

# Κινητική εξίσωση Fokker-Planck για ένα σωματίο σε πλάσμα μέσα σε μαγνητικό πεδίο <sup>1</sup>

I. Κουράκης \* & A. Γκραίκος<sup>†</sup>

\* *Université Libre de Bruxelles, Association Euratom - Etat Belge*

*C.P. 231 Physique Statistique et Plasmas*

*C.P. 231, boulevard du Triomphe, B-1050 Brussels, Belgium*

*email: ikouraki@ulb.ac.be*

<sup>†</sup> *Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Ένωση Euratom - Ελληνική Δημοκρατία*

*Εργαστήριο Ρευστομηχανικής και Στροβιλομηχανών*

*Λεωφόρος Αθηνών, Πεδίον Άρεως, 383 34 Βόλος.*

*email: agrecos@mie.uth.gr*

## Περίληψη

Στηριζόμενοι σε βασικές αρχές της Στατιστικής Μηχανικής Εκτός Ισορροπίας, παρουσιάζουμε τη μεθοδολογία που ακολουθείται για τη μελέτη ενός φορτισμένου σωματιδίου αναφοράς (*test-particle*) σε αλληλεπίδραση με ένα ομογενές υπόστρωμα (πλάσμα) σε ισορροπία, ευρισκόμενο μέσα σε ομογενές εξωτερικό πεδίο. Η στατιστική περιγραφή με βάση την εξίσωση Liouville οδηγεί σε μία ολοκληρωτική 'κυρίαρχη' εξίσωση (*master equation*) που χαρακτηρίζεται από χρονική μνήμη, δηλαδή χωρίς χρονικό εντοπισμό (ιδιότητα Markov). Η 'Μαρκοβιανή' προσέγγιση που προτείνουμε οδηγεί στην κατασκευή μιας νέας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης τύπου Fokker-Planck. Οι συντελεστές σε αυτή τη νέα κινητική εξίσωση εξαρτώνται από τις μικροσκοπικές μεταβλητές (ταχύτητα του σωματιδίου), από φυσικές παραμέτρους (πυκνότητα, θερμοκρασία) και - κυρίως - από το εξωτερικό πεδίο, γεγονός που βεβαιώνει η αριθμητική μελέτη που ακολουθεί.

---

<sup>1</sup> Σχολείο Φυσικής και Τεχνολογίας Σύντηξης, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Βόλος, 16-21 Μαΐου 2002.

# 1 Εισαγωγή

\* Πλάσμα = Σύστημα  $N$  φορτισμένων σωματίων που αλληλεπιδρούν:

- μεταξύ τους (με αλληλεπιδράσεις μεγάλης εμβέλειας)
- με εξωτερικά H/M πεδία

## 1.1 Στατιστική Μηχανική

\* Πυκνότητα πιθανότητας (συνάρτηση κατανομής)  $\rho_N$ , στο συνολικό χώρο των φάσεων  $\Gamma_N$ .

\* **Εξίσωση Liouville για  $N$  σωματία:**

$$\frac{\partial \rho_N}{\partial t} = L_N \rho_N \quad (1)$$

\* Γενική λύση της εξίσωσης Liouville :

$$\rho_N(t) = e^{L_N(t-t_0)} \rho_N(t_0) \quad (2)$$

\*  $e^{L_N(t-t_0)}$ : τελεστής χρονικής εξέλιξης - η πλήρης γνώση του ισοδυναμεί με τη γνώση της λύσης του προβλήματος κίνησης ( $N$  σωματίων !)

\* Συνάρτηση κατανομής για 1 σωματίο:  $\rho_1(\Gamma_1) = f$

\* **Εξίσωση Κινητικής Εξέλιξης (για 1 σωματίο)**

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{T}\{f\} \quad (3)$$

\*  $\mathcal{T}$ : τελεστής κινητικής εξέλιξης.

## 1.2 Μακροσκοπική περιγραφή:

παρατηρήσιμο μέγεθος  $A(t) =$  μέση τιμή  $a$ :

$$A = \int d\mathbf{x} d\mathbf{v} a f$$

Η εξέλιξη του  $A$  στο χρόνο θα υπακούει μία σχέση της μορφής:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int d\mathbf{x} d\mathbf{v} a f = \int d\mathbf{x} d\mathbf{v} \frac{\partial a}{\partial t} f = \int d\mathbf{x} d\mathbf{v} a \frac{\partial f}{\partial t} = \int d\mathbf{x} d\mathbf{v} a \mathcal{T} f = \dots$$

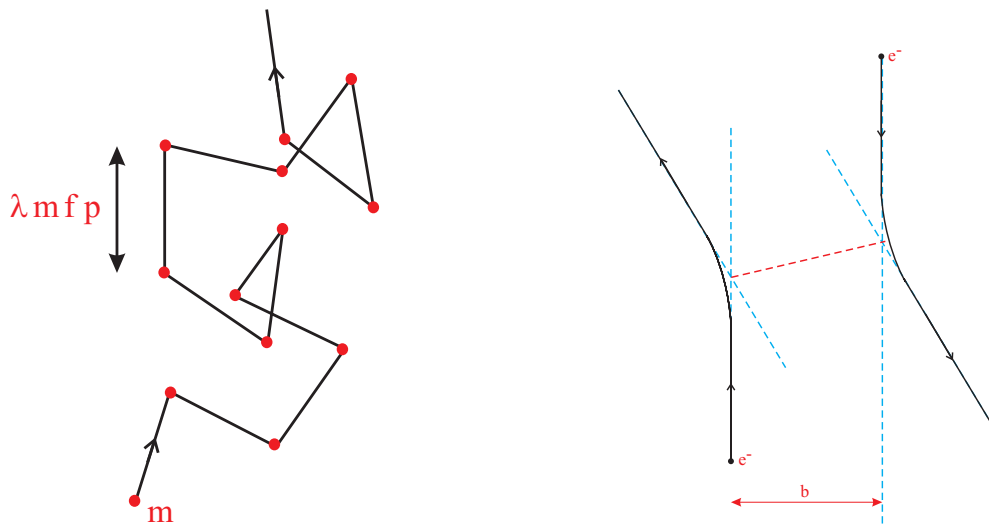
→ *Μαγνητοϋδροδυναμική Θεωρία του Πλάσματος*

## 1.3 Κινητική Εξίσωση - Τελεστής κρούσεων:

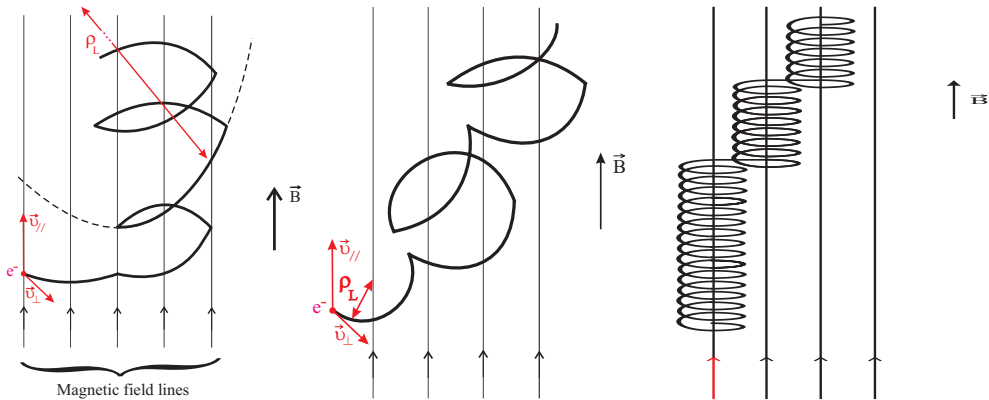
Γενική μορφή:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + m^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \mathcal{K}\{f\} \quad (4)$$

όπου  $f = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t)$ .



Σχήμα 1: Αλληλεπίδραση μεταξύ σημειακών σωματιδίων - διαφορά μεταξύ (α) σημειακών αλληλεπιδράσεων μεταξύ αφόρτιστων σωματιδίων (σφαιρών) και (β) ηλεκτροστατικών αλληλεπιδράσεων μεγάλης εμβέλειας μεταξύ φορτισμένων σωματιδίων.



Σχήμα 2: Σχηματική απεικόνιση της τροχιάς συγκρουόμενων φορτίων, κατά την παρουσία μαγνητικού πεδίου. Συγκρίνετε την τυπική κλίμακα αλληλεπίδρασης (μήκος Debye  $r_D$ ) με την τυπική κλίμακα περιστροφικής κίνησης (ακτίνα Larmor  $\rho_L$ ) σε τρεις περιπτώσεις: (α)  $\rho_L \gg r_D$ , (β)  $\rho_L \approx r_D$  και (γ)  $\rho_L \ll r_D$ .

## 2 Το μοντέλο

Συστατικά:

- Δεξαμενή (‘reservoir’  $R$ )
- Σωματίο αναφοράς (*test-particle*:  $\sigma$ )
- Εξωτερικό πεδίο  $\mathbf{B}$ , το οποίο θεωρούμε ότι είναι ομογενές και στατικό, με διεύθυνση κατά τον άξονα  $z$ :  $\mathbf{B} = B\hat{z}$ .

## 3 Χαμιλτονιανή - εξισώσεις κίνησης

$$H = H_R + H_\sigma + \lambda H_{int} \quad (5)$$

$$H_R = \sum_{j=1}^N H_j + \sum_{j < n} \sum_{n=1}^N V_{jn} \quad (6)$$

-  $H_j$ : όρος 1 σωματιδίου: ( $j = 1, 2, \dots, N$  και  $\sigma$ ):

$$H_j(\mathbf{x}_j, \mathbf{p}_j) = \frac{1}{2}m_j|\mathbf{p}_j - \frac{e_j}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x}_j)|^2 \equiv \frac{1}{2}m_jv_j^2$$

(Γακωβιανή:  $J = m_j^3$ )

όπου  $\mathbf{A}(\mathbf{x}_j)$  είναι το διανυσματικό μαγνητικό πεδίο:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}_j) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}_j)$$

-  $H_{int}$ : αλληλεπίδραση ανάμεσα στα δύο υποσυστήματα:

$$H_{int} = \sum_{n=1}^N V_{\sigma n}$$

όπου  $V_{ij} \equiv V(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|)$  ( $i, j = 1, 2, \dots, N, \sigma$ )

( $\lambda \ll 1$ )

### 3.1 Εξισώσεις κίνησης

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} ; \quad \dot{\mathbf{v}} = \frac{1}{m} [\mathbf{F}_0 + \lambda \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}; \mathbf{X}_R)] \quad (7)$$

-  $\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_L$ : Εξωτερική δύναμη (Lorentz )

$$\mathbf{F}_L = \frac{e}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (8)$$

-  $\mathbf{F}_{\text{int}}$ : Δύναμη αλληλεπίδρασης:

$$\mathbf{F}_{\text{int}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \sum V(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|) \quad (9)$$

‘Στοχαστική’ φυσική διεργασία!

- Λύση για  $\lambda = 0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(0)}(t) &= \mathbf{v} + \frac{1}{m} \int_0^t dt' \mathbf{F}_0(t') = \mathbf{x} + \mathbf{N}'(t) \mathbf{v} \\ \mathbf{x}^{(0)}(t) &= \mathbf{x} + \int_0^t dt' \mathbf{v}(t') = \mathbf{N}(t) \mathbf{v} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\mathbf{N}'^\alpha(t) = \mathbf{R}^\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos \Omega t & s \sin \Omega t & 0 \\ -s \sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και

$$\mathbf{N}^\alpha(t) = \int_0^t dt' \mathbf{R}^\alpha(t) = \Omega^{-1} \begin{pmatrix} \sin \Omega t & s (1 - \cos \Omega t) & 0 \\ s (\cos \Omega t - 1) & \sin \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & \Omega t \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \Omega_\alpha = \frac{|e_\alpha| B}{m_\alpha c}, \quad s = s_\alpha = \frac{e_\alpha}{|e_\alpha|} = \pm 1$$

- Στο όριο  $\Omega \rightarrow 0$ : ελεύθερης κίνησης

$$\{x_i(t), v_i(t)\} = \{x_i + v_i t, v_i\} \quad i = 1, 2, 3$$

## 4 Στατιστική περιγραφή

### 4.1 Εξίσωση Liouville

$$L = L_R + L_\sigma + \lambda L_{int} \quad (11)$$

Οι τελεστές ορίζονται ως εξής:

$$L_R = \sum_{n=1}^N L_n^{(0)} + \sum_{j < n} \sum_{n=1}^N L_{jn}, \quad L_{int} = \sum_{n=1}^N L_{\sigma n} \quad (12)$$

-  $L_j^{(0)}$  τελεστής Liouville 1 σωματιδίου παρουσία του πεδίου:

$$L_j^{(0)} = -\mathbf{v}_j \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} - \frac{1}{m_j} \mathbf{F}_j^{(0)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_j} \quad (13)$$

-  $L_{ij}$ : όρος αμοιβαίας αλληλεπίδρασης:

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \mathbf{F}_{int}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) \left( \frac{1}{m_i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_i} - \frac{1}{m_j} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_j} \right) \\ &\equiv \frac{\partial V(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|)}{\partial \mathbf{x}_i} \left( \frac{1}{m_i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_i} - \frac{1}{m_j} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_j} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

$R$  σε μια κατάσταση ισορροπίας:  $\phi(\mathbf{v}_1) = \phi_{eq}(v_\perp, v_\parallel)$ , όπου:

$$\frac{\partial \phi_{eq}}{\partial t} = 0$$

- (τυπικά) κατάσταση Maxwell :

$$\phi_{Max}^{\alpha'}(v_1) = \prod_{i=1,2,3} \phi_0^{(i,\alpha')} e^{-v_{1,i}^2/\sigma_i^{\alpha'}} \quad (15)$$

όπου

$$\phi_0^{(i)} = \left( \frac{m_{\alpha'}}{2\pi T_{\alpha'}^{(i)}} \right)^{1/2} \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi \sigma_i^{\alpha'}}$$

και

$$\sigma_i^{\alpha'} \equiv 2 v_{i,th}^{\alpha'}{}^2 \equiv \frac{2T_i^{\alpha'}}{m_{\alpha'}}$$

$(i \in \{1, 2, 3\}) \equiv \{x, y, z\}$

## 4.2 Αναγωγή της εξίσωσης Liouville - θεωρία διαταραχών

- Εξίσωση Liouville : μάλλον δύσχρηστη !

- Συνάρτησης κατανομής ενός σωματιδίου  $f = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t)$ :

$$f(\Gamma_\sigma) = \int d\Gamma_R \rho(\Gamma) \quad (16)$$

- Η μέθοδος:

1. ορίζουμε 'ανηγμένες' συναρτήσεις κατανομής  $f_p$  για  $p$  σωματίδια ( $p = 1, 2, 3, \dots, N$ ) (βλ. π.χ. (16) για την  $f_1$ )

2. ολοκληρώνοντας κατάλληλα την (1), περνάμε σε ένα σύστημα  $N$  συζευγμένων εξισώσεων για τις  $f_p$

3. εκφράζουμε τις εξισώσεις αυτές σε σειρά ως προς  $\lambda$

4. έχοντας θεωρήσει ότι  $\lambda \ll 1$ , κρατάμε μόνο τους πρώτους όρους, έως και  $\lambda^2$ , της ιεραρχίας αυτής εξισώσεων, και

5. συνδυάζουμε τα δύο πρώτα μέλη της ιεραρχίας, που τώρα έχουν αποσυζευχθεί από τα υπόλοιπα, ώστε να πάρουμε μία κλειστή εξίσωση ως προς τη συνάρτηση  $f$ .



Τελικά:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - L_{\sigma}^{(0)}\right) f^{\alpha} &= \lambda^2 \sum_{\alpha'} \int d^3 \mathbf{x}_1 \int d^3 \mathbf{v}_1 L_I g_{\alpha\alpha'} + \mathcal{O}(\lambda^3) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - L_{\sigma}^{(0)} - L_1^{(0)}\right) g_{\alpha\alpha'} &= \lambda L_I \phi_{eq}^{\alpha'} f^{\alpha} + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned} \quad (17)$$

-  $g = g_{\alpha\alpha'}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1; t)$ : συνάρτηση συσχέτισης (*correlation function*):

$$g_{\alpha\alpha'} = f_2^{\alpha\alpha'} - \phi^{\alpha'} f^{\alpha}$$

- Για μη αλληλεπιδρώντα σωματίδια (οπότε  $f_2 = f_1 f_1$ ): εξίσωση VLASOV σε τάξη  $\lambda^1$

### 4.3 Τελεστής κρούσεων - 'κυρίαρχη εξίσωση'

Λύνοντας τη δεύτερη εξίσωση και αντικαθιστώντας στην πρώτη:

$$\mathcal{K} = \sum_{\alpha'} n_{\alpha'} \int_0^t d\tau \int d\mathbf{x}_1 \int d\mathbf{v}_1 L_I e^{L_0 \tau} L_I \phi_{eq}^{\alpha'}(\mathbf{v}_1) f^{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t - \tau) \quad (18)$$

(master equation)

Επιρροή:

(α) του δυναμικού αλληλεπίδρασης  $V(r)$ , μέσω του τελεστή  $L_I$   
 (β) των φυσικών χαρακτηριστικών του πλάσματος (πυκνότητα, θερμοκρασία), μέσω της συνάρτησης κατάστασης ισορροπίας  $\phi_{eq}$  - και, ιδιαίτερα:

(γ) του μαγνητικού πεδίου  $\mathbf{B}$ , μέσω του  $e^{L_0 \tau} = e^{L_{\sigma}^{(0)} \tau} e^{L_1^{(0)} \tau}$ .

## 5 Μία ‘ψευδο-Μαρκοβιανή’ προσέγγιση

- Υπόθεση:

$$f(t - \tau) \approx e^{-L_0 \tau} f(t) \quad (19)$$

- Ασυμπτωτική συμπεριφορά:  $t \rightarrow \infty$  ως άνω όριο στο χρονικό ολοκλήρωμα της (18).

- Αποτέλεσμα:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{1}{m} \mathbf{F}_{\text{ext}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} [\mathbf{A}(\mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} + \mathbf{G}(\mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \frac{m}{m_1} \mathbf{a}(\mathbf{v})] f \quad (20)$$

- πλάσμα χωρικά ομογενές, δηλ.  $f = f(\mathbf{v}; t)$ :

εξίσωση τύπου FOKKER-PLANCK (F.P.):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + m^{-1} \mathbf{F}^{(0)} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = - \frac{\partial}{\partial v_i} (\mathcal{F}_i f) + \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} (D_{ij} f) \quad (21)$$

- τροποποιημένη εξίσωση διάχυσης

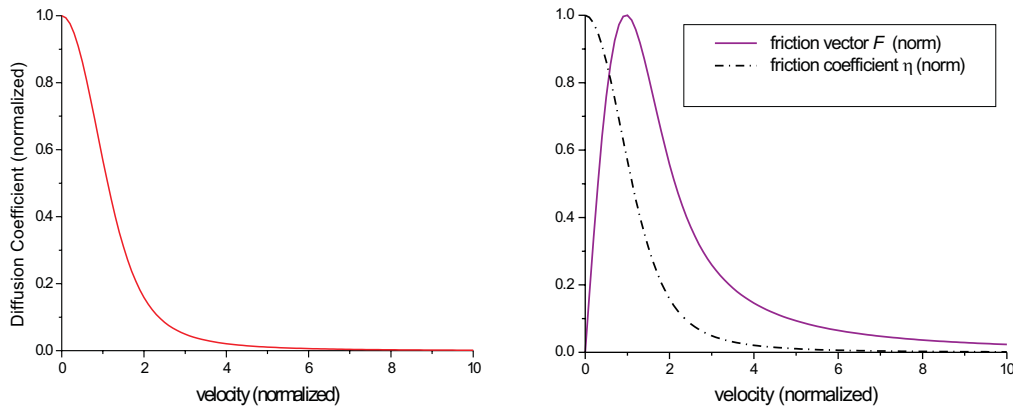
( $3 \times 3$  τετραγωνικός πίνακας διάχυσης  $\mathbf{D} = \mathbf{A}$ )

- όρο ‘ολίσθησης’ (drift): το 3-διάστατο διάνυσμα  $\vec{\mathcal{F}}^{(V)}$ :

$$\mathcal{F}_i^{(V)} = \left(1 + \frac{m}{m_1}\right) \frac{\partial D_{ij}}{\partial v_j} \quad (22)$$

= Δυναμική τριβή!

(βλ. περίπτωση μη-μαγνητισμένου πλάσματος)



Σχήμα 3: Απεικονίζονται (α) ο συντελεστής διάχυσης και (β) το διάνυσμα τριβής (μέτρο)  $\mathcal{F}_i = -\eta(v) v_i$  (συνοδευόμενο από το συντελεστή δυναμικής τριβής  $\eta(v)$ ), ως προς την ταχύτητα του σωματιδίου  $v$  (κανονικοποιημένη επί της ταχύτητας ήχου) για ηλεκτροστατικό πλάσμα μη μαγνητισμένο (χρησιμοποιώντας στοιχεία από το [7]).

### 5.1 Intermezzo: Η εξίσωση Fokker-Planck - κίνηση Brown

Αν:

$$D = const. \quad \mathcal{F} = -\eta v$$

$$(\eta = const. \in \mathfrak{R})$$

Εξίσωση Fokker-Planck (F.P.) (βασική μορφή)· σε 1δ π.χ.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v}(\eta v f) + D \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} f \quad (23)$$

$$(D = \eta \frac{k_B T}{m}).$$

- Κίνηση Brown
- A.Einstein / P.Langevin (μελέτη κίνησης Brown )
- Kramers (περιγραφή χώρου φάσεων)
- S. Chandrasekhar στην Αστρονομία κ.ά.

## 5.2 Εξίσωση Fokker-Planck σε 6 διαστάσεις

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + m^{-1} \mathbf{F}_L \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} + \frac{1}{m} \mathbf{F}_{\text{ext}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{\partial}{\partial v_i} (\mathcal{F}_i f) + \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} (D_{ij} f)$$

- 6 × 6 πίνακας διάχυσης  $\mathbf{D}$ :

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}}^\Theta(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{0}} & \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbf{G}}}^T \\ \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbf{G}}} & \underline{\underline{\mathbf{A}}} \end{pmatrix}$$

- 6 - d διάνυσμα τριβής:  $\vec{\mathcal{F}} = (\mathbf{0}, \vec{\mathcal{F}}^{(V)})^T$

## 5.3 Μαθηματικές ιδιότητες - πρόβλημα θετικότητας

- η πυκνότητα πιθανότητας  $f$  πρέπει να παραμένει

(α) πραγματική,

(β) κανονικοποιημένη στη μονάδα, και

(γ) θετική

ενώ εξελίσσεται στο χρόνο κάτω από τη δράση του τελεστή,

(δ) πρέπει να τείνει μονοτονικά προς μία κατάσταση ισορροπίας

(‘θεώρημα-H’).

- ο πίνακας διάχυσης  $\mathbf{D}$  πρέπει να είναι θετικά ορισμένος, δηλ.

πρέπει,  $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^6$ :

$$(\mathbf{a}, \mathbf{D}\mathbf{a}) = \mathbf{a}^T \mathbf{D}\mathbf{a} = \mathbf{a}^T \mathbf{D}^{\text{SYM}} \mathbf{a} \geq 0$$

Αυτό το κριτήριο σαφώς δεν ικανοποιείται εδώ!

$$\det \mathbf{D}^\Theta = -(\det \mathbf{C})^2 \leq 0$$

## 6 Μία διαφορική προσέγγιση

- ‘Δανειζόμαστε’ ένα τελεστή από την *Κβαντική Κινητική Θεωρία*:

$$\mathcal{A}_{t'} \cdot = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt' U^{(0)}(-t') \cdot U^{(0)}(t') \quad (24)$$

- Markov-ιανός τελεστής: απώλεια φαινομένου ‘μνήμης’

### 6.1 Ομογενές σύστημα

Εάν  $f = f(\mathbf{v}; t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{e}{mc} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = & \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial v_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial v_y^2} \right) [D_{\perp}(\mathbf{v}) f] + \frac{\partial^2}{\partial v_z^2} [D_{\parallel}(\mathbf{v}) f] \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial v_x} [\mathcal{F}_x(\mathbf{v}) f] - \frac{\partial}{\partial v_y} [\mathcal{F}_y(\mathbf{v}) f] - \frac{\partial}{\partial v_z} [\mathcal{F}_z(\mathbf{v}) f] \right] \end{aligned}$$

### 6.2 Γενική περίπτωση: μη-ομογενές σύστημα

- Εάν  $f = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{e}{mc} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = & \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial v_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial v_y^2} \right) [D_{\perp}(\mathbf{v}) f] + \frac{\partial^2}{\partial v_z^2} [D_{\parallel}(\mathbf{v}) f] \right. \\ & + 2s \Omega^{-1} \left[ \frac{\partial^2}{\partial v_x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial v_y \partial x} \right] [D_{\perp}(\mathbf{v}) f] \\ & \left. + \Omega^{-2} [D_{\perp}^{(XX)}(\mathbf{v})] \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial v_x} [\mathcal{F}_x(\mathbf{v}) f] - \frac{\partial}{\partial v_y} [\mathcal{F}_y(\mathbf{v}) f] - \frac{\partial}{\partial v_z} [\mathcal{F}_z(\mathbf{v}) f] \right. \\ & \left. + s \Omega^{-1} \mathcal{F}_y(\mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial x} f - s \Omega^{-1} \mathcal{F}_x(\mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial y} f \right] \end{aligned}$$

## 7 Συντελεστές διάχυσης

### 7.1 Γενική μορφή

- Συντελεστές διάχυσης:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \\ \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \end{array} \right\} &= \frac{n}{m^2} \int_0^{t \rightarrow \infty} d\tau \int d\mathbf{x}_1 \int d\mathbf{v}_1 \phi_{eq}(\mathbf{v}_1) \\ &\quad \mathbf{F}_{\text{int}}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|) \otimes \mathbf{F}_{\text{int}}(|\mathbf{x}(-\tau) - \mathbf{x}_1(-\tau)|) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{N}'^T(\tau) \\ \mathbf{N}^T(\tau) \end{array} \right\} \\ &= \frac{n}{m^2} \int_0^\infty d\tau \mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t, t - \tau) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{N}'^T(\tau) \\ \mathbf{N}^T(\tau) \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

- Διάνυσμα τριβής:

$$F_i = \left(1 + \frac{m}{m_1}\right) \frac{\partial D_{ij}}{\partial v_j} \quad (26)$$

- Συναρτήσεις χρονικής συσχέτισης (correlations) των δυνάμεων αλληλεπίδρασης

- σύνδεση του μηχανισμού των κρούσεων με τους μικροσκοπικούς νόμους κίνησης των σωματιδίων, για ένα δεδομένο δυναμικό πρόβλημα.

### 7.2 Υπολογισμός της ανεπτυγμένης μορφής για το πλάσμα

Υπόθεση εργασίας:

- 1.  $R$  σε κατανομή Maxwell (βλ.(15) )
- 2. αλληλεπιδράσεις  $V(r)$  τύπου Debye

- αποτέλεσμα (σε αδιάστατη μορφή):

$$\left\{ \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} D_{\perp} \\ D_{\angle} \\ D_{\perp}^{(XX)} \end{array} \right\} \\ D_{\parallel} \end{array} \right\} = D_0 \Lambda \int_0^t d\tau' \int_1^{x_{max}} dx e^{\Lambda^2(1-x^2)} \sin^2 \frac{\tau'}{2} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\{1,0\}} e^{-\tilde{v}_{\parallel}^2}$$

$$J_0(2\Lambda \sqrt{x^2 - 1} \tilde{v}_{\perp} \sin \frac{\tau'}{2}) \tilde{F}_{\{\perp, \parallel\}} \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2} \cos \tau' \\ (-s^{\alpha}) \frac{1}{2} \sin \tau' \\ (1 + \frac{1}{2} \cos \tau') \\ 1 \end{array} \right\}$$

όπου

$$x \equiv \frac{\tilde{k}_{\perp}}{k_D} = \left(1 + \frac{k_{\perp}^2}{k_D^2}\right)^{1/2} \quad \tau' = \Omega\tau \quad D_0 \equiv \frac{2\sqrt{2} n e^4}{m^2 \sqrt{k_B T}}$$

(συχνότητα κρούσεων πλάσματος - Spitzer).

- Οι συναρτήσεις  $\tilde{F} = \tilde{F}(\phi(x, \tau'), \tilde{v}_{\parallel})$  είναι:

$$\tilde{F}_{\{\perp, \parallel\}}^{\alpha'} = \pm \sqrt{\pi} \phi + \frac{\pi}{4} \sum_{s=\pm 1, -1} \left[ (1 \mp 2 \phi^2 \mp s 2 \phi \tilde{v}_{\parallel}) e^{(\phi + s \tilde{v}_{\parallel})^2} \text{Erfc}(\phi + s \tilde{v}_{\parallel}) \right]$$

όπου

$$\phi = \frac{1}{2} \Lambda \tau' x, \quad \Lambda = \sqrt{2} \frac{\omega_p}{\Omega}, \quad \tilde{v}_{*} = \left(\frac{m v_*^2}{2k_B T}\right)^{1/2}, \quad * \in \{\perp, \parallel\}$$

$$k_D = \left(\frac{4\pi e^2 n_{\alpha}}{k_B T_{\alpha}}\right)^{1/2} \quad \omega_{p,\alpha} = \left(\frac{4\pi e^2 n_{\alpha}}{m_{\alpha}}\right)^{1/2}$$

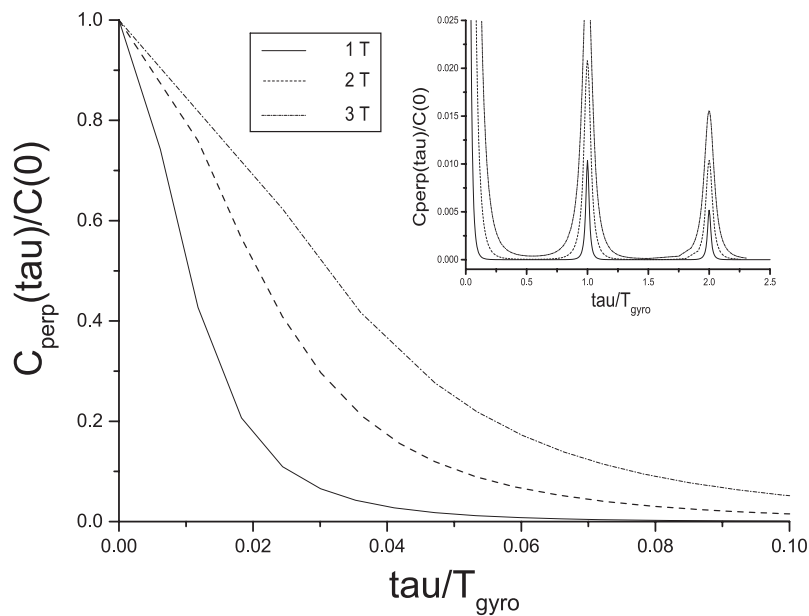
$$\text{Erfc}(x) = 1 - \text{Erf}(x) \equiv 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

## 8 Παραμετρική μελέτη των συντελεστών διάχυσης

Για ένα πλάσμα ηλεκτρονίων με

- θερμοκρασία  $T = 10 \text{ KeV}$
- πυκνότητας  $n = 10^{14} \text{ cm}^{-3} = 10^{20} \text{ m}^{-3}$
- $\omega_{p,e} = 5.64 \cdot 10^{11} \text{ s}^{-1}$
- $\Omega_e = 1.76 \cdot 10^{11} \times B \text{ s}^{-1}$  ( $B$  σε Tesla ).

Συσχέτιση  $C_{\perp}(\tau)$ · βλ. σχήμα 4.

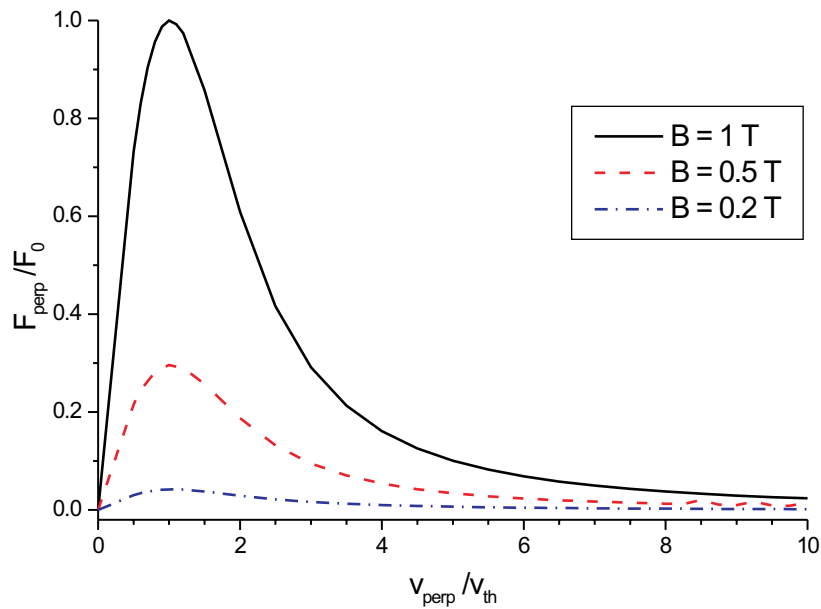
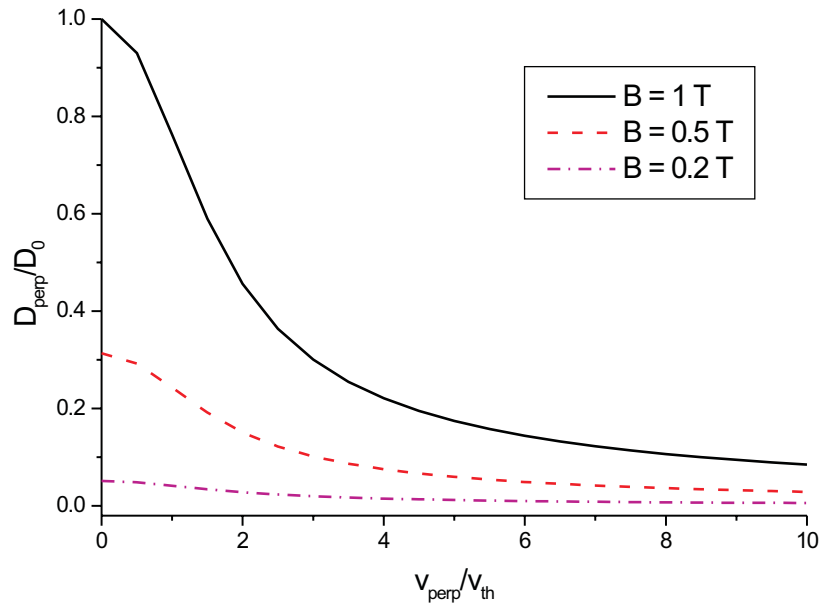


Σχήμα 4: Στο πρώτο σχήμα έχουμε αναπαραστήσει το κάθετο μέρος της συνάρτησης συσχέτισης αλληλεπίδρασης  $C_{\perp}(\tau; v_{\perp}, v_{\parallel}, B)$  ως συνάρτηση του χρόνου  $\tau$  (μετρούμενου σε περιόδους περιστροφής  $T_c = 2\pi/\Omega$ ), για διαφορετικές τιμές του  $B$  ( $\sim \Omega$ ). Έχουμε θεωρήσει τιμές  $v_{\perp} = v_{\parallel} = v_{th} = (T/m)^{1/2}$ . Παρατηρείστε τις κορυφές (αποσβενόμενες), κάθε περίοδο  $T$ .

- Εξάρτηση από το πεδίο!
- Περιορισμός των σωματιδίων από το πεδίο - τα σωματίδια ‘κολούν’ στην ελικοειδή τους τροχιά.

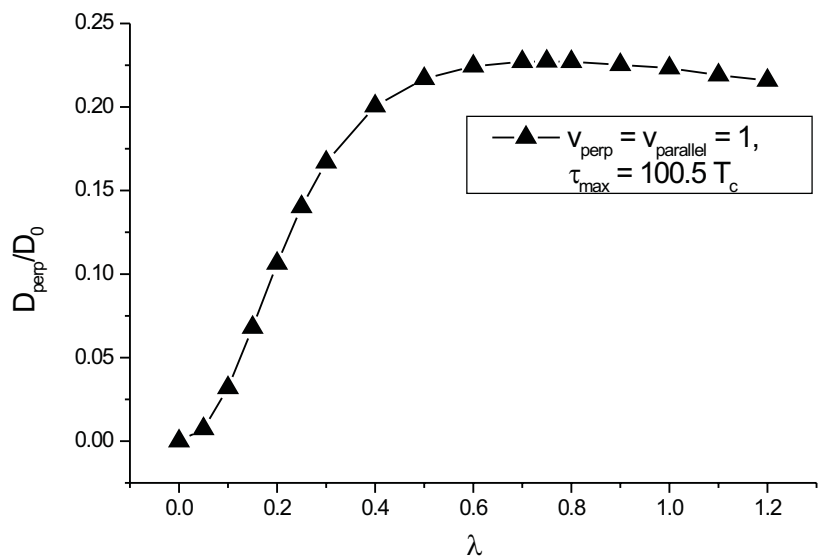
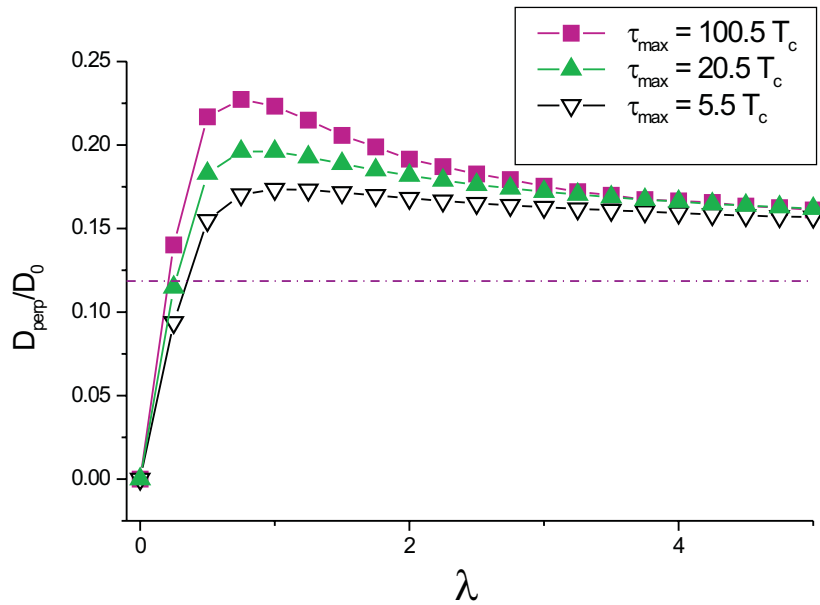


- εξάρτηση από την ταχύτητα.



Σχήμα 5: Απεικονίζονται (α) ο συντελεστής διάχυσης  $D_{\perp}$  και (β) το διάνυσμα τριβής (μέτρο)  $\mathcal{F}_{\perp}$  (κανονικοποιημένα κατάλληλα) ως συναρτήσεις της ταχύτητα του σωματιδίου  $v_{\perp}$  κάθετα στο πεδίο (κανονικοποιημένη επί της ταχύτητας ήχου) για ηλεκτροστατικό πλάσμα μαγνητισμένο. Η τιμή όλων των συντελεστών αυξάνεται με το πεδίο.

- εξάρτηση από το πεδίο.



Σχήμα 6: Ο εγκάρσιος συντελεστής διάχυσης  $D_{\perp}$  ως συνάρτηση της αδιάστατης παραμέτρου  $\Lambda$  ( $\sim 1/\Omega$  - βλ. ορσ. στο κείμενο). Η ασυμπτωτική τιμή (γραμμοσκιασμένη ευθεία) αντιστοιχεί στο όριο  $\Lambda \rightarrow \infty$ , δηλαδή στη μη-μαγνητισμένη περίπτωση ( $\Lambda \rightarrow \infty$  σημαίνει  $\Omega \rightarrow 0$ ). Στο σχήμα (β), έχουμε εστιάσει στην περιοχή γύρω από το  $\Lambda \approx 1$ . Και στα δύο σχήματα έχουμε θεωρήσει  $v_{\perp} = v_{\parallel} = v_{th} = (T/m)^{1/2}$ . Οι διαφορετικές καμπύλες του σχήματος (α) αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές του άνω ορίου  $t$  στη χρονική ολοκλήρωση - βλ. (;;).

*Rem.*  $\Lambda (\sim 1/\Omega)$ .

- περιοχή όπου  $\Lambda \gg 1$ : κοντά στη μη-μαγνητισμένη περίπτωση
- ικανοποιητική η περιγραφή *Landau* (για  $\Omega \rightarrow 0$ ).
- περιοχή γύρω από το  $\Lambda \approx 1$ : έντονη εξάρτηση από το πεδίο - επομένως δεν δικαιολογείται η παράλειψή του στον όρο κρούσεων!

## 9 Συμπέρασμα

Στηριζόμενοι στις βασικές αρχές της Στατιστικής Μηχανικής Εκτός Ισορροπίας, παρουσιάσαμε μία μέθοδο για τη σωστή περιγραφή ενός πλάσματος μέσα σε ένα ομογενές εξωτερικό πεδίο. Εστιάσαμε κυρίως, πέρα από τη μεθοδολογία, σε δύο σημεία:

1ον) στη χωρική εξάρτηση της συνάρτησης κατανομής, η οποία πρέπει να περιγραφεί σωστά ώστε να διατηρούν οι συναρτήσεις πιθανότητας το φυσικό τους χαρακτήρα,

και

2ον) δείξαμε ότι, σε αντίθεση με την ευρέως διαδεδομένη αντίληψη ότι ο όρος κρούσεων δεν εξαρτάται 'και πολύ' από το πεδίο (και άρα η παραδοσιακή περιγραφή Landau για την α-μαγνήτιστη περίπτωση αρκεί), μπορεί σε μία περιοχή τιμών των φυσικών μας παραμέτρων η εξάρτηση αυτή να είναι σημαντική.

# Αναφορές

- [1] Βλ. 'Εισαγωγή στην κινητική θεωρία': διάλεξη κ. Ι. Βομβορίδη στην ίδια σειρά μαθημάτων (σε αυτό το σχολείο).
- [2] Βλ. 'Εισαγωγή στο πλάσμα και τη μαγνητορευστοδυναμική': διάλεξη κ. Α. Γκραιίκου στην ίδια σειρά μαθημάτων.
- [3] L.D. Landau & E. M. Lifshitz, 1982, *Statistical Physics*, Part 1, Pergamon Press; επίσης: R. Balescu, *Equilibrium and Non-Equilibrium Statistical Mechanics*, Wiley, 1975.
- [4] R. Balescu, *Transport Processes in Plasmas, vol. 1, Classical Transport* North Holland, Amsterdam, 1988.
- [5] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 1980, Addison-Wesley.
- [6] Ι. Κουράκης, *Kinetic Theory and Transport Processes in Magnetized Plasma*, διδακτορική διατριβή, U.L.B. (Ελεύθερο Πανεπιστήμιο Βρυξελλών), 2002 (υπό προετοιμασία).
- [7] R. Balescu, *Statistical Mechanics of Charged Particles*, Wiley, 1963.
- [8] C.W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods*, Springer-Verlag 1985.
- [9] Η κλασσική αναφορά για τέτοια προβλήματα είναι οι εργασίες των: G. E. Uhlenbeck & L. S. Ornstein (1930) και S. Chandrasekhar (1943)· και οι δύο βρίσκονται ανατυπωμένες στο: N. Wax, 1954, *Noise and Stochastic Processes*, Dover, New York.
- [10] E. B. Davies, 1980, *One-Parameter Semigroups*, Academic Press, London.
- [11] A.P.Grecos, C.Tzanakis, *Physica A* 151 (1988).
- [12] Ι.Κourakis, *Plasma Phys.Control.Fusion* **41** 587 (1999); επίσης: "Derivation and properties for a kinetic equation for a charged particle interacting with a magnetized plasma", A.Grecos & Ι.Κourakis (υπό προετοιμασία).
- [13] Ι. Κourakis, D. Carati & B. Weyssow, *Proceedings of the 2000 ICPP Conference (Québec, Canada)*, pp. 49 - 53.
- [14] Βλ. 'Κύματα και αστάθειες στο πλάσμα': διάλεξη κ. Α. Βλάχου σε αυτό το σχολείο.
- [15] Ι. Κourakis, "Relaxation times for magnetized plasma: a parametric study" (υπό προετοιμασία).