\text{Ellipsenfläche} = \pi ab} \quad \boxed{\text{siehe oben}}$$

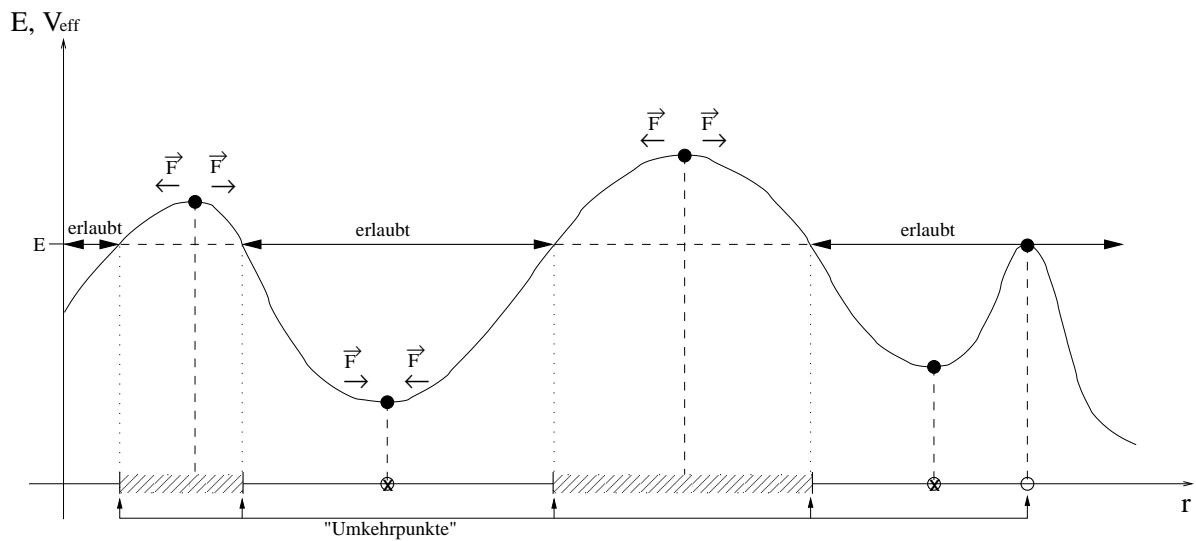
$$\Leftrightarrow 2m \pi ab = L \cdot T \quad \Leftrightarrow 2m \pi \frac{L}{m \sqrt{GM}} a^{3/2} = L \cdot T$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} a^{3/2} = T \quad \Rightarrow \quad T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM} \right) a^3$$

Da die Konstante $\frac{4\pi^2}{GM}$ für alle Planeten gleich ist, folgt:

$$\boxed{\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}}$$

Veranschaulichung:



/// ≙ klassisch nicht erlaubte Bereiche

○ ≙ instabile Gleichgewichtslagen: $\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = 0$; $\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2} < 0$

⊗ ≙ stabile Gleichgewichtslage: $\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = 0$; $\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2} > 0$

Abbildung 2.12: Potential und Teilchenenergie

Bemerkung: Hier wird wieder die Bedeutung des harmonischen Oszillators offenbar. Die Taylor-Entwicklung des Potentials liefert:

$$V(r) \approx V(r_0) + V'(r_0)(r - r_0) + \frac{1}{2}V''(r_0)(r - r_0)^2$$

so dass in einer Gleichgewichtslage r_0 (mit $V'(r_0) = 0$) für kleine Auslenkungen $x = r - r_0$ gilt:

$$V(r_0 + x) \approx V(r_0) + \frac{1}{2}V''(r_0)x^2$$

Damit gilt für die Kraft an der Stelle $r = r_0 + x$:

$$\vec{F} = -\text{grad} V = -V''(r_0)x \vec{e}_r$$

Wenn: $V''(r_0) < 0 \Rightarrow \vec{F}$ in Richtung der Auslenkung
 $\hat{=}$ Instabilität

$V''(r_0) > 0 \Rightarrow \vec{F}$ der Auslenkung entgegen gerichtet
 $\hat{=}$ Stabilität

3 Das Zweikörperproblem

Bisher: Behandlung eines einzelnen Teilchens (Körper, Massenpunkt)

Nötig: Erweiterung auf Teilchensysteme

3.1 Allgemeines zu Mehrteilchensystemen

Ausgangspunkt: Newton-Axiome müssen für jeden einzelnen Massenpunkt gültig sein

Also:

Dynamische Grundgleichung(en) ($\hat{=}$ Axiom 2):

$$\underbrace{\dot{\vec{p}}_i}_{m_i \neq m_i(t)} = m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{ext,i} + \sum_j \vec{F}_{ij} = \vec{F}_{ges,i}$$

mit den Bezeichnungen:

- $m_i \hat{=}$ Masse des i-ten Teilchen
- $\vec{r}_i \hat{=}$ Ortsvektor des i-ten Teilchen
- $\vec{F}_{ext,i} \hat{=}$ externe Kraft auf das i-te Teilchen
- $\vec{F}_{ij} \hat{=}$ (interne) Kraft des j-ten auf das i-te Teilchen
- $\vec{F}_{ges,i} \hat{=}$ auf das i-te Teilchen wirkende Gesamtkraft

Reaktionsprinzip ($\hat{=}$ Axiom 3):

$$\boxed{\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \Rightarrow \vec{F}_{ii} = 0}$$

Bemerkung: Axiom 1 als Spezialfall von Axiom 2 erfüllt (vgl. 2.1)

Bemerkung: Wenn keine externen Kräfte auf ein Teilchensystem wirken, also $\vec{F}_{ext,i} = \vec{0}$ gilt, dann heißt das System **abgeschlossen**.

Bemerkung: Die internen Kräfte \vec{F}_{ij} sind zumeist „**Zweikörperkräfte**“, d.h. sie hängen lediglich von der Lage (und evtl. den Geschwindigkeiten) zweier Teilchen ab.

3.2 Erhaltungssätze für Mehrteilchensystem

Zusätzliche Schwierigkeit bei Mehrteilchensystemen: die Zahl der Bewegungsgleichungen kann sehr groß sein

- ⇒ explizite Lösung aller Bewegungsgleichungen ist nicht nötig
- ⇒ Berechnung von Bahnkurven aus Erhaltungssätzen (vgl. 2.7)

3.2.1 Impulserhaltung

Idee: Summation aller dynamischen Grundgleichungen

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i &= \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \left(\vec{F}_{ext,i} + \sum_j \vec{F}_{ij} \right) = \sum_i \vec{F}_{ext,i} + \sum_i \sum_j \vec{F}_{ij} \\ &= \sum_i \vec{F}_{ext,i} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \underbrace{(\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji})}_{=0} = \sum_i \vec{F}_{ext,i} \end{aligned}$$

Mit den **Definitionen:**

$$\begin{aligned} M &= \sum_i m_i && \hat{=} \text{ Gesamtmasse} \\ \vec{R} &= \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i && \hat{=} \text{ Ortsvektor des „Schwerpunktes“} \\ \vec{P} &= \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = M \dot{\vec{R}} && \hat{=} \text{ Gesamtimpuls} \\ \vec{F}_{ext} &= \sum_i \vec{F}_{ext,i} && \hat{=} \text{ (externe) Gesamtkraft} \end{aligned}$$

folgt:

$$M \dot{\vec{R}} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \Rightarrow M \ddot{\vec{R}} = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{P}} = \vec{F}_{ext} \quad \text{Impuls- oder Schwerpunktsatz}$$

$m_i \neq m_i(t)$

Schwerpunktsatz:

Der Schwerpunkt eines Teilchensystem bewegt sich so, als ob die Gesamtmasse des Systems in ihm vereinigt ist und die Summe der externen Kräfte auf ihn einwirkt.

Impulserhaltungssatz:

Für ein abgeschlossenes System ($\vec{F}_{ext} = \vec{0}$) bleibt der Impuls des Schwerpunktes erhalten:

$$M \ddot{\vec{R}} = \dot{\vec{P}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = \text{const.}$$

Bemerkung: Die Bewegung eines gesamten Teilchensystems kann also durch die Bewegung **eines** Massenpunktes, nämlich des Schwerpunktes beschrieben werden.

Bemerkung: Mit Hilfe des Schwerpunktsatzes können sogenannte „Relativkoordinaten“ definiert werden: $\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{s}_i$

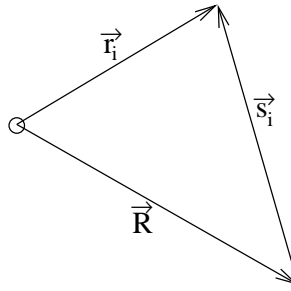


Abbildung 3.1: Relativkoordinaten

Wenn für ein gegebenes System $\vec{R}(t)$ bekannt ist, genügt also zur Angabe der Lage $\vec{r}_i(t)$ aller Teilchen des Systems die Kenntnis ihrer relativen Lage $\vec{s}_i(t)$ in Bezug auf den Schwerpunkt \vec{R} .

3.2.2 Energieerhaltung

Vorüberlegung:

Für konservative Kräfte $\vec{F}_i = \vec{F}_{ext,i} + \sum_j \vec{F}_{ij}$ gilt:

$$\text{rot } \vec{F}_i = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \vec{F}_i = \vec{\nabla} \times \vec{F}_i = \vec{0}$$

also

- (a) $\vec{F}_{ext,i} = -\vec{\nabla}_i V_{ext,i}$
 (b) Wenn $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ Zentralkraft ($\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$):

$$\begin{aligned} V_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) &= V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = V_{ij}(r_{ij}) = V_{ji}(r_{ji}) \\ \Rightarrow \vec{F}_{ij} &= -\vec{\nabla}_i V_{ij} = -\frac{\partial V_{ij}}{\partial \vec{r}_i} = \frac{\partial V_{ij}}{\partial \vec{r}_j} = \frac{\partial V_{ji}}{\partial \vec{r}_j} = \vec{\nabla}_j V_{ji} = -\vec{F}_{ji} \end{aligned}$$

Insgesamt demnach:

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V_i = -\vec{\nabla}_i \left(V_{ext,i} + \sum_j V_{ij} \right)$$

Analog zum vorherigen Abschnitt kann daraus hergeleitet werden:

$$\boxed{T + V = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 + \sum_i \left(V_{ext,i} + \frac{1}{2} \sum_j V_{ij} \right) = const.} \quad \text{Energie(erhaltungs)satz}$$

mit

$$\begin{aligned} T &= \sum_i T_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \\ V &= \sum_i V_i = \sum_i \left(V_{ext,i} + \frac{1}{2} \sum_j V_{ij} \right) \end{aligned}$$

Energieerhaltungssatz:

Für ein Teilchensystem in einem (externen) konservativen Kraftfeld (und konservativen Zentralkräften untereinander) ist die Summe der kinetischen und potentiellen Teilchenenergien zeitlich konstant.

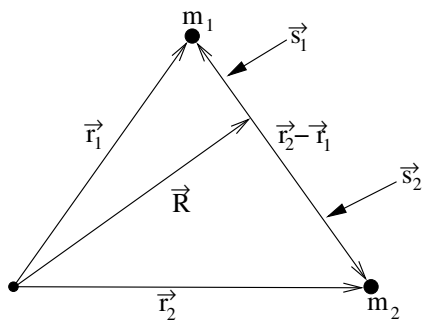
Bemerkung: Es gilt auch ein **Drehimpulssatz** in der Form $\dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{M}_{ext,i} = \vec{M}_{ext}$ und die Aussage $2\langle T \rangle = \left\langle \sum_i (\vec{\nabla}_i V_i) \cdot \vec{r}_i \right\rangle$ ($\hat{=}$ „**Virialsatz**“), wobei $\langle \dots \rangle$ ein zeitlicher Mittelwert bedeutet.

3.3 Das Zweiteilchensystem

... ist ein wichtiger Spezialfall eines Mehrteilchensystems. Hier gilt für den **Schwerpunkt**:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^2 m_i \vec{r}_i = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Es ist zweckmäßig den **Relativvektor** (Differenzvektor) $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ einzuführen, um das System statt mit $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)$ äquivalent mit $\vec{R}(t), \vec{r}(t)$ zu beschreiben:



$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r} = \vec{R} + \vec{s}_1 \\ \vec{r}_2 &= \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r} = \vec{R} + \vec{s}_2 \end{aligned}$$

Abbildung 3.2: Schwerpunktsystem

Die dynamischen Grundgleichungen lauten dann:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(I)} \quad m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{ext,1} + \vec{F}_{12} \\ \text{(II)} \quad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{ext,2} + \vec{F}_{21} \end{array} \right\} \text{ „} \oplus \text{“} \Rightarrow \boxed{M \ddot{\vec{R}} = \vec{F}_{ext}}$$

Dynamische Grundgleichung des Schwerpunktes

sowie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_1} \text{(I)} - \frac{1}{m_2} \text{(II)} &\Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{\vec{F}_{ext,1}}{m_1} + \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{ext,2}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} && \text{Dynamische Grundgleichung der Relativbewegung} \\ &= \frac{\vec{F}_{ext,1}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{ext,2}}{m_2} + \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{12} = \frac{\vec{F}_{ext,1}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{ext,2}}{m_2} + \frac{\vec{F}_{12}}{\mu} \\ &\quad \left| \begin{array}{l} \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \\ \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \Rightarrow \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \hat{=} \text{„reduzierte Masse“} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Für ein **abgeschlossenes Zweiteilchensystem** ($\hat{=}$ Zweikörperproblem) gilt dann ($\vec{F}_{ext,i} = \vec{0}$):

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{\vec{R}} &= 0 \\ \mu\ddot{\vec{r}} &= \vec{F}_{12} \sim \vec{r} \end{aligned} \right\} \hat{=} \left\{ \begin{array}{l} \text{kräftefreie Bewegung des Schwerpunktes} \\ \text{Bewegung einer Masse } \mu \text{ im Zentralfeld } \vec{F}_{12} \end{array} \right.$$

Da die erste Gleichung trivial (\odot) gelöst wird, spricht man hier auch vom „**effektiven Einkörperproblem**“.

Im Zweiteilchensystem gelten folgende **nützliche Zerlegungen**:

Impuls:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 = (m_1 + m_2) \dot{\vec{R}} + m_1 \frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}} - m_2 \frac{m_1}{M} \dot{\vec{r}} = M \dot{\vec{R}} \\ \vec{p}_1 &= m_1 \dot{\vec{r}}_1 = m_1 \dot{\vec{R}} + \frac{m_1 m_2}{M} \dot{\vec{r}} = m_1 \dot{\vec{R}} + \mu \dot{\vec{r}} \\ \vec{p}_2 &= m_2 \dot{\vec{r}}_2 = m_2 \dot{\vec{R}} - \mu \dot{\vec{r}} \end{aligned}$$

kinetische Energie:

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2}{M} \right)^2 \dot{\vec{r}}^2 + \frac{1}{2} m_1 2 \frac{m_2}{M} \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} \\ &\quad + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{M} \right)^2 \dot{\vec{r}}^2 - \frac{1}{2} m_2 2 \frac{m_1}{M} \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{M^2} \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 \end{aligned}$$

Bemerkung: Es treten keine Mischterme $\dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}}$ auf, was diese Koordinatenwahl vorteilhaft macht.

Potential:

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{i=1}^2 V_{ext,i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 V_{ij}(r) = V_{ext,1} + V_{ext,2} + V_{12}(r)$$

$V_{11} = V_{22} = 0; V_{21} = V_{12}$

Gesamtenergie:

$$E = T + V = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + \underbrace{V_{ext,1}(\vec{R}, \vec{r}) + V_{ext,2}(\vec{R}, \vec{r}) + V_{12}(r)}_{=0, \text{ wenn System abgeschlossen}}$$

Drehimpuls:

$$\vec{L} = M(\vec{R} \times \dot{\vec{R}}) + \sum_{i=1}^2 m_i (\vec{s}_i \times \dot{\vec{s}}_i) = M(\vec{R} \times \dot{\vec{R}}) + m_1 \left(\frac{m_2}{M} \right)^2 \vec{r} \times \dot{\vec{r}} + m_2 \left(\frac{m_1}{M} \right)^2 \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = M \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

Bemerkung: Es lassen sich also alle wesentliche „Systemgrößen“ in einen **Schwerpunktanteil** ($\vec{R}, \dot{\vec{R}}$) und einen **Relativbewegungsanteil** ($\vec{r}, \dot{\vec{r}}$) separieren (in einem abgeschlossenen Zweiteilchensystem ist diese Separation vollständig).

3.4 Planetenbewegung als Zweikörperproblem

Sei $\vec{r}_1 = \vec{r}_p$ der Ortsvektor eines Planeten mit Masse m_p
 $\vec{r}_2 = \vec{r}_s$ der Ortsvektor der Sonne mit Masse m_s
 und $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_p - \vec{r}_s$ dann gilt:

$V_{ext,i} = 0$ (abgeschlossenes System!)

$$V_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V_{12}(\vec{r}) = -G \frac{m_s m_p}{r} = -G \frac{M \mu}{r}; \quad \mu = \frac{m_s m_p}{m_s + m_p}; \quad M = m_s + m_p$$

$$E = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - G \frac{M \mu}{r} = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{L_R^2}{2MR^2} + \frac{1}{2} M \dot{r}^2 + \frac{L_r^2}{2\mu r^2} - G \frac{M \mu}{r}$$

$vgl. 2.7 \text{ und } 3.3 \text{ mit } \vec{L} = \vec{L}_R + \vec{L}_r = M(\vec{R} \times \dot{\vec{R}}) + \mu(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$

Im **Schwerpunktsystem** mit $\dot{\vec{R}} = \vec{0}, \dot{R} = 0$ gilt also

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{L_r}{2\mu r^2} - G \frac{M \mu}{r}$$

Nach 2.7 entspricht das gerade der Bewegung einer Masse μ im gravitativen Zentralfeld der (ruhenden) Masse M . Also:

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + e \cos \phi} \quad (\text{hier } e < 1 \hat{=} \text{Ellipsenbahn})$$

Damit folgt:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{r}_1 = \vec{r}_p = \vec{R} + \frac{m_s}{M} \vec{r} \stackrel{\substack{\text{Wahl } \vec{R} = \vec{0} \\ \perp \\ \frac{m_s}{M} \vec{r}}}}{=} \frac{m_s}{M} \vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_s = \vec{R} - \frac{m_p}{M} \vec{r} \stackrel{\substack{\text{Wahl } \vec{R} = \vec{0} \\ \perp \\ -\frac{m_p}{M} \vec{r}}}}{=} -\frac{m_p}{M} \vec{r} \end{array} \right\} \hat{=} \text{Planet **und** Sonne bewegen sich also auf Ellipsen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt.}$$

Veranschaulichung:

$$\vec{r}_s = -\frac{m_p}{\mu} \frac{\mu}{m_s} \vec{r}_p = -\frac{m_p}{m_s} \vec{r}_p$$

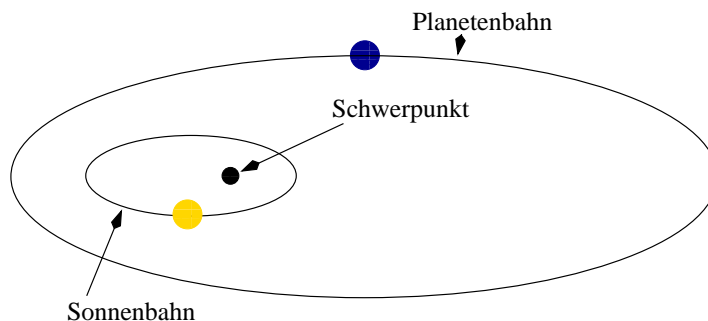


Abbildung 3.3: Planetenbewegung als Zweikörperproblem

Bemerkung: Wegen $m_s \gg m_p$ gilt natürlich in sehr guter Näherung $\vec{r}_p \approx \vec{r}$; $\vec{r}_s \approx 0$ und damit der in 2.7 betrachtete Fall der Keplerbewegung.

4 Lagrange-Mechanik

Neben der bisher behandelten Newton'schen Beschreibung der klassischen Mechanik gibt es noch weitere (vgl. Schema Ende Kapitel 1.1). Von den beiden Alternativen, der **Lagrange-** und der **Hamilton-Mechanik**, behandeln wir hier das Wesentliche der ersten. Basierend auf den bisherigen Verlauf der Vorlesung kann die Lagrange'sche Formulierung der Mechanik wie folgt motiviert werden:

Wir haben gesehen, dass zur Beschreibung eines physikalischen Systems die vektorielle dynamische Grundgleichung $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ mitunter durch eine (oder mehrere entkoppelte) skalare Gleichung(en) ersetzt werden kann, siehe die Beispiele in 2.4, 2.5 und 2.7. Man kann also fragen, ob sich die dynamische Grundgleichung direkt in eine (oder mehrere) skalare Gleichungen überführen lässt.

Bemerkung: Die folgende Herleitung der Lagrange-Gleichungen 2. Art vermeidet die Formulierung der Lagrange-Gleichungen 1. Art, die Verwendung des sog. d'Alembert'schen Prinzip und damit den Begriff der Zwangskraft und (weitestgehend) der Zwangsbedingung. Diese werden im Rahmen der Hauptvorlesung zur Theoretischen Mechanik behandelt. Hier geht es lediglich um die Vorstellung einer „höheren“ Methode der analytischen Mechanik, die zur Newton'schen Formulierung alternative Lösungen in oft eleganter Weise ermöglicht.

4.1 Generalisierte Koordinaten und Geschwindigkeiten

... formalisieren den ersten Schritt zur Lagrange-Formulierung. Daher machen wir folgende

Definition: Wenn die Gesamtheit irgendwelcher skalarer Größen q_1, q_2, \dots, q_s die momentane Lage eines Systems mit s Freiheitsgraden in einem n -dimensionalen Konfigurationsraum eindeutig bestimmt, so nennt man sie **generalisierte** oder **verallgemeinerte Koordinaten** und ihre Ableitungen $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$ **generalisierte** oder **verallgemeinerte Geschwindigkeiten**.

Bemerkung: Im Allgemeinen hat ein Teilchen im n -dimensionalen Konfigurationsraum n Freiheitsgrade; ein System aus N Teilchen hat dann nN Freiheitsgrade. Gibt es $0 \leq k \leq nN$ „Zwangsbedingungen“, die die Bewegung(en) des Systems einschränken, reduziert sich die Zahl der Freiheitsgrade auf $nN - k$.

Beispiel: Ebenes Pendel: Die Bewegung ist zunächst auf eine Ebene eingeschränkt, so dass statt sphärischer *ebene* Polarkoordinaten benutzt werden. Im Falle des mathematischen Pendels mit masselosem Pendelarm konstanter Länge erfolgt die Bewegung der Pendelmasse entlang eines Kreises, so dass das System nur einen Freiheitsgrad hat. Also:

$n = 3, (r, \vartheta, \varphi)$ -Koordinaten

$s = 1$: betrachte nur φ als Koordinate, da $r, \vartheta = \text{const.}$

Bemerkung: Generalisierte Koordinaten müssen weder die Dimension einer Länge haben noch geometrisch interpretierbar sein. Damit sind auch die zugehörigen Geschwindigkeiten verallgemeinert. So gilt im Falle des ebenen, mathematischen Pendels z.B.:

generalisierte Koordinate $\varphi \Rightarrow$ generalisierte Geschwindigkeit $\dot{\varphi}$ und kinetische Energie: $T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2$

$$\boxed{\dot{r} = 0}$$

4.2 Die Lagrange-Gleichungen 2. Art

Die Ausgangsfrage ist also: Wie gelingt die Herleitung von $s \leq nN$ skalaren Gleichungen aus den $3N$ dynamischen Grundgleichungen $m \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i$; $i = 1, \dots, N$? Der Einfachheit halber betrachten wir den Fall $N = 1$, also ein Einteilchensystem. Sei q_k eine der s unabhängigen verallgemeinerten Koordinaten, dann gilt (mit $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$):

$$\begin{aligned} m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} & \quad \Big| \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \\ \Rightarrow m \ddot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left\{ m \dot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \right\} - m \dot{\vec{r}} \cdot \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \right\} = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \quad (\star) \end{aligned}$$

Da gilt:

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, \dots, q_s, t) \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \sum_{l=1}^s \left\{ \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_l} \dot{q}_l \right\} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}$$

sowie:

q_l und \dot{q}_l werden als unabhängige Größen aufgefasst!

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \right\} = \sum_{l=1}^s \left\{ \underbrace{\frac{\partial}{\partial q_l} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \right)}_{= \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_l} \right)} \cdot \dot{q}_l \right\} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \right)}_{= \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right)} = \frac{\partial}{\partial q_k} \left[\sum_{l=1}^s \left\{ \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_l} \cdot \dot{q}_l \right\} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right] = \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial q_k}$$

folgt aus (\star) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ m \dot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \right\} - m \dot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial q_k} &= -\frac{\partial V}{\partial q_k} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} m \frac{\partial \dot{\vec{r}}^2}{\partial \dot{q}_k} \right\} - \frac{m}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}^2}{\partial q_k} &= -\frac{\partial V}{\partial q_k} \end{aligned}$$

Wegen $T = \frac{1}{2} m \cdot \dot{\vec{r}}^2$ findet man:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

und wenn $V \neq V(\dot{q}_k)$ gilt, schließlich:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}}_{\text{„geschickte Null“}} - \left(\frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial(T-V)}{\partial q_k} &= 0 \end{aligned}$$

Mit der Definition der **Lagrange-Funktion** $L := T - V$ folgen die

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0} \quad \text{Lagrange-Gleichungen 2. Art für konservative Kräfte}$$

Bemerkung: Im Unterschied zur vektoriellen Newton'schen Bewegungsgleichung (mit i.A. $n = 3$ Komponentengleichungen) handelt es sich bei den Lagrange-Gleichungen 2. Art um ein System von $s = n - k$ Gleichungen, in denen die die Freiheitsgrade einschränkende Zwangskräfte bereits implizit berücksichtigt sind.

Bemerkung: Zur Formulierung der Lagrange-Gleichungen 2. Art ist die Kenntnis der Kräfte nicht explizit erforderlich, sondern lediglich die des Potentials.

Bemerkung: Die Lagrange-Funktionen L und $L_1 = \lambda L, \lambda \in \mathbb{R}$ und $L_2 = L + \frac{dF(q_1, q_2, \dots, q_s, t)}{dt}$ liefern dieselben Bewegungsgleichungen. L_1 ist trivial; für L_2 gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L_2}{\partial q_k} &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{dF}{dt} \right) \right\} - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{dF}{dt} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left\{ \sum_{l=1}^s \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} \dot{q}_l \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \right\} - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{dF}{dt} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{dF}{dt} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} \end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt, weil:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \right) &= \sum_l \left(\frac{\partial^2 F}{\partial q_l \partial q_k} \right) \dot{q}_l + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_k} \\ \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{dF}{dt} \right) &= \sum_l \left(\frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial q_l} \right) \dot{q}_l + \frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial t} \end{aligned}$$

für zweimal stetig differenzierbare $F(q_1, \dots, q_s, t)$.

4.3 Anwendungsbeispiele

... zur Illustration der Methode:

4.3.1 Das freie Teilchen (s=3)

Koordinatenwahl: $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2); \quad V = \text{const.} \stackrel{\text{O.B.d.A.}}{=} 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = m \ddot{x}; \quad \frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow m \ddot{x} = 0$$

$$\text{Für die anderen Komponenten analog} \Rightarrow \boxed{m \ddot{\vec{r}} = 0}$$

4.3.2 Der schiefe Wurf (s=3)

Koordinatenwahl: $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2); \quad V = m g z$$

$$\Rightarrow \text{„freies Teilchen“ in Bezug auf } x\text{- und } y\text{-Koordinate: } m \ddot{x} = m \ddot{y} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{z}} \left\{ \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - m g z \right\} \right) = m \ddot{z}; \quad \frac{\partial L}{\partial q_3} = \frac{\partial L}{\partial z} = -m g$$

$$\text{Also: } m \ddot{z} + m g = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{z} = -g}$$

4.3.3 Atwood'sche Fallmaschine (s=1)

Koordinatenwahl: $q_1 = z_1 = z$, $z_1 + z_2 + \pi R = l$

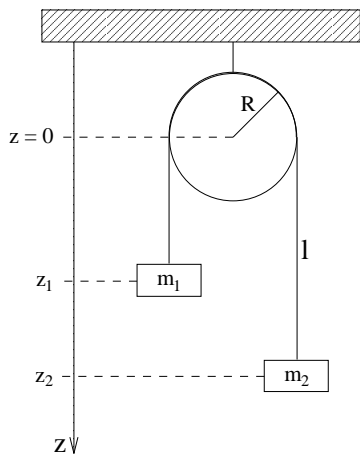


Abb. 4.1: Fallmaschine

$$\Rightarrow z_2 = l - \pi R - z \Rightarrow \dot{z}_1 = \dot{z}; \quad \dot{z}_2 = -\dot{z}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{z}_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{z}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{z}^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{z}^2$$

$$V = -m_1 g z_1 - m_2 g z_2 = -m_1 g z - m_2 g (l - \pi R - z)$$

$$\Rightarrow L = T - V = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{z}^2 + m_1 g z + m_2 g (l - \pi R - z)$$

$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{z}^2 + (m_1 - m_2) g z + m_2 g (l - \pi R)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = (m_1 + m_2) \dot{z} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = (m_1 + m_2) \ddot{z}; \quad \frac{\partial L}{\partial z} = (m_1 - m_2) g$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow (m_1 + m_2) \ddot{z} - (m_1 - m_2) g = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{z} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$\Rightarrow z(t) = z_0 + v_{0z}(t - t_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) g (t - t_0)^2$$

4.4 Erhaltungssätze und Symmetrien

In der Newton'schen Mechanik haben wir den Impuls-, Energie- und Drehimpulserhaltungssatz kennen und schätzen gelernt. Diese Sätze können natürlich auch im Rahmen der Lagrange-Mechanik hergeleitet werden. Sie bietet aber darüber hinaus einen tieferen Einblick in die Begründung für die Existenz von Erhaltungsgrößen. Betrachten wir zunächst die

4.4.1 Anzahl der Erhaltungsgrößen

Seien q_1, q_2, \dots, q_s die generalisierten Koordinaten, die zusammen mit den generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$ den Zustand eines Systems zum Zeitpunkt t bestimmen. Die Integration der Lagrange-Gleichungen 2. Art erfordert $2s$ Anfangswerte, also $2s$ freie Konstanten, die (geschrieben als Funkt. der q_l und \dot{q}_l) die Erhaltungsgrößen bzw. Bewegungsintegrale sind.

In einem **abgeschlossenen System**, für das die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt, kann eine der $2s$ Konstanten als der (beliebige) Zeitnullpunkt gewählt werden, so dass $2s - 1$ Konstanten, also $2s - 1$ **unabhängige Erhaltungsgrößen** existieren.

Beispiele:	Freies Teilchen	Zweikörperproblem (Kepler)
Freiheitsgrade:	$s = 3$	$s = 6$
unabh. Erhaltungsgrößen:	$2 \cdot 3 - 1 = 5$	$2 \cdot 6 - 1 = 11$
Energieerhaltung:	1	1
Impulserhaltung:	3	3 (Schwerpunkt)
Drehimpulserhaltung:	3	3
Lenz-Runge-Vektor:	-	3
Summe:	7	10

⇒ nicht alle Erhaltungsgrößen sind unabhängig oder gleich bedeutsam!

4.4.2 Zyklische Koordinaten

Der einfachste Fall zu einer Erhaltungsgröße zu gelangen liegt vor, wenn $\frac{\partial L}{\partial q_m} = 0$, denn dann gilt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$p_m = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} = \text{const.}$$

Generalisierter oder **verallgemeinerter** oder **kanonischer** oder **konjugierter Impuls**

q_m ist dann eine **zyklische Koordinate**.

Bemerkung: Man wählt also am geschicktesten die verallgemeinerten Koordinaten so, dass möglichst viele zyklisch sind.

Beispiel: **Zweikörperproblem:**

$$1. \text{ Wahl: } (q_1, q_2, q_3) = (x_1, y_1, z_1); \quad (q_4, q_5, q_6) = (x_2, y_2, z_2)$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2)$$

$$V = -\frac{Gm_1 m_2}{r}; \quad r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

$$\Rightarrow L = T - V \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial q_l} \neq 0 \quad \text{für alle } l$$

\Rightarrow **keine zyklischen Koordinaten**

$$2. \text{ Wahl: } (q_1, q_2, q_3) = (R_x, R_y, R_z) \quad ; \quad (q_4, q_5, q_6) = (r, \vartheta, \varphi)$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} M (\dot{R}_x^2 + \dot{R}_y^2 + \dot{R}_z^2) + \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)$$

$$V = -\frac{GM\mu}{r}$$

$$\Rightarrow L = T - V \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial R_x} = \frac{\partial L}{\partial R_y} = \frac{\partial L}{\partial R_z} = 0$$

$$\Rightarrow M \ddot{R}_x = M \ddot{R}_y = M \ddot{R}_z = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{P} = const.} \hat{=} \text{ kräftefreie Bewegung des Schwerpunktes}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt} (\mu r^2 \dot{\varphi}) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu r^2 \dot{\varphi} = const} \hat{=} \text{ (Relativ-)Drehimpulserhaltung}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = 0$$

da aber bereits $\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = 0$ ergibt sich keine weitere Erhaltungsgröße

\Rightarrow Insgesamt erhält man also:

5 zyklische Koordinaten und 4 Erhaltungsgrößen

Neben dem zu einer zyklischen Koordinate gehörenden (erhaltenen) generalisierten Impuls lassen sich in der Lagrange-Mechanik natürlich auch die „üblichen“ Erhaltungssätze für Energie, Impuls und Drehimpuls formulieren. Mehr noch: die Lagrange-Beschreibung erlaubt einen einfachen Weg einen tiefer liegenden Zusammenhang zwischen Erhaltungsgrößen und Symmetrien zu erkennen. So sind die „Haupt-“Erhaltungssätze mit der Homogenität und Isotropie von Raum und Zeit verknüpft. Um das einzusehen betrachten wir zunächst die

4.4.3 Energieerhaltung

Die **Homogenität der Zeit** führt auf die **Energieerhaltung**: Wenn die Lagrange-Funktion eines abgeschlossenen Systems invariant unter zeitlichen Translationen $t' = t + \alpha$ ist, folgt:

$$L = L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) = L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t + \alpha) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = \sum_l \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial q_l} \right) \dot{q}_l + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \ddot{q}_l \right\} = \sum_l \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \dot{q}_l + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \ddot{q}_l \right\} = \frac{d}{dt} \sum_l \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \dot{q}_l$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\underbrace{\sum_l \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \dot{q}_l \right\}}_{=: H \hat{=} \text{Hamiltonfunktion}} - L \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dH}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad H = const.$$

In konservativen Systemen mit $V = V(q_1, \dots, q_s)$ gilt

$$L = T(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s) - V(q_1, \dots, q_s)$$

$$\Rightarrow H = \sum_l \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \dot{q}_l \right\} - L = \sum_l \left\{ \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \right) \dot{q}_l \right\} - (T - V) = 2T - T + V = T + V = E$$

T ist homogen, quadratisch in \dot{q}_l , d.h.:
 $T(a\dot{q}_1, \dots, a\dot{q}_s) = a^2 \cdot T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s)$
 $\Rightarrow \sum_l \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \right) \dot{q}_l = 2T$

Damit lässt sich also die Hamilton-Funktion eines abgeschlossenen Systems als die Gesamtenergie $E = T + V$ interpretieren und es gilt die Energieerhaltung.

Bemerkung: Die Hamilton-Funktion ist nicht immer gleich der Gesamtenergie und nicht immer eine Erhaltungsgröße.

4.4.4 Impulserhaltung

Wählt man für die generalisierten Koordinaten eines abgeschlossenen Systems die Ortsvektoren, dann können die Lagrange-Gleichungen 2. Art geschrieben werden als

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0$$

Zur Untersuchung der Folgerung aus der **Homogenität des Raumes** betrachten wir eine räumliche Translation $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{\epsilon}$, mit der gilt:

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta \vec{r}_i \stackrel{\substack{\delta \vec{r}_i = \vec{\epsilon} \hat{=} \\ \text{Translation!}}}{=} \vec{\epsilon} \cdot \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0$$

$$\stackrel{\substack{\text{s.o.} \\ \Rightarrow}}{\Rightarrow} \sum_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = 0 \Rightarrow \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = \text{const.}$$

Das ist aber gerade der Gesamtimpuls $\vec{P} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}$ des Systems.

Bemerkung: Aus der Additivität der Lagrange-Funktion (die besagt, dass die Lagrange-Funktion eines Systems, welches aus zwei abgeschlossenen nicht miteinander wechselwirkenden Teilsystemen A und B besteht, durch die Summe der Lagrange-Funktionen $L = L_A + L_B$ der Teilsysteme gegeben ist) folgt die Additivität von Energie und Impuls.

Bemerkung: Auch der Drehimpulserhaltungssatz lässt sich mit einer Symmetrie verknüpfen, nämlich der Isotropie des Raumes. Das heißt die Lagrange-Funktion ist invariant gegenüber (infinitesimalen) Drehungen.

4.5 Das Hamilton-Prinzip

Bisher haben wir „differentielle“ Formulierungen der Mechanik behandelt. Die Mechanik kann aber auch „integral“ formuliert werden, was in der Vorlesung **Theoretische Mechanik** vertieft wird. Hier sei daher das grundlegende Integralprinzip der Mechanik erwähnt, nämlich das **Hamilton-Prinzip**:

Die Bewegung eines mechanischen Systems erfolgt in der Zeitspanne zwischen t_1 und t_2 so, dass das (Linien-)Integral

$$W = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) dt$$

stationär ist, also $\delta W = 0$ gilt.

Bemerkung: Aus der Mathematik ist bekannt, dass die Bedingung $\delta W = 0$ auf die Bedingungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

für den Integranden führt, also auf die Lagrange-Gleichungen 2. Art.

Bemerkung: Das Hamilton-Prinzip ist unabhängig von dem Koordinatensystem, in dem die Lagrange-Funktion L formuliert ist.

Bemerkung: Da die Dimension der Lagrange-Funktion $L = T - V$ die einer Energie ist, hat W die Dimension $[W] = \text{Energie} \times \text{Zeit} = \mathbf{Wirkung}$.

Bemerkung: Da die Bewegung eines Systems oft (meistens?) so abläuft, dass W minimiert wird, spricht man auch vom **Prinzip der kleinsten Wirkung**. (ursprünglich von Pierre Louis Moreau de Maupertius im Jahre 1744 formuliert)

Bemerkung: Das Hamilton-Prinzip enthält keine neue bzw. weitergehende Physik. Es ist aber formal wichtig, z.B. für die Aufstellung der Quantenmechanik (Stichwort: Schrödinger-Gleichung!). Auch die Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik können aus einem Integralprinzip hergeleitet werden.

Anwendungsbeispiel: Ableitung des Fallgesetzes aus dem Hamilton-Prinzip

Ein anfänglich ($t_0 = 0$) ruhender Körper falle aus einer Höhe $h(0) = 20m$ und erreiche den Erdboden nach $t_1 = 2s$.

Alle Fallgesetze der Form

$$h(t) = h(0) - 2^{(1-n)} g t^n ; \quad g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^n} ; \quad n \in \mathbb{N}$$

sind mit dem Messergebnis verträglich. Welches ist das richtige Fallgesetz?

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 h &= h(0) - 2^{(1-n)} g t^n \Rightarrow \dot{h} = -2^{(1-n)} n g t^{(n-1)} \\
 \Rightarrow L = T - V &= \frac{1}{2} m \dot{h}^2 - m g h = \frac{1}{2} m 2^{2-2n} n^2 g^2 t^{2n-2} - m g \{h(0) - 2^{1-n} g t^n\} \\
 &= m g^2 \left\{ 2^{1-2n} n^2 t^{2n-2} - \frac{m}{g} h(0) + 2^{1-n} t^n \right\}
 \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
 W(n) &= \int_0^2 L(t) dt = m g^2 \int_0^2 \left(2^{1-2n} n^2 t^{2n-2} - \frac{m}{g} h(0) + 2^{1-n} t^n \right) dt \\
 &= m g^2 \left\{ 2^{1-2n} \left(\frac{n^2}{2n-1} \right) 2^{2n-1} - 2 \frac{m}{g} h(0) + 2^{1-n} \frac{1}{n+1} 2^{n+1} \right\} \\
 &= m g^2 \left\{ \frac{n^2}{2n-1} - 2 \frac{m}{g} h(0) + \frac{4}{n+1} \right\} \\
 \Rightarrow \frac{dW}{dn} &= m g^2 \left\{ \frac{2n(2n-1) - 2n^2}{(2n-1)^2} - \frac{4}{(n+1)^2} \right\} \stackrel{!}{=} 0 \\
 \Rightarrow &= (2n^2 - 2n)(n+1)^2 - 4(2n-1)^2 = 0 \Leftrightarrow n^4 + n^3 - 9n^2 + 7n - 2 = 0
 \end{aligned}$$

Lösungen sind Faktoren des konstanten Terms. Wenn ganzzahlig, dann $n \in \{\pm 1, \pm 2\}$.

Test durch Einsetzen bzw. Polynomdivision:

$$(n^4 + n^3 - 9n^2 + 7n - 2) : (n - 2) = n^3 + 3n^2 - 3n + 1$$

Also $\mathbf{n = 2}$ extremiert $W(n)$!

5 Der starre Körper

Bisher: Bewegung von einzelnen (unter Umständen miteinander wechselwirkenden) punktförmigen Körpern (Teilchen, Massenpunkte) ohne Ausdehnung

Jetzt: Beschreibung ausgedehnter Körper

Unter allen denkbaren ausgedehnten Körpern nimmt die Klasse der starren Körper eine besondere Stellung ein, da sie häufig sind und vergleichsweise einfach behandelbar bleiben. Daher zunächst folgende

Definition: Ein starrer Körper ist ein System aus N Massenpunkten, die feste Abstände zueinander haben, d.h. es gilt: $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = c_{ij} = \text{const.}$; $i, j \in \{1, \dots, N\}$

Bemerkung: Ausgedehnte Körper mit beweglichen Teilchen sind also keine starren Körper (Auto, Koffer ...)

Bemerkung: Das Konzept des starren Körpers ist eine Idealisierung (Atomkerne z.B. ruhen nicht), die aber in sehr vielen Fällen keine wesentlichen Einschränkung für die Beschreibung makroskopischer Körper nach sich zieht.

Um die einfache Behandelbarkeit eines starren Körpers einzusehen betrachten wir die

5.1 Freiheitsgrade und Bewegung eines starren Körpers

Die Lage eines starren Körpers ist durch die Ortsvektoren $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ von drei körperfesten Punkten, die nicht auf einer Geraden liegen, eindeutig bestimmt, da dann die Ortsvektoren aller anderen Punkte des Körpers über die Abstandsbedingungen (siehe obige Def.) festgelegt sind. Die Zahl der Freiheitsgrade ergibt sich dann wie folgt: die verbleibenden $3 \cdot 3$ Freiheitsgrade der drei ausgewählten Punkte reduzieren sich um weiterer drei wegen deren Abständen zueinander:

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = c_{12}; \quad |\vec{r}_2 - \vec{r}_3| = c_{23}; \quad |\vec{r}_3 - \vec{r}_1| = c_{31}; \quad c_{12}, c_{23}, c_{31} = \text{const.}$$

Also hat ein starrer Körper **sechs Freiheitsgrade**, die einer **Translations-** und einer **Rotationsbewegung** zugeordnet werden können (Theorem von Chasles). Zur Beschreibung der Rotationsbewegung benötigen wir den Begriff der **Winkelgeschwindigkeit**: betrachten wir die Rotationsbewegung eines einzelnen Punktes:

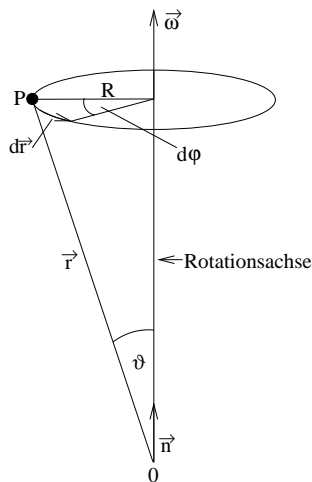


Abbildung 5.1: Schwerpunktsystem

Es gilt:

$$\left. \begin{array}{l} d\vec{r} \perp \vec{r} \\ d\vec{r} \perp \vec{n} \\ \sin \vartheta = R/r \\ |d\vec{r}| = R d\varphi \stackrel{!}{=} r \sin \vartheta d\varphi \end{array} \right\} d\vec{r} = \vec{n} \times \vec{r} d\varphi$$

Für die **Rotationsgeschwindigkeit** gilt demnach:

$$\vec{v}_{rot} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (\vec{n} \times \vec{r}) \frac{d\varphi}{dt} =: (\vec{n} \times \vec{r}) \omega = \omega \vec{n} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \boxed{\vec{\omega} = \omega \vec{n}}$$

Damit gilt allgemein (im nichtrotierenden System):

$$\vec{v} = \vec{v}_{tra} + \vec{v}_{rot} = \vec{v}_{tra} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

- \vec{v} : Geschwindigkeit im Inertialsystem
- \vec{v}_{tra} : Translationsgeschwindigkeit
- \vec{v}_{rot} : Rotationsgeschwindigkeit

Daraus folgt (bei gleichem Ursprung von rotierendem und inertialen System):

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_{\Sigma} \vec{r} = \left(\frac{d}{dt} \right)_{\Sigma'} \vec{r} + \omega \times \vec{r} \quad \xrightarrow[\text{schreibweise}]{\text{Operator-}} \left(\frac{d}{dt} \right)_{\Sigma} = \left(\frac{d}{dt} \right)_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times (\dots)$$

5.2 Kinetische Energie und Trägheitstensor eines starren Körpers

5.2.1 Kinetische Energie

In einem Inertialsystem gilt:

$$\begin{aligned} \vec{v}_i &= \vec{v}_{tra} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i \\ T &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{tra} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{tra}^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 + \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_{tra} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \end{aligned}$$

Mit:

$$M = \sum_{i=1}^N m_i; \quad \vec{v}_{tra} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \stackrel{\text{Spatprodukt}}{=} (\vec{v}_{tra} \times \vec{\omega}) \cdot \vec{r}_i; \quad \vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \quad (\text{Schwerpunkt})$$

folgt:

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} M \vec{v}_{tra}^2}_{\text{Translationsenergie } T_T} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2}_{\text{Rotationsenergie } T_R} + \underbrace{(\vec{v}_{tra} \times \vec{\omega}) \cdot M \vec{R}}_{\text{„wechselseitige“ Energie } T_W, \text{ bestimmt durch Translation } (\vec{v}_{tra}) \text{ und Rotation } (\vec{\omega})}$$

Im **Schwerpunktsystem** ($\vec{R} = 0$) gilt dann:

$$T = T_T + T_R = \frac{1}{2} M \vec{v}_{tra}^2 + \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 \quad \text{kinetische Energie des starren Körpers}$$

Bemerkung: Wird ein starrer Körper in mindestens einem Punkt festgehalten, so reduziert sich seine kinetische Energie auf die Rotationsenergie (Euler Theorem).

5.2.2 Trägheitstensor

Die Rotationsenergie lässt sich schreiben als:

$$\begin{aligned} & \left(\vec{a} \times \vec{b} \right)^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \\ T_R &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 \stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left[\vec{\omega}^2 r_i^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left[\left(\sum_{k=1}^3 \omega_k \omega_k \right) \left(\sum_{m=1}^3 r_{im} r_{im} \right) - \left(\sum_{k=1}^3 \omega_k r_{ik} \right)^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left[\sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 (\omega_k \omega_l r_{im} r_{im} \delta_{kl}) - \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 (\omega_k r_{ik} \omega_l r_{il}) \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left\{ \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left[\sum_{m=1}^3 (r_{im} r_{im} \delta_{kl}) - r_{ik} r_{il} \right] \omega_k \omega_l \right\} \\ &= \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^N m_i \left[\sum_{m=1}^3 (r_{im} r_{im} \delta_{kl}) - r_{ik} r_{il} \right] \right\} \omega_k \omega_l \\ & \quad \quad \quad =: \mathbf{I}_{kl} \hat{=} \text{Trägheitstensor} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 I_{kl} \omega_k \omega_l \stackrel{\text{Summenkonvention}}{=} \frac{1}{2} I_{kl} \omega_k \omega_l \end{aligned}$$

Bemerkung: „i“ ist der Teilchenindex nicht der Komponentenindex.

Bemerkung: Beachte, dass hier ω_k, ω_l die Komponenten von $\vec{\omega}$ in einem körperfesten KS sind.

Der (diskrete) **Trägheitstensor** lautet explizit:

$$\begin{aligned} \overset{\leftrightarrow}{I} &= \sum_{i=1}^N m_i \begin{pmatrix} (r_{i2}^2 + r_{i3}^2) & (-r_{i1} r_{i2}) & (-r_{i1} r_{i3}) \\ (-r_{i2} r_{i1}) & (r_{i1}^2 + r_{i3}^2) & (-r_{i2} r_{i3}) \\ (-r_{i3} r_{i1}) & (-r_{i3} r_{i2}) & (r_{i1}^2 + r_{i2}^2) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \begin{pmatrix} r_{iy}^2 + r_{iz}^2 & -r_{ix} r_{iy} & -r_{ix} r_{iz} \\ -r_{iy} r_{ix} & r_{ix}^2 + r_{iz}^2 & -r_{iy} r_{iz} \\ -r_{iz} r_{ix} & -r_{iz} r_{iy} & r_{ix}^2 + r_{iy}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Definition: Die Diagonalelemente des Trägheitstensors heißen **Trägheitsmomente**, die Nichtdiagonalelemente **Deviationsmomente**

In der Praxis besteht ein starrer Körper aus sehr(!) vielen Massenpunkten, und es ist daher zweckmäßig von einer diskreten auf eine kontinuierliche Darstellung überzugehen d.h. von einer Summation über die einzelnen Massenpunkte auf eine Integration über das Volumen V des starren Körpers:

$$\begin{aligned} I_{kl} &= \sum_{i=1}^N m_i \left[\underbrace{\left(\sum_{m=1}^3 r_{im} r_{im} \right)}_{=\vec{r}_i^2} \delta_{kl} - r_{ik} r_{il} \right] \\ &= \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i^2 \delta_{kl} - r_{ik} r_{il}) \end{aligned}$$

Der Übergang zur kontinuierlichen Darstellung gelingt mit der Einführung der Massendichte $\rho(\vec{r})$ mit $M = \int \rho(\vec{r}) dV$ als (Gesamt-) Masse des starren Körpers:

$$\begin{aligned} I_{kl} &= \int_V \rho(\vec{r}) (\vec{r}^2 \delta_{kl} - r_k r_l) dV \\ &= \int_V \rho(x_1, x_2, x_3) \left(\sum_{m=1}^3 x_m x_m \delta_{kl} - x_k x_l \right) dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned}$$

z.B. kartesische Koordinaten

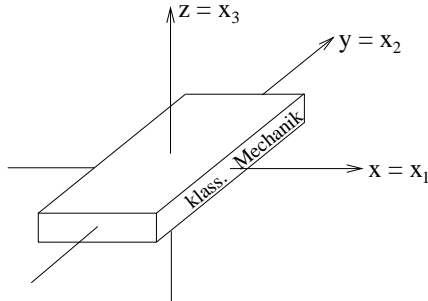
Bemerkung: Im (oft vorliegenden) Fall einer konstanten Massendichte gilt natürlich:

$$I_{kl} = \bar{\rho} \int_V (\vec{r}^2 \delta_{kl} - r_k r_l) dV ; \quad \bar{\rho} = \frac{M}{V}$$

Bemerkung: Wie die Bezeichnung „Trägheitstensor“ andeutet, beschreibt der Tensor die Trägheit eines starren Körpers bei seiner Bewegung. Damit kommt $\overset{\leftrightarrow}{I}$ diejenige Rolle zu, die die Masse bei der Beschreibung der Bewegung einer Punktmasse hat. Offensichtlich ist der Trägheitstensor durch die Massenverteilung in einem starren Körper bestimmt.

Anwendungsbeispiele:**(A) Bewegung eines geworfenen Buches (Steins, Pakets):**

Translationsbewegung ($\hat{=}$ Wurfparabel) und Rotationsbewegung. Letztere ist durch den Trägheitstensor bestimmt. In Bezug auf den Schwerpunkt gilt mit $\rho = \text{const.}$:



$$\begin{aligned}
 I_{kl} &= \rho \int_V \left(\sum_{m=1}^3 x_m^2 \delta_{kl} - x_k x_l \right) dV \\
 &= \rho \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \left(\sum_{m=1}^3 x_m^2 \delta_{kl} - x_k x_l \right) dx_1 dx_2 dx_3
 \end{aligned}$$

Abb. 5.2: Buchschwerpunkt

Trägheitsmomente:

$$\begin{aligned}
 I_{11} = I_{xx} &= \rho \iiint \left[(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \delta_{11} - x_1 x_1 \right] dx_1 dx_2 dx_3 \\
 &= \rho \iiint (x_2^2 + x_3^2) dx_1 dx_2 dx_3 = \rho \iiint (y^2 + z^2) dx dy dz \\
 &= \rho \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} (y^2 + z^2) dy dz = \rho a \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} \left[\frac{1}{3} y^3 + z^2 y \right]_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dz \\
 &= \rho a \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{b}{2} \right)^3 + z^2 b \right] dz = \rho a \left[\frac{2}{3} \left(\frac{b}{2} \right)^3 c + \frac{2}{3} \left(\frac{c}{2} \right)^3 b \right] \\
 &= \rho a \left[\frac{1}{12} b^3 c + \frac{1}{12} c^3 b \right] = \frac{M}{12} (b^2 + c^2) \\
 &\quad \left(\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{abc} \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{Analog: } I_{22} = I_{yy} = \frac{M}{12} (a^2 + c^2); \quad I_{33} = I_{zz} = \frac{M}{12} (a^2 + b^2)$$

Deviationsmomente:

$$\begin{aligned}
 I_{12} = I_{xy} &= \rho \iiint \left[(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \delta_{12} - x_1 x_2 \right] dx_1 dx_2 dx_3 \\
 &= -\rho \iiint x_1 x_2 dx_1 dx_2 dx_3 = -\rho \iiint x y dx dy dz \\
 &= -\rho c \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dy = -\rho c \int 0 dy = 0
 \end{aligned}$$

Analog verschwinden alle anderen Deviationsmomente.

⇒ Die Achsen eines kantenparallelen Koordinatensystems (hier mit Ursprung im Schwerpunkt des starren Körpers) sind **Hauptträgheitsachsen** (s.u.) des Buches:

$$\vec{I}_s = \frac{M}{12} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

(B) Anders ist die Situation, wenn die Drehung des Buches z.B. um eine Achse durch einen Eckpunkt erfolgt ($\rho = \text{const.}$):

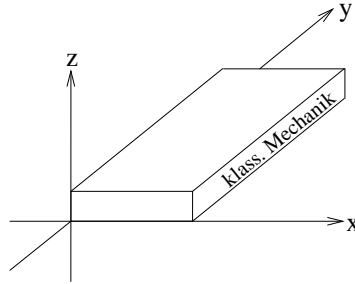


Abbildung 5.3: Eckpunktaufhängung

Trägheitsmomente:

$$\begin{aligned} I_{11} &= \rho \int_0^c \int_0^b \int_0^a (y^2 + z^2) dx dy dz = \rho a \int_0^c \left[\frac{1}{3} b^3 + z^2 b \right] dz \\ &= \rho a \left[\frac{1}{3} b^3 c + \frac{1}{3} b c^3 \right] = \frac{M}{3} (b^2 + c^2) \end{aligned}$$

$\rho = \frac{M}{abc}$

Analog ergibt sich:

$$I_{22} = \frac{M}{3} (a^2 + c^2) ; \quad I_{33} = \frac{M}{3} (a^2 + b^2)$$

Deviationsmomente:

$$I_{12} = -\rho \iiint x y dx dy dz = -\rho c \int_0^b \frac{1}{2} a^2 y dy = -\rho c \frac{1}{2} a^2 \frac{1}{2} b^2 = -\frac{M}{4} a b$$

$\rho = \frac{M}{abc}$

(andere analog)

Insgesamt also:

$$\vec{I}_{Eck} = M \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(b^2 + c^2) & -\frac{1}{4} a b & -\frac{1}{4} a c \\ -\frac{1}{4} a b & \frac{1}{3}(a^2 + c^2) & -\frac{1}{4} b c \\ -\frac{1}{4} a c & -\frac{1}{4} b c & \frac{1}{3}(a^2 + b^2) \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Statt beide Trägheitstensoren direkt zu berechnen kann man auch den **Steiner'schen Satz** ausnutzen, der einen Zusammenhang zwischen Trägheitstensoren eines starren Körpers, die in achsenparallelen Koordinatensystemen berechnet werden, herstellt. Sei \vec{a} ein Verschiebungsvektor mit

$$\tilde{x}_1 = x_1 + a_1 ; \quad \tilde{x}_2 = x_2 + a_2 ; \quad \tilde{x}_3 = x_3 + a_3 ; \quad \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = \text{const.}$$

dann gilt:

$$\overset{\leftrightarrow}{I}_{0+\vec{a}} = \overset{\leftrightarrow}{I}_0 + M \begin{pmatrix} a_2^2 + a_3^2 & -a_1 a_2 & -a_1 a_3 \\ -a_2 a_1 & a_1^2 + a_3^2 & -a_2 a_3 \\ -a_3 a_1 & -a_3 a_2 & a_1^2 + a_2^2 \end{pmatrix}$$

bzw:

$$\left(\overset{\leftrightarrow}{I}_{0+\vec{a}} \right)_{kl} = \left(\overset{\leftrightarrow}{I}_0 \right)_{kl} + M \left(\sum_{m=1}^3 a_m^2 \delta_{kl} - a_k a_l \right)$$

Bemerkung: Der Trägheitstensor ist symmetrisch, d.h. es gilt $I_{kl} = I_{lk}$. Diese Symmetrie impliziert, dass er stets auf Diagonalform gebracht werden kann (im Prinzip durch Einführung eines neuen, gedrehten Koordinatensystems, siehe aber auch den folgenden Abschnitt), also $I'_{kl} = I'_{kl} \delta_{kl}$. Die neuen Koordinatenachsen heißen **Hauptträgheitsachsen** und die Elemente in

$$\overset{\leftrightarrow}{I} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

heißen **Hauptträgheitsmomente**

Um Ordnung in die Fülle der möglichen Bewegungen starrer Körper zu bringen, sind folgende Begriffsbildungen hilfreich:

Definition: Ein rotierender starrer Körper heißt **Kreisel**. Sind zwei Hauptträgheitsmomente gleich (z.B. $I_1 = I_2 \neq I_3$), spricht man von einem **symmetrischen Kreisel** (z.B. Zylinder, Scheibe). Gilt sogar $I_1 = I_2 = I_3$ handelt es sich um einen **Kugelkreisel** (z.B. Würfel, Kugel). Wirken äußere Kräfte liegt ein **schwerer Kreisel** vor, sonst ein **freier Kreisel**.

Zur weiteren Beschreibung eines starren Körpers sind wichtig der ...

5.3 Drehimpuls und Drehimpulssatz

Für einen starren Körper, der nur rotiert, gilt:

$$\vec{L}_E = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \vec{\omega} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i)^2 - \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})$$

In kartesischen Koordinaten hat man

$$\begin{pmatrix} L_{E_x} \\ L_{E_y} \\ L_{E_z} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N m_i \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -y_i x_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -z_i x_i & -z_i y_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = I_{kl} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Der Gesamtdrehimpuls ist $\vec{L} = \vec{L}_B + \vec{L}_E$, mit $\vec{L}_B \hat{=} \mathbf{Bahndrehimpuls}$

Der **Eigendrehimpuls** kann also mit dem Trägheitstensor in Verbindung gebracht werden:

$$\boxed{\vec{L}_E = \overset{\leftrightarrow}{I} \vec{\omega}} \quad \mathbf{Eigendrehimpuls des starren Körpers}$$

Bemerkung: Der Eigendrehimpuls ist im Allgemeinen nicht parallel zur Winkelgeschwindigkeit \Rightarrow mathematisch schwierige Behandlung.

Bemerkung: Im Unterschied zu einem einzelnen MP verschwindet die Wirkung der auf einen Körper einwirkenden Kräfte nicht notwendigerweise dann, wenn die Summe der Kräfte verschwindet, sondern es kann zu einem resultierenden Drehmoment kommen:

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F} \neq 0, \text{ wenn } \vec{r}_1 \neq \vec{r}_2$$

Ein starrer Körper ist also nur dann im Gleichgewicht, wenn

$$\sum_{i=1} \vec{F}_i = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0.$$

Natürlich gilt auch der **Drehimpulssatz**:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{L}} = \vec{M}_{ext} = \vec{M}$$

Insbesondere gilt (bezogen auf den Schwerpunkt):

$$\boxed{\dot{\vec{L}}_E = \vec{M}} \quad \mathbf{Schwerer Kreisel} \quad \boxed{\dot{\vec{L}}_E = 0} \quad \mathbf{Freier Kreisel}$$

Der Zusammenhang zwischen Eigendrehimpuls und Winkelgeschwindigkeit bietet einen einfachen Weg, die Hauptträgheitsmomente eines starren Körpers zu bestimmen. Es gilt nämlich:

$$\vec{L}_E = \overset{\leftrightarrow}{I} \vec{\omega} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

wenn
 $\vec{L}_E \parallel \vec{\omega}$

und damit für diesen Spezialfall

$$\boxed{\vec{L}_E = \overset{\leftrightarrow}{I} \vec{\omega} = I \vec{\omega}} \quad \text{Eigenwertgleichung für den Tensor } \overset{\leftrightarrow}{I} \text{ und seine (skalaren) Eigenwerte } I$$

Das heißt weiter:

$$\left. \begin{aligned} I_{11} \omega_1 + I_{12} \omega_2 + I_{13} \omega_3 &= I \omega_1 \\ I_{21} \omega_1 + I_{22} \omega_2 + I_{23} \omega_3 &= I \omega_2 \\ I_{31} \omega_1 + I_{32} \omega_2 + I_{33} \omega_3 &= I \omega_3 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} (I_{11} - I) \omega_1 + I_{12} \omega_2 + I_{13} \omega_3 &= 0 \\ I_{21} \omega_1 + (I_{22} - I) \omega_2 + I_{23} \omega_3 &= 0 \\ I_{31} \omega_1 + I_{32} \omega_2 + (I_{33} - I) \omega_3 &= 0 \end{aligned} \right.$$

Die Hauptträgheitsmomente $I_{1,2,3}$ folgen dann aus der Lösbarkeitsbedingung

$$\begin{vmatrix} I_{11} - I & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} - I & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} - I \end{vmatrix} = 0$$

also als **Lösungen einer kubischen Gleichung**. Man kann dann zeigen, dass die zugehörigen Drehachsen orthogonal zueinander sind (**Hauptachsen**).

Als ein **Beispiel für eine typische Kreiselbewegung** betrachten wir den **gyroskopischen Effekt** ($\hat{=}$ „Präzession“): offenbar erfolgt die Änderung des Eigendrehimpulses in Richtung des einwirkenden Drehmoments, d.h.:

$$\dot{\vec{L}}_E = \frac{d\vec{L}_E}{dt} = \vec{M} \quad \Rightarrow \quad d\vec{L}_E = \vec{M} dt$$

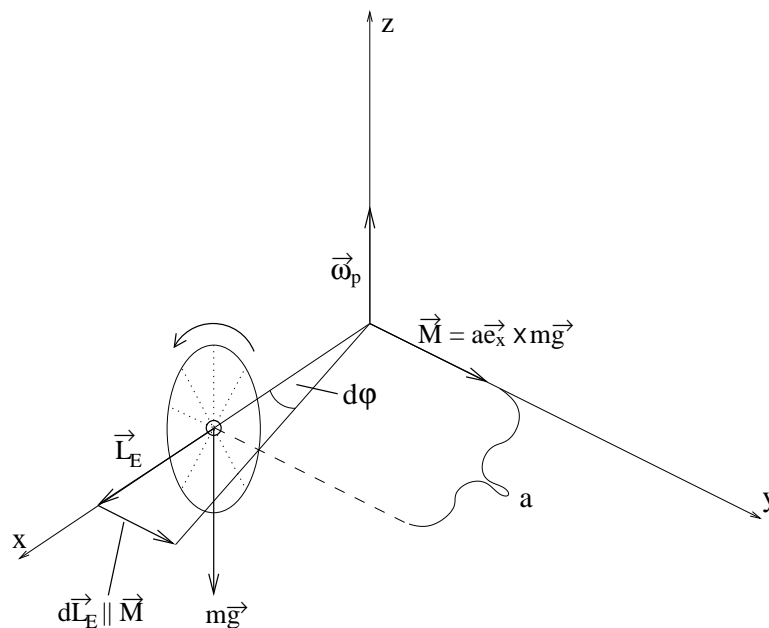


Abbildung 5.4: Gyroskopischer Effekt

Für ein **drehendes Rad auf einem Hebelarm** der Länge a gilt dann:

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F} = a \vec{e}_x \times (-mg) \vec{e}_z = a m g \vec{e}_y \\ \Rightarrow |\vec{M}| &= M = a m g \quad \Rightarrow \quad d\vec{L}_E = M dt \vec{e}_y\end{aligned}$$

Mit $d\varphi = \frac{dL_E}{L_E} = \frac{M}{L_E} dt$ folgt: $\omega_p = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L_E}$ „Präzessionsfrequenz“

und es gilt vektoriell: $\vec{\omega}_p \times \vec{L}_E = \vec{M}$.

Ähnlich gilt für die **Präzession der Erde**:

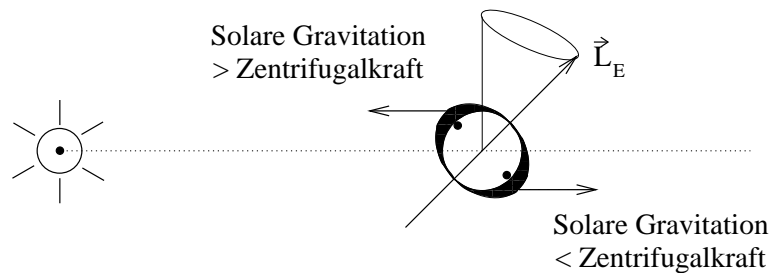


Abbildung 5.5: Präzession der Erde

Gesamtdrehmoment führt zur Rotation von Drehimpulsvektor \vec{L}_E mit $\omega_p \approx 26000$ Jahren („Platonisches Jahr“)

Zur systematischen Untersuchung der Kreiselbewegung betrachtet man ...

5.4 Die Eulerschen Gleichungen

Der Drehimpulssatz für den starren Körper $\dot{\vec{L}}_E = \vec{M}$ in einem Inertialsystem Σ lautet im körperfesten System Σ' :

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_{\Sigma'} \vec{L}_E + \vec{\omega} \times \vec{L}_E = \vec{M}$$

Mit $\vec{L}_E = \overset{\leftrightarrow}{I} \vec{\omega}$ folgt

$$\overset{\leftrightarrow}{I} \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \left(\overset{\leftrightarrow}{I} \vec{\omega} \right) = \vec{M}$$

Insbesondere gilt im Hauptachsensystem:

$$\begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_2 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = M_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = M_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = M_3 \end{array} \quad \text{Euler'sche Gleichungen}$$

Bemerkung: Die Euler'schen Gleichungen sind nichtlinear. Einfach analytische Lösungen lassen sich lediglich für den Fall des freien Kreisels ($\vec{M} = 0$) angeben

Beispiel: **Symmetrischer freier Kreisel**

$$I_1 = I_2 \neq I_3; \quad \vec{M} = 0$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_1) \omega_2 \omega_3 = 0 \\ I_1 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 = 0 \end{array} \right| \Rightarrow \omega_3 = \text{const.} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(\dots) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} I_1 \ddot{\omega}_1 + (I_3 - I_1) \dot{\omega}_2 \omega_3 = 0 \\ I_1 \ddot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \dot{\omega}_1 \omega_3 = 0 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \end{array}$$

(II) in (I):

$$\Rightarrow \ddot{\omega}_1 + \left[\frac{(I_3 - I_1)^2}{I_1^2} \omega_3^2 \right] \omega_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{\omega}_1 + \omega_0^2 \omega_1 = 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_0 = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3}$$

Folglich führt die Rotationsachse in den Komponenten ω_1 und ω_2 harmonische Schwingungen mit der Eigenfrequenz ω_0 aus.

Bemerkung: Für einen Kugelkreisel $I_1 = I_2 = I_3$ folgt $\omega_0 = 0$, d.h. es ergibt sich keine Schwingung.

Anwendung: Polbewegung der Erde

Wegen der Abplattung des Erdkörpers ist die Erde kein Kugelkreisel, sondern ein symmetrischer Kreisel, der als Rotationsellipsoid genähert werden kann. Die Hauptträgheitsmomente eines Rotationsellipsoids sind: $I_1 = I_2 = \frac{M}{5}(b^2 + c^2)$; $I_3 = \frac{M}{5}(a^2 + b^2)$

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 = \frac{a^2 + b^2 - b^2 - c^2}{b^2 + c^2} \omega_3 = \frac{a^2 - c^2}{b^2 + c^2} \omega_3$$

Mit $\omega_3 = 2\pi/24$ Stunden und $a = b = 6378$ km (Äquator) und $c = 6357$ km (Pol) folgt die sogenannte **Chandler'sche Periode** zu:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \approx 304 \text{ Tage}$$

Die Abweichung von der tatsächlich beobachteten Periode ~ 433 Tagen beruht auf dem Umstand, dass die Erde nicht wirklich ein starrer Körper ist.

5.5 Lagrangefunktion des Starren Körpers

Geeignete generalisierte Koordinaten q_s (s.o.) sind die sogenannten **Eulerschen Winkel**, die (bei Beschränkung auf Rotation) die Orientierung eines körperfesten Koordinatensystems relativ zu einem (ruhenden) Inertialsystem angeben. Haben beide Koordinatensysteme ihren Ursprung im festen Punkt eines starren Körpers, so gilt

$$\vec{r}''' = A^{-1} \vec{r} \quad \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix}}_{\text{körperfestes System}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Drehung um } z''\text{-Achse}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}}_{\text{Drehung um } x'\text{-Achse}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Drehung um } z\text{-Achse}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{Inertialsystem}}$$

Die Drehwinkel φ, ϑ, ψ heißen **Euler'sche Winkel**.

Für die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ hat man die Darstellung:

$$\vec{\omega} = \omega_\varphi \vec{e}_z + \omega_\vartheta \vec{e}_{x'} + \omega_\psi \vec{e}_{z''} = \dot{\varphi} \vec{e}_z + \dot{\vartheta} \vec{e}_{x'} + \dot{\psi} \vec{e}_{z''}$$

Da im körperfesten System $\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_{x'''} + \omega_2 \vec{e}_{y'''} + \omega_3 \vec{e}_{z''}'$ folgt (mit A):

$$\omega_1 = \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi ; \quad \omega_2 = \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi ; \quad \omega_3 = \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}$$

Da die Rotationsenergie durch $T_R = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$ gegeben ist, folgt für die Lagrangefunktion:

$L = T - V = \frac{1}{2} I_1 \left(\dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi \right)^2 + \frac{1}{2} I_2 \left(\dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi \right)^2 + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi} \right)^2 - V(\varphi, \vartheta, \psi)$	Lagrangefunktion des rotierenden starren Körpers (Kreisels)
--	--

Bemerkung: Wählt man $(\varphi, \vartheta, \psi)$ so, dass $-\frac{\partial V}{\partial \psi} = M_3$ das Drehmoment um die z''' -Achse angibt, folgt die 3. Euler'sche Gleichung (s.o.). Die beiden anderen Lagrange-Gleichungen 2. Art sind **nicht** identisch mit den beiden anderen Euler'schen Gleichungen.

6 Spezielle Relativitätstheorie

6.1 Grundlagen

Ursprüngliche Erwartung:

Licht ist an ein materielles Medium, den „Äther“ (gr.: „aither“ $\hat{=}$ „die obere Luft“) gebunden, wie z.B. Schallwellen an Luft.

Die daraus folgende Überlegung, dass die Lichtgeschwindigkeit dann vom Bewegungszustand des Bezugssystems abhängen sollte, sollte überprüft werden mit dem

6.1.1 Michelson-Morley-Experiment (1881, 1887)

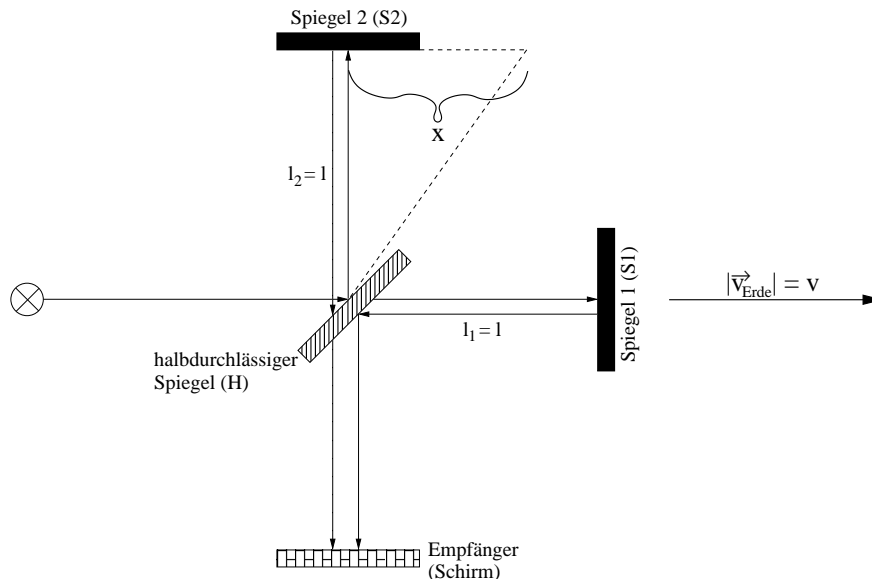


Abbildung 6.1: Versuchsaufbau

Berechnung der Laufzeiten

$$H \rightarrow S_1 \rightarrow H : t_1 = \frac{l}{c+v} + \frac{l}{c-v} = \frac{2lc}{c^2-v^2} = \frac{2l}{c} \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$H \rightarrow S_2 \rightarrow H : t_2 = \frac{2\sqrt{l^2+x^2}}{c}; \quad x = \frac{1}{2} v t_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Die Laufzeitdifferenz

$$t_1 - t_2 = \frac{2l}{c} \left[\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right] = \frac{2l}{c} \left[1 + \frac{v^2}{c^2} + \dots - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right) \right] = l \frac{v^2}{c^3}$$

$|\vec{v}_{Erde}| \approx 30 \frac{km}{s} \Rightarrow \frac{v}{c} \approx 10^{-4}$

führt zu einem Phasenunterschied (ν = Wellenfrequenz) $\Delta\phi = \nu(t_1 - t_2) \approx \nu \frac{lv^2}{c^3}$

Es wurde aber $\Delta\phi = 0$ beobachtet!

Bemerkung: Um die eventuelle Ungenauigkeit in den Armlängen $l_1 = l_2 = l$ auszuschließen wurde der Apparat um -90° gedreht, so dass dann eine Phasendifferenz von $-\Delta\phi$ erwartet würde. Damit ergibt sich zur Orientierung 0° und -90° eine **Gesamtphasendifferenz** $2\Delta\phi$, die im Experiment zu $2\Delta\phi \sim \frac{1}{3}$ erwartet wurde. Das Instrument hätte um den Faktor 40 kleinere Phasendifferenzen detektieren können - eine solche wurde aber nicht beobachtet.

Es gab verschiedene Deutungen dieses Negativresultats:

- (1) **Michelson:** Äther bewegt sich mit der Erde.
- (2) **Lorentz/Fitzgerald/Lodge:** Der Instrumentenarm in Bewegungsrichtung ist (um den Faktor $1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$) verkürzt (infolge eines Ätherdrucks).
- (3) **Einstein:** (i) Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes ist unabhängig vom Bewegungszustand des Systems. (ii) In allen gleichförmig bewegten Systemen gelten dieselben Naturgesetze („Kovarianz“ der Naturgesetze).

Heute wissen wir, dass Einsteins Deutung die richtige ist.

6.1.2 Die Lorentztransformation

Betrachte zwei relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit v bewegte Bezugssysteme Σ, Σ' (o.B.d.A. sei $\vec{v} = v \vec{e}_z$). Wenn zum Zeitpunkt $t = 0$, zu dem beide Koordinatensysteme denselben Ursprung haben, ein Lichtsignal von dort ausgesendet wird, sehen Beobachter in Σ und Σ' eine sphärische Lichtausbreitung:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad \text{bzw.} \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

Da $c = \text{const.}$ und in Σ und Σ' gleich ist, sind die beiden Rechnungen nicht mit einer Galilei-Transformation $z' = z - vt$ verträglich.

Daher:

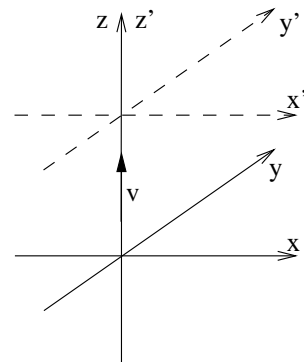


Abb. 6.2: Bezugssysteme

Idee: Lineare Transformation

$$\left. \begin{array}{l} x' = x \\ y' = y \\ z' = a_{11} z + a_{12} t \\ t' = a_{21} z + a_{22} t \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Da nun der Beobachter in Σ das System Σ' mit dem Bewegungsgesetz $z = vt$ sieht, liegt (insbesondere für $z' = 0$) der Ansatz:

$$\begin{cases} z' = \gamma(z - vt) \\ t' = \delta(\varepsilon z + t) \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} a_{11} = \gamma & ; & a_{12} = -\gamma v \\ a_{21} = \delta \varepsilon & ; & a_{22} = \delta \end{cases}$$

nahe, in dem also nur noch drei Koeffizienten unbekannt sind.

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
 & x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & x^2 + y^2 + \gamma^2 (z^2 - 2zvt + v^2 t^2) - c^2 \delta^2 (\varepsilon^2 z^2 + 2\varepsilon zt + t^2) = 0 \\
 \Leftrightarrow & x^2 + y^2 + z^2 \underbrace{(\gamma^2 - c^2 \delta^2 \varepsilon^2)}_{\stackrel{!}{=} 1} - c^2 t^2 \underbrace{\left(\delta^2 - \gamma^2 \frac{v^2}{c^2}\right)}_{\stackrel{!}{=} 1} - 2zt \underbrace{(v\gamma^2 + \varepsilon c^2 \delta^2)}_{\stackrel{!}{=} 0} = 0
 \end{aligned}$$

Also:

$$\gamma^2 - c^2 \delta^2 \varepsilon^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma^2 - c^2 \delta^2 \frac{v^2 \gamma^4}{c^4 \delta^4} = 1 \quad (\text{I})$$

$$c^2 \delta^2 - \gamma^2 v^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 \delta^2 = c^2 + \gamma^2 v^2 \quad (\text{II})$$

$$v\gamma^2 + \varepsilon c^2 \delta^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = -\frac{v\gamma^2}{c^2 \delta^2} \quad (\text{III})$$

$$(\text{II}) \text{ in } (\text{I}): \quad \gamma^2 - \frac{v^2 \gamma^4}{c^2 + \gamma^2 v^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^2 c^2 + \underbrace{\gamma^4 v^2 - v^2 \gamma^4}_{=0} = c^2 + \gamma^2 v^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

$$(\text{II}): \quad \delta^2 = \frac{c^2 + \gamma^2 v^2}{c^2} = \frac{c^2 + \frac{c^2 v^2}{c^2 - v^2}}{c^2} = \frac{c^4 - v^2 c^2 + c^2 v^2}{c^2 (c^2 - v^2)} = \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \gamma^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta = \gamma}$$

$$(\text{III}): \quad \boxed{\varepsilon = -\frac{v}{c^2}}$$

Damit lautet die **Lorentztransformation** explizit:

$ \begin{aligned} x' &= x & x &= x' \\ y' &= y & y &= y' \\ z' &= \gamma(z - vt) & z &= \gamma(z' + vt') \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}z\right) & t &= \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}z'\right) \end{aligned} $	bzw:	Lorentztransformation
---	-------------	------------------------------

Bemerkung: So wie die Galilei-Transformationen die **Galilei-Gruppe** bilden, bildet die Gesamtheit der Lorentztransformationen die **Lorentz-Gruppe**.

6.2 Folgerungen

6.2.1 Gleichzeitigkeit

Ereignisse, die in einem für einen Beobachter ruhenden Inertialsystem Σ gleichzeitig erscheinen, erscheinen von einem relativ zu Σ bewegten System nicht mehr gleichzeitig. Leuchten z.B. in Σ zwei Lampen an den beiden Orten z_1 und z_2 gleichzeitig auf ($t_1 = t_2$), dann gilt in Σ' :

$$t'_2 - t'_1 = \gamma \left(t_2 - \frac{v}{c^2} z_2 \right) - \gamma \left(t_1 - \frac{v}{c^2} z_1 \right) = \gamma \frac{v}{c^2} (z_1 - z_2) \neq 0$$

\downarrow
L-Trafo

\downarrow
 $t_1 = t_2$

D.h. in Σ' leuchten die beiden Lampen **nicht** gleichzeitig auf.

Folgerung: Der Begriff der Gleichzeitigkeit ist nur sinnvoll in Bezug auf ein gegebenes Inertialsystem, nicht aber für die Gesamtheit aller Inertialsysteme.

6.2.2 Zeitdilatation¹

Gemäß der Lorentz-Transformation ist die Zeit **keine** absolute Größe mehr, wird also mit-transformiert: Uhren in bewegten Systemen gehen langsamer als in ruhenden Systemen. Ein Beobachter im ruhenden System Σ beobachtet eine im relativ zu Σ gleichförmig bewegten System Σ' ruhende Uhr.

Er findet:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \left(t'_2 + \frac{v z'_2}{c^2} \right) - \gamma \left(t'_1 + \frac{v z'_1}{c^2} \right) = \gamma (t'_2 - t'_1) = \gamma \Delta t'$$

\downarrow
L-Trafo

\downarrow
Uhr ruht in $\Sigma' \Rightarrow z'_1 = z'_2$

Wegen $\gamma > 1$ findet er $\Delta t' < \Delta t$. Die bewegte Uhr geht also langsamer, die Zeit in Σ' ist „gedehnt“. Diese sog. **Zeitdilatation** ist symmetrisch, d.h. ein Beobachter in Σ' findet für das mit einer in Σ ruhenden Uhr gemessene Zeitintervall:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma \left(t_2 - \frac{v z_2}{c^2} \right) - \gamma \left(t_1 - \frac{v z_1}{c^2} \right) = \gamma (t_2 - t_1) = \gamma \Delta t$$

\downarrow
L-Trafo

\downarrow
Uhr ruht in $\Sigma \Rightarrow z_1 = z_2$

Also: $\Delta t < \Delta t' \hat{=}$ bewegte Uhr geht langsamer.

Nachweis: Zwei Flugzeuge in Ost- und Westrichtung: die Uhren an Bord zeigen eine andere Zeit als eine (z.B. am Nordpol) ruhende Uhr. Wegen $\vec{v}_{West} = \vec{v}_{Flugzeug} - \vec{v}_{Erdrot}$ und $\vec{v}_{Ost} = \vec{v}_{Flugzeug} + \vec{v}_{Erdrot}$ gilt $|\vec{v}_{West}| < |\vec{v}_{Ost}|$ und es ergibt sich eine Zeitdifferenz der Beobachter von $\Delta t \approx 323ns$.

¹lat. dilatabilis $\hat{=}$ dehnbar, Dehnung

6.2.3 Längenkontraktion

Die Ausdehnung eines bewegten Körpers ist in Bewegungsrichtung verkürzt. Ein Beobachter in Σ , der einen in Σ' ruhenden Stab der Länge $L' = z'_2 - z'_1$ beobachtet, findet:

$$L' = z'_2 - z'_1 \underset{\substack{| \\ L\text{-Trafo.}}}{=} \gamma(z_2 - vt_2) - \gamma(z_1 - vt_1) \underset{\substack{| \\ t_1 = t_2}}{=} \gamma(z_2 - z_1) = \gamma L$$

Mit $\gamma > 1 \Rightarrow L' > L$: der bewegte Stab erscheint also kürzer. Entsprechendes gilt für einen in Σ ruhenden Stab der von Σ' aus beobachtet wird.

Anwendung: Zerfall von μ -Mesonen:

μ -Mesonen entstehen durch die Wechselwirkung der kosmischen Strahlung mit der Erdatmosphäre in einer Höhe von etwa $h = 10$ km mit etwa Lichtgeschwindigkeit $v = \sqrt{\frac{2499}{2500}} c \approx c$ und werden auf dem Erdboden ($h = 0$) nachgewiesen. Bei einer Lebensdauer von $\tau_\mu = 2 \cdot 10^{-6}$ s können die Teilchen also einen Weg

$$s \approx \tau_\mu \cdot c \approx 2 \cdot 10^{-6} \text{ s} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 600 \text{ m} \ll 10 \text{ km}$$

zurücklegen. Warum gelangen die Teilchen also dennoch zum Erdboden?

Die spezielle Relativitätstheorie sagt, dass ein (hochrelativistisches) μ -Mesonen den Weg vom Entstehungsort bis zum Erdboden um $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} = 50$ verkürzt „sieht“, d.h. lediglich der Weg $h/\gamma = \frac{10 \text{ km}}{50} = 200 \text{ m}$ zurücklegen muss, was mit seiner Lebensdauer verträglich ist. Umgekehrt gilt für einen Beobachter auf der Erde, dass die Lebensdauer eines μ -Mesons verlängert („gedehnt“) ist:

$$\tau_B = \gamma \tau_\mu = 50 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

so dass das Teilchen einen Weg von

$$s \approx \tau_B \cdot c \approx 1 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m} = 3 \cdot 10^4 \text{ m} = 30 \text{ km}$$

zurücklegen kann, also ausreichend lange „lebt“ um den Erdboden zu erreichen.

6.2.4 Geschwindigkeitsaddition

Wie transformiert sich die Geschwindigkeit eines Objektes zwischen zwei relativ zueinander gleichförmig bewegten Systemen Σ und Σ' ?

Es gilt (relative Bewegung in z -Richtung):

$$\left. \begin{array}{l} x = x' \\ y = y' \\ z = \gamma(z' + vt') \\ t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}z'\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} dx = dx' \\ dy = dy' \\ dz = \gamma(dz' + v dt') \\ dt = \gamma\left(dt' + \frac{v}{c^2}dz'\right) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{u} &= (u_x, u_y, u_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \\ &= \left(\frac{dx'}{\gamma\left(dt' + \frac{v}{c^2}dz'\right)}, \frac{dy'}{\gamma\left(dt' + \frac{v}{c^2}dz'\right)}, \frac{\gamma(dz' + v dt')}{\gamma\left(dt' + \frac{v}{c^2}dz'\right)} \right) \\ &= \frac{1}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}\frac{dz'}{dt'}\right)} \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \gamma\left[\frac{dz'}{dt'} + v\right] \right) \\ &= \frac{1}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_z\right)} (u'_x, u'_y, \gamma[u'_z + v]) \end{aligned}$$

Explizit also:

$$\boxed{u_x = \frac{u'_x}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_z\right)}; \quad u_y = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_z\right)}; \quad u_z = \frac{u'_z + v}{1 + \frac{vu'_z}{c^2}}}$$

**Additionstheorem
der Geschwindigkeit**

Es gelten die Grenzfälle:

$$(1) \quad v \ll c \Rightarrow \gamma \approx 1 \Rightarrow u_x = u'_x, \quad u_y = u'_y, \quad u_z = u'_z + v$$

Das aber ist gerade die Galilei-Transformation der Geschwindigkeiten.

$$(2) \quad v \rightarrow c \Rightarrow \gamma \rightarrow \infty \Rightarrow u_x \rightarrow 0, \quad u_y \rightarrow 0, \quad u_z \rightarrow \frac{u'_z + c}{1 + \frac{u'_z}{c}} = \left(\frac{u'_z + c}{c + u'_z} \right) c = c$$

Das heißt die beobachteten Geschwindigkeiten sind stets durch die Lichtgeschwindigkeit nach oben begrenzt.