Κινητική εξίσωση **Fokker-Planck** από τις μικροσκοπικές εξισώσεις κίνησης για συστήματα πολλών σωμάτων μέσα σε εξωτερικό πεδίο δυνάμεων: εφαρμογή στο πλάσμα

Ι. Κουράκης
Ruhr Universität Bochum, Fakultät für Physik und Astronomie
Theoretische Physik IV, D-44780 Bochum
ioannis@tp4.rub.de
σε συνεργασία με τον κ. Καθ. Α. Γκραίκο
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Ένωση Euratom - Ελληνική Δημοκρατία

22nd February 2005

1. Εισαγωγή - Θεωρητικό πλαίσιο

Ενδιαφερόμαστε για τη φυσική περιγραφή της δυναμικής ενός μεγάλου συστήματος N σωματίων ($j = 1, 2, ..., N$), τα οποία αλληλεπιδρούν:

- μεταξύ τους (κρούσεις)

- με εξωτερικά πεδία.

Εφαρμογή:

Πλάσμα = μεγάλη συλλογή από φορτισμένα σωμάτια (e^-, i^+, ...)

Ιδιαιτερότητα:

- ηλεκτροστατικές αλληλεπιδράσεις μεγάλης εμβέλειας

- παρουσία ηλεκτρομαγνητικών πεδίων, δυνάμεις *Lorentz*.

1.1 Στατιστική Μηχανική - ανασκόπηση εννοιών

* Πυκνότητα πιθανότητας (συνάρτηση κατανομής) ρ_N, στο χώρο φάσεων $\Gamma_N = \{\mathbf{x_j}, \mathbf{v_j}\}$.

* Εξίσωση **Liouville** για N σωμάτια:

$$\frac{\partial \rho_N}{\partial t} = L_N \, \rho_N \tag{1}$$

* Γενική (*formal*) λύση της εξίσωσης Liouville :

$$\rho_N(t) = e^{L_N(t-t_0)} \, \rho_N(t_0) \tag{2}$$

* $e^{L_N(t-t_0)}$: τελεστής χρονικής εξέλιξης - η πλήρης γνώση του ισοδυναμεί με τη γνώση της λύσης του προβλήματος κίνησης (N σωμάτων !)

* Εξίσωση Κινητικής Εξέλιξης (για 1 σωμάτιο, π.χ.: $\rho_1(\Gamma_1) = f$)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{T}\{f\} \tag{3}$$

1.2 Κινητική Εξίσωση - Τελεστής κρούσεων

Γενική μορφή:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + m^{-1}\mathbf{F}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \mathcal{K}\{f\} \qquad (4)$$

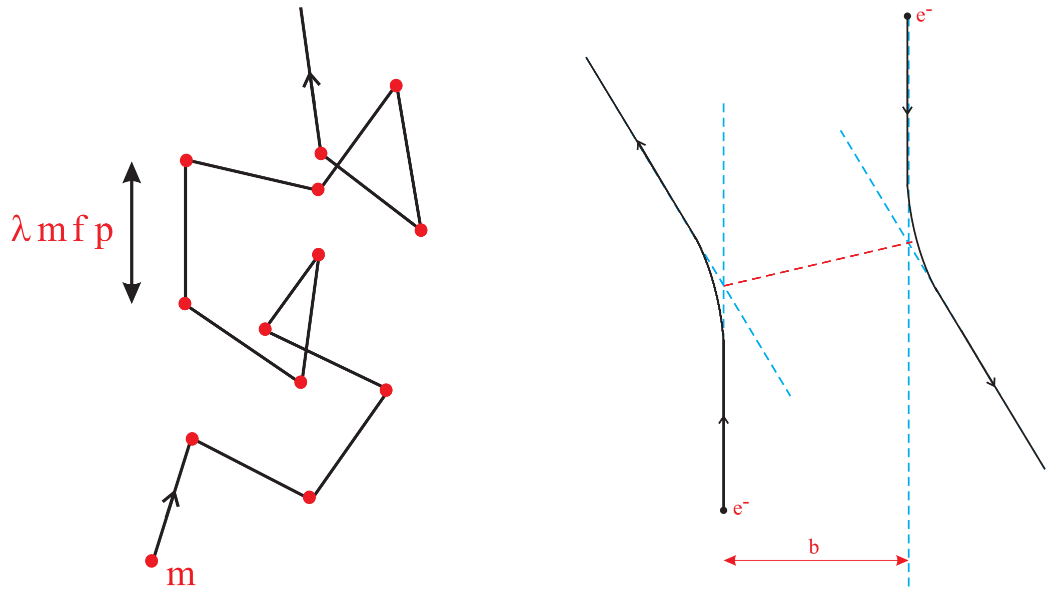
* $F = F_{ext} + F_{int}$: εξωτερικές δυνάμεις και δυνάμεις μέσου πεδίου (Vlasov).

* Ο τελεστής κρούσεων $\mathcal{K}$ πρέπει να λάβει υπόψην του την ύπαρξη του πεδίου δυνάμεων.

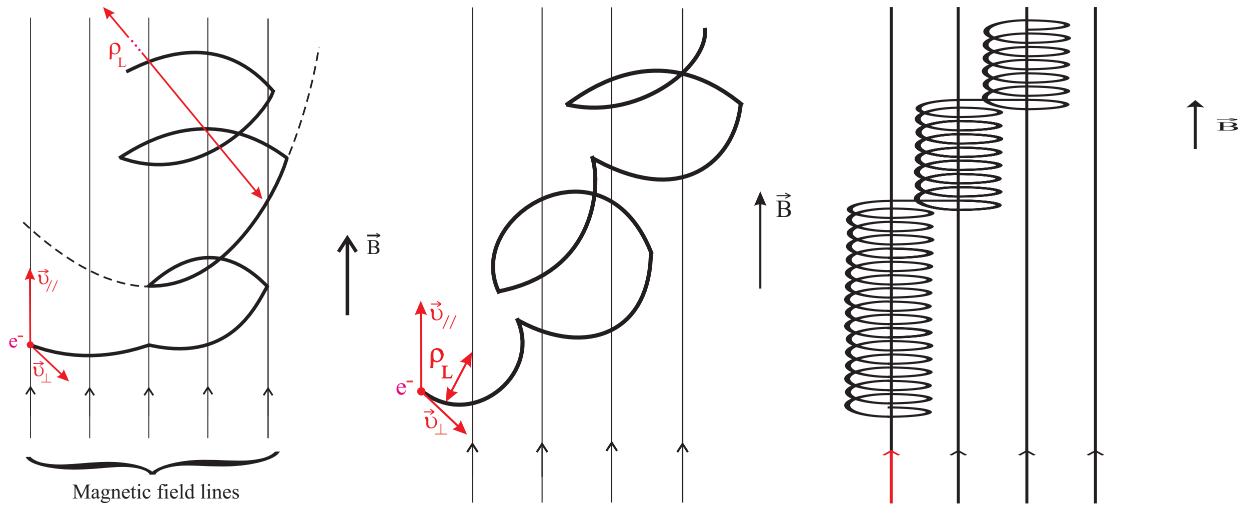
* F_{int} και $\mathcal{K}$ εκφράζουν τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ σωματιδίων.

Οι γνωστοί τελεστές κρούσεων χρησιμοποιούνται με επιφύλαξη στη Φυσική Πλάσματος:

- BOLTZMANN: Δεν εφαρμόζεται για αλληλεπιδράσεις μεγάλου βεληνεκούς (Coulomb).
- VLASOV: Δεν περιλαμβάνει όρο κρούσεων (μη-αντιστρεψιμότητα, Θεώρημα H).
- LANDAU: Περιλαμβάνει όρο κρούσεων, όχι όμως εξωτερικό πεδίο.
- FOKKER-PLANCK: Φαινομενολογική περιγραφή στοχαστικών διαδικασιών, μη αυστηρή σύνδεση με τη μικροσκοπική δυναμική παρουσία πεδίου.



Σχήμα 1: Αλληλεπίδραση μεταξύ σημειακών σωματιδίων - παρατηρείστε τη διαφορά μεταξύ
(α) σημειακών αλληλεπιδράσεων μεταξύ αφόρτιστων σωματιδίων (σφαιρών)
και
(β) ηλεκτροστατικών αλληλεπιδράσεων μεγάλης εμβέλειας μεταξύ φορτισμένων σωματιδίων.



Σχήμα 2: Σχηματική απεικόνιση της τροχιάς συγκρουόμενων φορτίων, κατά την παρουσία μεγνητικού πεδίου. Συγκρίνετε την τυπική κλίμακα αλληλεπίδρασης (μήκος Debye r_D) με την τυπική κλίμακα περιστροφικής κίνησης (ακτίνα Larmor ρ_L) σε τρεις περιπτώσεις:
(α) $\rho_L \gg r_D$, (β) $\rho_L \approx r_D$ και (γ) $\rho_L \ll r_D$.

2.3 Μακροσκοπική περιγραφή

* Παρατηρήσιμο μέγεθος $A(\mathbf{x}; t)$ = μέση τιμή του a :

$$A = \int d\mathbf{v}\, a\, f \; \equiv < a >_{\Gamma_v}$$

όπου a: συν/ση των μικροσκοπικών μεταβλητών $\{\mathbf{x_j}, \mathbf{v_j}\}$,

π.χ. πυκνότητα $n =< 1 >_{\Gamma_v}$, ταχύτητα $\mathbf{u} =< \mathbf{v} >_{\Gamma_v}$, κ.ο.κ.

Η εξέλιξη του A στο χρόνο θα υπακούει μία σχέση της μορφής:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int d\mathbf{v}\, a f = \int d\mathbf{v} \frac{\partial a}{\partial t} f \simeq \int d\mathbf{v}\, a \frac{\partial f}{\partial t} = \int d\mathbf{v}\, a\, \mathcal{T} f = \dots$$

$\rightarrow$ Ρευστοδυναμική περιγραφή ενός Στατιστικού συστήματος

$\rightarrow$ Μαγνητοϋδροδυναμική *(MHD)* Θεωρία του Πλάσματος

Ref. [R. Balescu, *Statistical Mechanics*, 1975] κ.ά.

2. Περιγραφή του μοντέλου - **Test-particle formalism**

Συστατικά:

- Δεξαμενή (*'reservoir'* R), σε θερμική ισορροπία (τυπικά $\phi_R = \phi_{Maxwell}$)

$$\partial_t \phi_R = L_R \phi_R = 0$$

- Σωμάτιο αναφοράς (*test-particle*: σ) ·

- Εξωτερικό πεδίο δυνάμεων·

- Ασθενής σύζευξη μεταξύ R και σ .

Εφαρμογή 1: 3δ πλάσμα σε ομογενές - στατικό μαγνητικό πεδίο

$$\mathbf{B} = B\,\hat{z}\,.$$

Εφαρμογή 2: συζευγμένοι αρμονικοί ταλαντωτές (Α.Τ.), 1δ.
Εφαρμογή 3: ελεύθερη κίνηση (χωρίς πεδίο).

3. Χαμιλτονιανή συνάρτηση - εξισώσεις κίνησης

- Χαμιλτονιανή:

$$H = H_R + H_\sigma + \lambda\, H_{int} \tag{5}$$

- $\lambda \ll 1$ (ασθενής αλληλεπίδραση)

- H_R: Χαμιλτονιανή της δεξαμενής (N σωματιδίων)

$$H_R = \sum_{j=1}^{N} H_j + \sum_{j<n} \sum_{n=1}^{N} V_{jn} \tag{6}$$

- H_j: όρος 1 σωματιδίου ($j = 1, 2, ..., N$ και σ)·
- H_{int}: όρος αλληλεπίδρασης ανάμεσα στα δύο υποσυστήματα:

$$H_{int} = \sum_{n=1}^{N} V_{\sigma n}$$

- $V_{ij} \equiv V(|\mathbf{x_i} - \mathbf{x_j}|) \quad (i, j = 1, 2, ..., N, \sigma)$.

- Εφαρμογή αναφοράς 1 (Α.Τ. 1δ):

$$H_j = \frac{1}{2} m_j v_j^2 + \frac{1}{2} m_j \omega_j^2 x_j^2$$

- Εφαρμογή αναφοράς 2 (πλάσμα):

$$H_j(\mathbf{x_j}, \mathbf{p_j}) = \frac{1}{2m_j} \left| \mathbf{p_j} - \frac{e_j}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x_j}) \right|^2 \equiv \frac{1}{2} m_j v_j^2$$

όπου $\mathbf{A}(\mathbf{x_j})$ είναι το διανυσματικό μαγνητικό πεδίο, δηλ.

$$\mathbf{B}(\mathbf{x_j}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x_j}) \,.$$

[H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 1980] κ.ά.

- Εφαρμογή 3 (ελεύθερη κίνηση, χωρίς πεδίο):

$$H_j = \frac{1}{2} m_j v_j^2$$

3.1 Εξισώσεις κίνησης

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} \ ; \qquad \dot{\mathbf{v}} = \frac{1}{m} \left(\mathbf{F_0} + \lambda \, \mathbf{F_{int}} \right) \tag{7}$$

- $\mathbf{x} = (x, y, z), \quad \mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$.

- $\mathbf{F_0}$: Εξωτερική δύναμη (λόγω του πεδίου)

π.χ. δύναμη Lorentz: $\mathbf{F_L} = \frac{e}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$,

π.χ. δύναμη επαναφοράς: $\mathbf{F_0} = -m\omega_0^2 x^2$,

$\mathbf{F_0} = \mathbf{0}$, για ελεύθερο σωμάτιο, κ.ο.κ. ...

- $\mathbf{F_{int}}$: Δύναμη αλληλεπίδρασης

$$\mathbf{F_{int}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \sum V(|\mathbf{x} - \mathbf{x_j}|) \tag{8}$$

→ Κρούσεις: Τυχαία, "στοχαστική" διεργασία !

3.2 Λύση του ελεύθερου πρβλ. κίνησης (για $\lambda = 0$)

Πλάσμα:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}^{(0)}(t) &= \mathbf{v} + \frac{1}{m}\int_0^t dt'\, \mathbf{F_0}(t') = \mathbf{R}(t)\,\mathbf{v} \\
\mathbf{x}^{(0)}(t) &= \mathbf{x} + \int_0^t dt'\, \mathbf{v}(t') = \mathbf{x} + \mathbf{N}(t)\,\mathbf{v}
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\mathbf{N'}^{\alpha}(t) = \mathbf{R}^{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} \cos\Omega t & s\ \sin\Omega t & 0 \\ -s\ \sin\Omega t & \cos\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και

$$\mathbf{N}^{\alpha}(t) = \int_0^t dt'\, \mathbf{R}^{\alpha}(t) = \Omega^{-1} \begin{pmatrix} \sin\Omega t & s\ (1-\cos\Omega t) & 0 \\ s\ (\cos\Omega t - 1) & \sin\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & \Omega t \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \Omega_\alpha = |e_\alpha| B/m_\alpha c, \qquad s = s_\alpha = e_\alpha/|e_\alpha| = \pm 1$$

* Παρ. Στο όριο ελεύθερης κίνησης ($\mathbf{F_0} = \mathbf{0}$): $x_i(t) = x_i + v_i t\,,\, v_i(t) = v_i \qquad i = 1, 2, 3$
δηλ. $\mathbf{N} \to t\,\mathbf{I}, \qquad \mathbf{N}' \to \mathbf{I}$.

* Παρ. A.T. (1δ): για $F_0 = -m\omega_0^2 x^2$

$$x(t) = x_0 \cos\omega t + \omega^{-1} v_0 \sin\omega t\,, \qquad v(t) = -\omega x_0 \sin\omega t + v_0 \cos\omega t$$

- Γενική λύση για $\lambda = 0$ (υπόθεση):

$$\mathbf{v}^{(0)}(t) = \mathbf{M}'(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{N}'(t)\,\mathbf{v}\,, \qquad \mathbf{x}^{(0)}(t) = \mathbf{x} + \int_0^t dt'\,\mathbf{v}(t') = \mathbf{M}(t)\mathbf{x} + \mathbf{N}(t)\mathbf{v}$$

δηλ.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(0)}(t) \\ \mathbf{v}^{(0)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}(t) & \mathbf{N}(t) \\ \mathbf{M}'(t) & \mathbf{N}'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \equiv \mathbf{E}(t) \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \tag{10}$$

με την αρχική συνθήκη $\{\mathbf{x}, \mathbf{v}\} \equiv \{\mathbf{x}^{(0)}(0), \mathbf{v}^{(0)}(0)\}$ (δηλ. $\mathbf{E}(0) = \mathbf{I}$).
Για δεδομένο πρόβλημα σε d διαστάσεις ($d = 1, 2, 3$), η μορφή των $d \times d$ πινάκων $\{\mathbf{M}(t), \mathbf{N}(t)\}$ περιέχει τις φυσικές παραμέτρους του προβλήματος.

4. Στατιστική περιγραφή - Εξίσωση **Liouville**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = L\,\rho \; = (L_R + L_\sigma + \lambda\, L_{int})\,\rho$$

Οι τελεστές ορίζονται ως εξής:

$$L_R = \sum_{n=1}^{N} L_n^{(0)} + \sum_{j<n} \sum_{n=1}^{N} L_{jn}\,, \qquad\qquad L_{int} = \sum_{n=1}^{N} L_{\sigma n} \tag{11}$$

- $L_j^{(0)}$ τελεστής Liouville 1 σωματιδίου παρουσία του πεδίου $(j = 1, 2, ..., N$ και $\sigma)$:

$$L_j^{(0)} = -\mathbf{v}_j \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} - \frac{1}{m_j} \mathbf{F}_j^{(0)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_j} \tag{12}$$

- L_{ij}: όρος αμοιβαίας αλληλεπίδρασης:

$$L_{ij} = \frac{\partial V\,(|\mathbf{x_i} - \mathbf{x_j}|)}{\partial \mathbf{x_i}}\,(\frac{1}{m_i}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v_i}} - \frac{1}{m_j}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v_j}}) \tag{13}$$

4.1 Αναγωγή της εξίσωσης **Liouville** - Ιεραρχία **BBGKY -** Θεωρία διαταραχών

1. Ορίζουμε "ανηγμένες"συναρτήσεις κατανομής f_p για p σωματίδια ($p = 1, 2, ..., N$), π.χ.

$$f_1 = \int d\Gamma_R \, \rho(\Gamma) \, , \qquad f_2 = \int d\Gamma^{c1,\sigma} \, \rho(\Gamma) \, , \qquad \ldots \tag{14}$$

($\Gamma^{c1,\sigma} = \Gamma - \{\Gamma_1 \cup \Gamma_\sigma\}$, δηλ. $\Gamma^{c\sigma} = \Gamma - \Gamma_\sigma = \Gamma_R$, κ.ο.κ.) ·

2. Ιεραρχία εξισώσεων BBGKY: ολοκληρώνοντας κατάλληλα την (1), περνάμε σε ένα σύστημα N συζευγμένων εξισώσεων για τις f_p ·

3. εκφράζουμε τις εξισώσεις αυτές σε σειρά ως προς λ ·

4. έχοντας θεωρήσει ότι $\lambda \ll 1$, κρατάμε μόνο τους πρώτους όρους, έως και λ^2, της ιεραρχίας αυτής εξισώσεων (truncation), και

5. συνδυάζουμε τα δύο πρώτα μέλη της ιεραρχίας, που τώρα έχουν αποσυζευχθεί από τα υπόλοιπα, ώστε να πάρουμε μία κλειστή εξίσωση ως προς τη συνάρτηση $f = f_1$.

4.2 Τελεστής κρούσεων - “Κυρίαρχη Εξίσωση ” **(Master Equation)**

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - L_\sigma^{(0)}\right) f^\alpha = \mathcal{K} = \sum_{\alpha'} n_{\alpha'} \int_0^t d\tau \int d\mathbf{x_1} \int d\mathbf{v_1}\, L_I\, e^{L_0 \tau}\, L_I\, \phi_{eq}^{\alpha'}(\mathbf{v_1})\, f^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t - \tau) \tag{15}$$

Επιρροή:

(α) του δυναμικού αλληλεπίδρασης $V(r)$, μέσω του τελεστή $L_I = L_{1\sigma}$,

(β) του εξωτερικού (π.χ. μαγνητικού) πεδίου, μέσω του τελεστή $e^{L_0 \tau} = e^{L_\sigma^{(0)} \tau}\, e^{L_1^{(0)} \tau}$,

(γ) της προηγούμενης ιστορίας της συν/σης f (!): φαινόμενο μνήμης (μη-Μαρκοβιανή Εξ.).

- Έχουμε αμελήσει τις συσχετίσεις για $t = 0$.

5. Μία "ψευδο-Μαρκοβιανή" προσέγγιση

- "Μαρκοβιανή"προσέγγιση: $f(t-\tau) \approx e^{-L_0\,\tau} f(t)$ & ασυμπτωτική μελέτη: $t \to \infty$

$$\mathcal{K} \approx \sum_{\alpha'} n_{\alpha'} \int_0^{t\to\infty} d\tau \int d\mathbf{x_1} \int d\mathbf{v_1}\, L_I\, e^{L_0\,\tau}\, L_I\, \phi_{eq}^{\alpha'}(\mathbf{v_1})\, f^{\alpha}(t) \equiv \Theta\{f\} \qquad (16)$$

- Αποτέλεσμα: η Μ.Δ.Ε.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{1}{m}\mathbf{F_{ext}}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\left[\mathbf{A}(\mathbf{v})\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} + \mathbf{G}(\mathbf{v})\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \frac{m}{m_1}\mathbf{a}(\mathbf{v})\right] f \qquad (17)$$

- Εάν $f = f(\mathbf{v}; t)$, προκύπτει η εξίσωση διάχυσης τύπου FOKKER-PLANCK (F.P.)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + m^{-1}\mathbf{F}^{(0)}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{\partial}{\partial v_i}(\mathcal{F}_i^{(V)}\, f) + \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j}(D_{ij}\, f) \tag{18}$$

- όρος ολίσθησης (drift) = Δυναμική τριβή !:

$$\mathcal{F}_i^{(V)} = (1 + \frac{m}{m_1})\,\frac{\partial D_{ij}}{\partial v_j} \tag{19}$$

5.1 **Intermezzo:** Η εξίσωση **Fokker-Planck** στη μελέτη της κίνησης **Brown**

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v}(\eta\, v\, f) + D\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\, f \tag{20}$$

δηλ.: $D = \eta\, k_B\, T/m = \text{const.}$ $\qquad \mathcal{F} = -\eta\, v$ $(\eta = const. \in \Re)$.

- Πρβλ. A. Einstein / P. Langevin (μελέτη κίνησης *Brown*), Kramers (δυναμική περιγραφή στο χώρο φάσεων), S. Chandrasekhar στην Αστρονομία, κ.ά.

5.2 Εξίσωση **Fokker-Planck** στον 6-διάστατο χώρο φάσεων $\Gamma = \{\mathbf{x}, \mathbf{v}\}$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{1}{m}\mathbf{F}_{\mathbf{ext}}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{\partial}{\partial q_i}(\mathcal{F}_i\, f) + \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_j}(D_{ij}\, f) \equiv \Theta\{f\}$$

- 6×6 πίνακας διάχυσης $\mathbf{D}$, $6d$ διάνυσμα τριβής:

$$\mathbf{D}^{\Theta}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{2}\mathbf{G}^T \\ \frac{1}{2}\mathbf{G} & \mathbf{A} \end{pmatrix} \qquad \vec{\mathcal{F}} = (\mathbf{0}, \vec{\mathcal{F}}^{(V)})^T$$

5.3 Μαθηματικές ιδιότητες του τελεστή εξέλιξης - πρόβλημα θετικότητας

Η πυκνότητα κατανομής f πρέπει να παραμένει (κάτω από τη δράση του τελεστή)
(α) πραγματική ($f \in \Re$), (β) κανονικοποιημένη ($\int f = 1$), και (γ) μη αρνητική ($f \geq 0$)
(ορ. ημιομάδας)·
επίσης:
(δ) (Θεώρημα-Η) Μονοτονική σύγκλιση του συστήματος προς μία κατάσταση ισορροπίας.

$\longrightarrow$ Προϋπόθεση: πίνακας διάχυσης $\mathbf{D}$ θετικά ορισμένος: το κριτήριο δεν ικανοποιείται εδώ!

6. Μία διαφορετική προσέγγιση: ο τελεστής Φ

- Η κβαντική Κινητική Θεωρία ανοικτών συστημάτων προτείνει τον τελεστή:

$$\mathcal{A}_{t'} \cdot \; = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dt' \, U^{(0)}(-t') \; \cdot \; U^{(0)}(t') \tag{21}$$

- Markov-ιανός τελεστής: απώλεια φαινομένου μνήμης.
- Η δράση του τελεστή Φ (έχει αποδειχθεί ότι) διατηρεί τη θετικότητα της f (ορ. ημιομάδα).

[E.B. Davies, *One-Parameter Semigroups*, 1980; Davies, 1974; Tzanakis, 1988]

7. Κατασκευή του τελεστή στο πλάσμα μέσα σε μαγνητικό πεδίο· ομογενές πλάσμα

Εάν $f = f(\mathbf{v}; t)$ (ομογενές πλάσμα):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{e}{mc} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = [(\frac{\partial^2}{\partial v_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial v_y^2}) [D_\perp(\mathbf{v}) f] + \frac{\partial^2}{\partial v_z^2} [D_{||}(\mathbf{v}) f]$$
$$- \frac{\partial}{\partial v_x} [\mathcal{F}_x(\mathbf{v}) \, f] - \frac{\partial}{\partial v_y} [\mathcal{F}_y(\mathbf{v}) \, f] - \frac{\partial}{\partial v_z} [\mathcal{F}_z(\mathbf{v}) \, f]$$

7.1 Γενική μορφή του κινητικού τελεστή Φ: μη-ομογενές πλάσμα

- Εάν $f = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t)$:

$$
\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{e}{mc}(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = [(\frac{\partial^2}{\partial v_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial v_y^2})[D_\perp(\mathbf{v})f] + \frac{\partial^2}{\partial v_z^2}[D_{||}(\mathbf{v})f]
$$

$$
+ 2\,s\,\Omega^{-1}[\frac{\partial^2}{\partial v_x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial v_y \partial x}][D_\perp(\mathbf{v})f] \quad + \Omega^{-2}\,D_\perp^{(XX)}(\mathbf{v})(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})f
$$

$$
-\frac{\partial}{\partial v_x}[\mathcal{F}_x(\mathbf{v})\,f] - \frac{\partial}{\partial v_y}[\mathcal{F}_y(\mathbf{v})\,f] - \frac{\partial}{\partial v_z}[\mathcal{F}_z(\mathbf{v})\,f]
$$

$$
+ s\,\Omega^{-1}\,\mathcal{F}_y(\mathbf{v})\frac{\partial}{\partial x}f - s\,\Omega^{-1}\,\mathcal{F}_x(\mathbf{v})\frac{\partial}{\partial y}f
$$

- Όροι $\partial^2/\partial z \partial v_z$, $\partial^2/\partial z^2$ έχουν παραληφθεί.
- Νέος όρος διάχυσης $\perp$ $\mathbf{B}$, νέοι όροι $X - V$ διάχυσης ($\sim \partial f/\partial \mathbf{x}$).

8. Συν/στές της Εξ. **F.P.**- σύνδεση με το μικροσκοπικό δυναμικό πρόβλημα

8.1 Γενική μορφή

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x},\mathbf{v}) \\ \mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{v}) \end{array} \right\} = \frac{n}{m^2} \int_0^{t\to\infty} d\tau \int d\mathbf{x_1} \int d\mathbf{v_1}\, \phi_{eq}(\mathbf{v_1})$$

$$\mathbf{F_{int}}(|\mathbf{x}-\mathbf{x_1}|) \otimes \mathbf{F_{int}}(|\mathbf{x}(-\tau)-\mathbf{x_1}(-\tau)|) \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{N'}^{T}(\tau) \\ \mathbf{N}^{T}(\tau) \end{array} \right\}$$

$$= \frac{n}{m^2} \int_0^{\infty} d\tau\, \mathbf{C}(\mathbf{x},\mathbf{v};t,t-\tau) \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{N'}^{T}(\tau) \\ \mathbf{N}^{\mathbf{T}}(\tau) \end{array} \right\} \tag{22}$$

- Διάνυσμα τριβής:

$$F_i = (1+\frac{m}{m_1})\frac{\partial D_{ij}}{\partial v_j} \tag{23}$$

- $C_{ij} =< F_i(t) F_j(t-\tau) >$: Συναρτήσεις χρονικής συσχέτισης (*Kubo coeffs.*)

- Σύνδεση του μηχανισμού των κρούσεων με τους μικροσκοπικούς νόμους κίνησης !

8.2 Υπολογισμός της ανεπτυγμένης μορφής για το πλάσμα

Υπόθεση εργασίας: R σε κατανομή **Maxwell** και αλληλεπιδράσεις $V(r)$ τύπου **Debye** :

$$\left\{ \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} D_\perp \\ D_\angle \\ D_\perp^{(XX)} \end{array} \right\} \\ D_\parallel \end{array} \right\} = D_0 \, \Lambda \int_0^t d\tau' \int_1^{xmax} dx \; e^{\Lambda^2 \, (1-x^2) \, \sin^2 \frac{\tau'}{2}} (1 - \frac{1}{x^2})^{\{1,0\}} \; e^{-\tilde{v}_\parallel^2}$$

$$\times \, J_O(2\Lambda \sqrt{x^2 - 1} \, \tilde{v}_\perp \, \sin \frac{\tau'}{2}) \;\; \tilde{F}_{\{\perp, \parallel\}} \left\{ \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2} \, \cos \tau' \\ (-s^\alpha) \, \frac{1}{2} \, \sin \tau' \\ (1 + \frac{1}{2} \cos \tau') \end{array} \right\} \\ 1 \end{array} \right\}$$

όπου

$$x \equiv \frac{\tilde{k}_\perp}{k_D} = (1 + \frac{k_\perp^2}{k_D^2})^{1/2}, \qquad \tau' = \Omega \tau, \qquad D_0 \equiv \frac{2\sqrt{2} \, n \, e^4}{m^2 \, \sqrt{k_B T}} \, .$$

- Οι συναρτήσεις $\tilde{F} = \tilde{F}(\phi(x, \tau'), \tilde{v}_{||})$ είναι:

$$\tilde{F}^{\alpha'}_{\{\perp,||\}} = \pm\sqrt{\pi}\,\phi + \frac{\pi}{4} \sum_{s=+1,-1} \left[(1 \mp 2\,\phi^2 \mp s2\,\phi\,\tilde{v}_{||})\,e^{(\phi+s\,\tilde{v}_{||})^2}\,Erfc(\phi + s\,\tilde{v}_{||})\right]$$

όπου

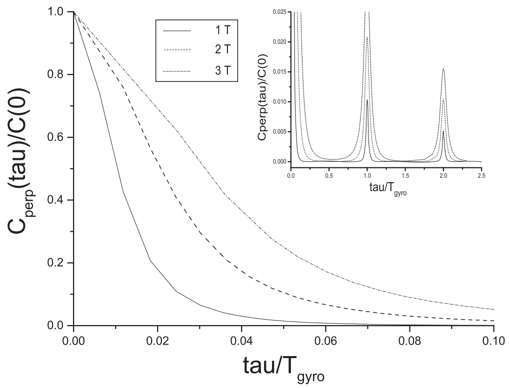
$$\phi = \frac{1}{2}\,\Lambda\,\tau'\,x\,, \qquad \Lambda = \sqrt{2}\,\frac{\omega_p}{\Omega}\,, \qquad \tilde{v}_* = (\frac{m v_*^2}{2k_B T})^{1/2}\,, \qquad * \in \{\perp, ||\}$$

$$k_D = (\frac{4\pi e_\alpha^2 n_\alpha}{k_B T_\alpha})^{1/2}\,, \qquad \omega_{p,\alpha} = (\frac{4\pi e_\alpha^2 n_\alpha}{m_\alpha})^{1/2}\,,$$

$$Erfc(x) = 1 - Erf(x) \equiv 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

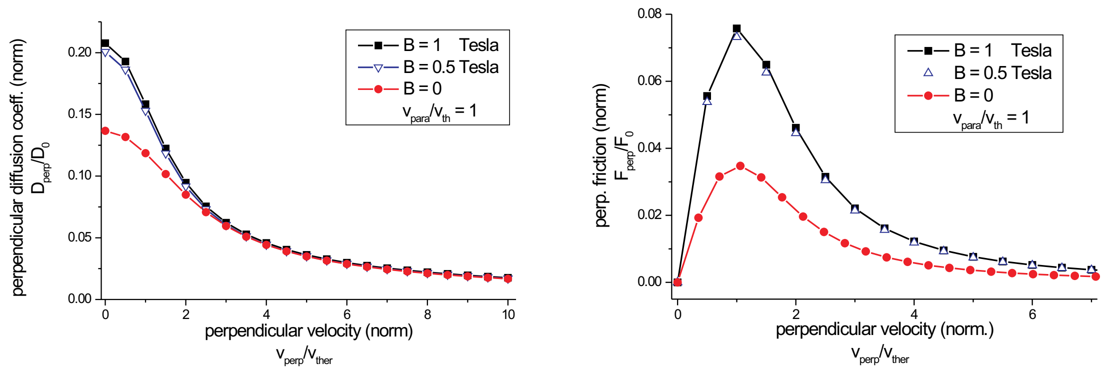
9. Παραμετρική μελέτη των συντελεστών διάχυσης

Θεωρώντας ένα πλάσμα ηλεκτρονίων με θερμοκρασία $T = 10\,KeV$, πυκνότητας $n = 10^{14}\,cm^{-3} = 10^{20}\,m^{-3}$, $\omega_{p,e} = 5.64 \cdot 10^{11}\,s^{-1}$, και $\Omega_e = 1.76\,10^{11} \times B \quad s^{-1}$ (B σε Tesla), μελετήσαμε τη συνάρτηση συσχέτισης $C_\perp(\tau)$ ως προς το χρόνο, και τους συντελεστές $D_{\perp,||}$ ως προς την ταχύτητα.

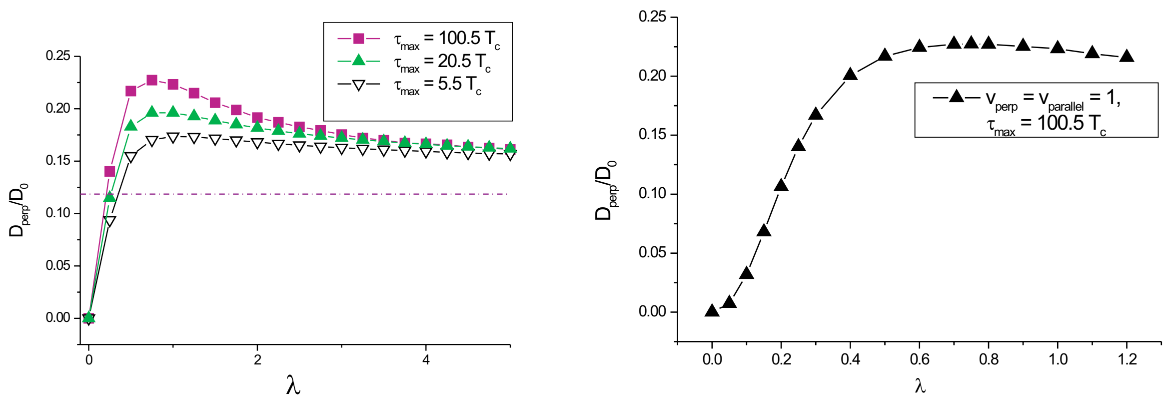


Σχήμα 3: Στο πρώτο σχήμα έχουμε αναπαραστήσει το κάθετο μέρος της συνάρτησης συσχέτισης αλληλεπίδρασης $C_\perp(\tau; v_\perp, v_{||}, B)$ ως συνάστηση του χρόνου τ (μετρούμενου σε περιόδους περιστροφής $T_c = 2\pi/\Omega$), για διαφορετικές τιμές του B ($\sim \Omega$). Έχουμε θεωρήσει τιμές $v_\perp = v_{||} = v_{th} = (T/m)^{1/2}$. Παρατηρείστε τις κορυφές (αποσβενόμενες), κάθε περίοδο T.

* Εξάρτηση από το πεδίο.
* Χωρικός περιορισμός από το πεδίο - τα σωματίδια κολλούν στην ελικοειδή τους τροχιά.
* Εξάρτηση από την ταχύτητα.



Σχήμα 4: Απεικονίζονται (α) ο συντελεστής διάχυσης $D_\perp$ και (β) το διάνυσμα τριβής (μέτρο) $\mathcal{F}_\perp$ (κανονικοποιημένα κατάλληλα) ως συναρτήσεις της ταχύτητα του σωματιδίου $v_\perp$ κάθετα στο πεδίο (κανονικοποιημένη επί της ταχύτητας ήχου) για ηλεκτροστατικό πλάσμα μαγνητισμένο. Η τιμή όλων των συντελεστών αυξάνεται με το πεδίο.



Σχήμα 5: Ο εγκάρσιος συντελεστής διάχυσης $D_\perp$ ως συνάρτηση της αδιάστατης παραμέτρου Λ ($\sim 1/\Omega$ - βλ. ορ. στο κείμενο). Η ασυμπτωτική τιμή (γραμμοσκιασμένη ευθεία) αντιστοιχεί στο όριο $\Lambda \to \infty$, δηλαδή στη μη-μαγνητισμένη περίπτωση ($\Lambda \to \infty$ σημαίνει $\Omega \to 0$). Στο σχήμα (β), έχουμε εστιάσει στην περιοχή γύρω από το $\Lambda \approx 1$. Και στα δύο σχήματα έχουμε θεωρήσει $v_\perp = v_{||} = v_{th} = (T/m)^{1/2}$. Οι διαφορετικές καμπύλες του σχήματος (α) αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές του άνω ορίου t στη χρονική ολοκλήρωση.

- περιοχή όπου $\Lambda \gg 1$ (ασθενές πεδίο): ικανοποιητική η περιγραφή **Landau** (για $\Omega \to 0$).
- περιοχή γύρω από το $\Lambda \approx 1$ (ισχυρό πεδίο, $\Omega \approx \omega_p$): έντονη εξάρτηση από το πεδίο!

10. Συμπέρασμα

- Στηριζόμενοι στις βασικές αρχές της Στατιστικής Μηχανικής Εκτός Ισορροπίας, παρουσιάσαμε μία μέθοδο για την περιγραφή της (μακροσκοπικής) συμπεριφοράς ενός μεγάλου συστήματος (N σωματιδίων), όπως προκύπτει από την μικροσκοπική κίνηση των σωματιδίων που το αποτελούν.

  Εστιάσαμε κυρίως σε δύο σημεία:

  – 1ον) στη χωρική εξάρτηση της συνάρτησης κατανομής, και

  – 2ον) στην εξάρτηση του τελεστή κρούσεων από το πεδίο.
- Δείξαμε ότι μία ευρέως χρησιμοποιούμενη ψευδο-Μαρκοβιανή προσέγγιση για τον τελεστή κρούσεων (τελεστής Θ) οδηγεί σε εσφαλμένα φυσικά αποτελέσματα δεν διατηρεί τη θετικότητα της ς.κ. f.
- Υιοθετώντας μία εναλλακτική Μαρκοβιανή προσέγγιση (τελεστής Φ), η οποία πληρεί τις αναμενόμενες μαθηματικές προϋποθέσεις, κατασκευάσαμε ένα σωστό τελεστή χρονικής εξέλιξης (τύπου **Fokker-Planck)** για ένα πλάσμα μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο.
- Η αριθμητική μελέτη των συντελεστών διάχυσης έδειξε ότι μπορεί, σε μία περιοχή τιμών των φυσικών παραμέτρων, η εξάρτηση από το πεδίο να είναι σημαντική.