Physik für Vermessungswesen und Geoinformatik Musterlösung

13 – 19

1 Aufgabe 14

Der Abstand zwischen Bild und und Gegenstand soll minimiert werden

$$s = g + b \tag{1}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \tag{2}$$

$$:b = \frac{gf}{g-f} \tag{3}$$

$$:s = g + \frac{gf}{g-f} \tag{4}$$

Wir wollen nun das Minimum bestimmen und leiten daher s nach g ab

$$\frac{ds}{dg} = 1 + \frac{f(g-f) - gf}{(g-f)^2} \tag{5}$$

$$\frac{ds}{dg} = 0 \tag{6}$$

$$\frac{f(g-f) - gf}{(g-f)^2} = -1 \tag{7}$$

$$g = 2f \tag{8}$$

Also muß die Gegenstandsweite 2 m betragen, damit der Abstand zwischen Gegenstand und Bild minimal wird. Einsetzen in die Abbildungsgleichung liefert auch $b = 2$m

2 Aufgabe 15

Die Gegenstandsweite g und die Brennweite f sind bekannt

$$g = 5000\text{m} \tag{9}$$

$$f = 0.4\text{m} \tag{10}$$

Mit Hilfe der Abbildungsgleichung kann man nun die Bildweite b bestimmen

$$\frac{1}{g}+\frac{1}{b} = \frac{1}{f} \tag{11}$$
$$:b = 0.40003\text{m} \tag{12}$$

Der Abbildungsmaßstab läßt sich nun mit Bild- und Gegenstandsweite bestimmen, daraus folgt, da die Bildgröße bekannt ist, direkt die Gegenstandsgröße (also die Breite des Bodenstreifens)

$$v = \frac{b}{g} \tag{13}$$
$$= \frac{1}{12500} \tag{14}$$
$$= \frac{B}{G} \tag{15}$$

Damit ist $G = 2500\text{m}$.

Um die Bilderzahl zu bestimmen, müssen wir bedenken, daß mit jedem Bild nur 40% neue Informationen dazukommen. 40% von 2500 m sind 1000 m, also benötigen wir 20000m/1000m=20 Bilder (eigentlich noch eins mehr, nämlich das erste Bild)

3 Aufgabe 16

Hier sind sowohl B als auch G bekannt, allerdings sind sie für die Horizontale und die Vertikale unterschiedlich

$$V_1 = \frac{24}{210} \tag{16}$$
$$= 0.114 \tag{17}$$
$$V_2 = \frac{36}{297} \tag{18}$$
$$= 0.121 \tag{19}$$

Nun gilt für die Bildweite $b = Vg$, außerdem die bekannte Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{g}+\frac{1}{b} = \frac{1}{f} \tag{20}$$
$$\frac{1}{g}+\frac{1}{Vg} = \frac{1}{f} \tag{21}$$
$$\frac{1}{g}\left(1+\frac{1}{V}\right) = \frac{1}{f} \tag{22}$$
$$g = f\left(1+\frac{1}{V}\right) \tag{23}$$

Nun muß man den *kleineren* Abbildungsmaßstab wählen, damit das Bild vollständig auf den Film paßt. Man erhält

$$g = 243.7\text{mm} \tag{24}$$
$$b = Vg = 27.9\text{mm} \tag{25}$$

Für die A5-Aufnahme wendet man denselben Rechenweg an, setzt dabei aber die Maße für A5 an

$$V_1 = \frac{24}{148.5} \tag{26}$$
$$= 0.162 \tag{27}$$
$$V_2 = \frac{36}{210} \tag{28}$$
$$= 0.171 \tag{29}$$

Damit erhält man

$$g = 179.7\text{mm} \tag{30}$$
$$b = Vg = 29.0\text{mm} \tag{31}$$

4 Aufgabe 17

Hier geht man von der Brechung an *einer* sphärischen Fläche aus. Dafür haben wir folgende Abbildungsgleichung

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r} \tag{32}$$
$$\frac{1}{b} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 r} - \frac{n_1}{n_2 g} \tag{33}$$
$$b = \frac{n_2 r g}{g(n_2 - n_1) - n_1 r} \tag{34}$$

Da der Gegenstand sich in der Mitte der Kugel befindet ist $g = r$.

$$b = \frac{n_2}{n_2 - 2n_1} r \tag{35}$$

Einsetzen liefert $b = 5$ cm. Das Bild entsteht also zwischen Kugeloberfläche und Mittelpunkt.

Der Abbildungsmaßstab errechnet sich folgendermaßen

$$v = \frac{n_1 b}{n_2 g} = 0.75 \tag{36}$$

Die Brennpunkte ergeben sich zu

$$f' = \frac{n_2}{n_2 - n_1} r = 20\text{cm} \tag{37}$$
$$f = \frac{n_1}{n_2 - n_1} r = 30\text{cm} \tag{38}$$

5 Aufgabe 18

Wir kennen die Matrizen für die Brechung an der Linse

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \tag{39}$$

und den Strahlengang durch leeren Raum

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{40}$$

Wir kennen $f = 1$ m und $g = 5$ m. Damit ergibt sich die Abbildunsgleichung durch

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ y_2\prime \end{pmatrix} = T_2 \cdot T_1 \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix} \tag{41}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix} \tag{42}$$

Benutzt man die Strahlen aus der Aufgabe, so erhält man

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix} \tag{43}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.1 \end{pmatrix} \tag{44}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.5 \\ 3.5 \end{pmatrix} \tag{45}$$

Daraus ergeben sich folgende Geradengleichungen

$$y = 0.5 - 0.5 \cdot x \tag{46}$$

$$y = -0.1 \cdot x \tag{47}$$

$$y = -4.5 + 3.5 \cdot x \tag{48}$$

Alle Geraden müssen sich in einem Punkt schneiden. Dieser liegt bei $(x, y) = (1.25, -0.125)$, d.h. das Bild ist 1.25m entfernt, ist umgekehrt und hat eine Höhe von -0.125m

6 Aufgabe 19

Die Zeichnung ist analog zum Skript!

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 60 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{Abstand Gegegstand – Linse 1} && (49)\\
L_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 1 \end{pmatrix} \text{Linse 1} && (50)\\
D_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 30 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{Abstand Linse 1 – Linse 2} && (51)\\
L_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 1 \end{pmatrix} \text{Linse 2} && (52)\\
D_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 90 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{Abstand Linse 2 – Linse 3} && (53)\\
L_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 1 \end{pmatrix} \text{Linse 3} && (54)
\end{aligned}
$$

Die $ABCD$-Matrix der Linse ergibt sich, wenn man $L_3 \cdot D_3 \cdot L2 \cdot D_2 \cdot L_1$ ausmultipliziert

$$T = \begin{pmatrix} -3 & 156 \\ \frac{1}{6} & -9 \end{pmatrix} \tag{55}$$

Wir ermitteln nun zuerst Lage und Größe des entstehenden Bildes. Dazu benutzen wir den achsparallelen und den Mittelpunktsstrahl.

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \begin{pmatrix} G & 0 \end{pmatrix} && (56)\\
S_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{G}{g} \end{pmatrix} && (57)\\
T \cdot S_1 &= \begin{pmatrix} -3G & \frac{G}{6} \end{pmatrix} && (58)\\
T \cdot S_2 &= \begin{pmatrix} -\frac{13}{5}G & \frac{3}{20}G \end{pmatrix} && (59)
\end{aligned}
$$

Damit wir haben wir zwei Geradengleichungen, deren Schnittpunkt wir nur noch bestimmen müssen. Wir finden das Bild bei $x = 24$ mm und der der Abbildungsmaßstab ist 1.

Die Brennweite und Hauptebene lassen sich direkt aus T bestimmen:

$$
\begin{aligned}
f' &= -\frac{1}{C} = -6 && (60)\\
h' &= \frac{A-1}{C} = -24 && (61)
\end{aligned}
$$

Um die gegenstandsseitigen Werte zu berechnen müssen wir die Inverse Matrix bestimmen

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -9 & 156 \\ -\frac{1}{6} & -3 \end{pmatrix} \tag{62}$$

Daraus folgt dann

$$
\begin{aligned}
f &= 6 && (63)\\
h &= 54 && (64)
\end{aligned}
$$