

Κινητική εξίσωση Fokker-Planck για φορτισμένο σωματίδιο σε μαγνητισμένο πλάσμα ¹

I. Κουράκης * & Α. Γκραίκος*†

* *Université Libre de Bruxelles, Association Euratom - Etat Belge*
C.P. 231 Physique Statistique et Plasmas
boulevard du Triomphe, B-1050 Βρυξέλλες, Βέλγιο.
email: ikouraki@ulb.ac.be

† *Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Ένωση Euratom - Ελληνική Δημοκρατία*
Εργαστήριο Ρευστομηχανικής και Στροβιλομηχανών
Λεωφόρος Αθηνών, Πεδίον Άρεως, 383 34 Βόλος.
email: agrecos@mie.uth.gr

Περίληψη

Στηριζόμενοι σε βασικές αρχές της Στατιστικής Μηχανικής, παρουσιάζουμε τη μεθοδολογία που ακολουθείται για τη μελέτη της κατανομής ενός φορτισμένου σωματιδίου αναφοράς σε αλληλεπίδραση με ένα πλάσμα σε θερμοδυναμική ισορροπία μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο. Η στατιστική περιγραφή οδηγεί σε μία ολοκληρωτική 'κυρία' εξίσωση (*master equation*) που χαρακτηρίζεται από χρονική μνήμη, δηλαδή χωρίς χρονικό εντοπισμό (ιδιότητα Markov). Για ασθενείς αλληλεπιδράσεις, εφαρμόζοντας μεθόδους της θεωρίας ανοικτών συστημάτων, προκύπτει ότι η κατανομή του σωματιδίου ικανοποιεί μια κινητική εξίσωση τύπου Fokker-Planck. Οι συντελεστές σε αυτή την κινητική εξίσωση εξαρτώνται από τις μικροσκοπικές μεταβλητές (ταχύτητα του σωματιδίου), από φυσικές παραμέτρους (πυκνότητα, θερμοκρασία) και - κυρίως - από το εξωτερικό πεδίο, γεγονός που βεβαιώνει η αριθμητική μελέτη που ακολουθεί.

1 Εισαγωγή

Από την άποψη της Στατιστικής Μηχανικής, το πλάσμα είναι ένα σύστημα αποτελούμενο από ένα μεγάλο αριθμό (έστω N) φορτισμένων σωματιών, η δυναμική του οποίου περιγράφεται από μία πυκνότητα πιθανότητας (συνάρτηση κατανομής) ρ_N , στο συνολικό χώρο των φάσεων Γ_N . Η δυναμική της συνάρτησης ρ υπακούει την εξίσωση Liouville:

$$\frac{\partial \rho_N}{\partial t} = L_N \rho_N \quad (1)$$

(L_N είναι ο τελεστής Liouville που αντιστοιχεί στα N σωματίδια) [1]. Η γενική λύση της εξίσωσης Liouville γράφεται τυπικά ως εξής:

$$\rho_N(t) = e^{L_N(t-t_0)} \rho_N(t_0) \quad (2)$$

[2], [3]. Ο τελεστής χρονικής εξέλιξης $e^{L_N(t-t_0)}$ ενσωματώνει τα φυσικά χαρακτηριστικά του εκάστοτε προβλήματος: η πλήρης γνώση του ισοδυναμεί με τη γνώση της λύσης του προβλήματος

¹Σχολείο Φυσικής και Τεχνολογίας Σύντηξης, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Βόλος, 16-21 Μαΐου 2002.

κίνησης, παρουσία αλληλεπιδράσεων μεταξύ των σωματιδίων και, ενδεχομένως, εξωτερικών πεδίων. Η περιγραφή αυτή, αν και αυστηρή, παραμένει μάλλον αφηρημένη και δύσχρηστη για πρακτικές εφαρμογές, εξαιτίας του μεγάλου αριθμού μεταβλητών της ρ_N ². Η Κινητική Θεωρία αντιμετωπίζει το πρόβλημα με την αναγωγή της περιγραφής του συστήματος σε μία συνάρτηση f των μικροσκοπικών μεταβλητών Γ_I ενός σωματιδίου [2], η χρονική εξέλιξη της οποίας περιγράφεται από μία κατάλληλη Κινητική Εξίσωση. Η εξίσωση αυτή υπακούει στη γενική μορφή:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{T}\{f\} \quad (3)$$

όπου \mathcal{T} είναι ένας τελεστής κινητικής εξέλιξης, που ενσωματώνει τα φυσικά χαρακτηριστικά του προβλήματος που μελετάται. Η Κινητική Θεωρία αποσκοπεί έτσι στη σύνδεση της μακροσκοπικής περιγραφής ενός συστήματος με τους μικροσκοπικούς νόμους κίνησης των συστατικών του. Αυτό επιτυγχάνεται περιγράφοντας ένα παρατηρήσιμο φυσικό μέγεθος $A(t)$ ως τη μέση τιμή ενός μικροσκοπικού μεγέθους a :

$$A = \int d\mathbf{x} d\mathbf{v} a f$$

Η εξέλιξη του A στο χρόνο θα υπακούει μία σχέση της μορφής:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int d\mathbf{x} d\mathbf{v} a f = \int d\mathbf{x} d\mathbf{v} \frac{\partial a}{\partial t} f = \int d\mathbf{x} d\mathbf{v} a \frac{\partial f}{\partial t} = \int d\mathbf{x} d\mathbf{v} a \mathcal{T}f = \dots$$

(το πέρασμα από το 3ο μέλος στο 4ο αποτελεί υπόθεση ('αίτημα') της Στατιστικής Μηχανικής) [3]. Η διαδικασία αυτή ακολουθείται για τη μελέτη της χρονικής εξέλιξης ενός παρατηρήσιμου (μακροσκοπικού) μεγέθους και έχει οδηγήσει, όπως έχει ήδη αναφερθεί [2] στη θεμελίωση της *Μαγνητοϋδροδυναμικής Θεωρίας του Πλάσματος*.

Κινητική Εξίσωση - τελεστής κρούσεων: Μία Κινητική Εξίσωση υπακούει στη γενική μορφή:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + m^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \mathcal{K}\{f\} \quad (4)$$

όπου $f = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t)$ ³. Το αριστερό μέλος αντιστοιχεί απλά στη γνώριμη εξίσωση Liouville για ένα σωματίο (αγνοώντας τα υπόλοιπα):

$$\frac{\partial f}{\partial t} - L_1^{(0)} f = 0 \quad (5)$$

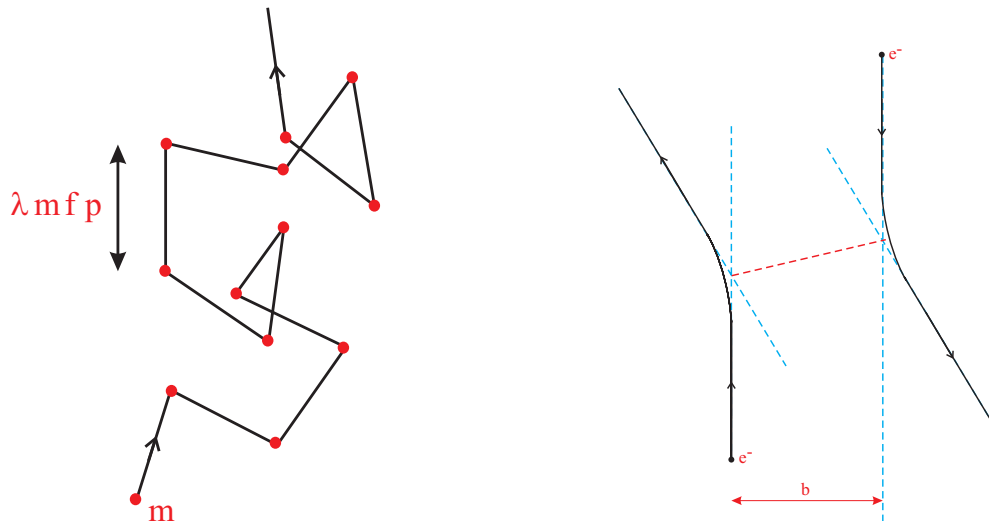
Παρατηρείστε τον τρίτο όρο στο αριστερό μέλος της (4), στον οποίο παρουσιάζεται η συνολική δύναμη \mathbf{F} που δέχεται το σωματίο. Στη γενική περίπτωση, ο όρος αυτός περιλαμβάνει, εκτός από τη δύναμη \mathbf{F}_{ext} που οφείλεται στο εξωτερικό πεδίο, και μία δύναμη \mathbf{F}_{mf} που οφείλεται στο φορτισμένο νέφος ιόντων που περιβάλλει το σωματίδιο⁴. Το δεξιό μέλος \mathcal{K} περιγράφει τις αλληλεπιδράσεις

²Για ένα σύστημα N σωματιδίων σε 3 διαστάσεις, ο συνολικός χώρος των φάσεων Γ_N αποτελείται από $6N$ μικροσκοπικές μεταβλητές, δηλαδή τις συνιστώσες θέσης x_i και ταχύτητας v_i του κάθε σωματιδίου ($i = 1, 2, 3$).

³Η εξάρτηση από τη θέση του σωματιδίου \mathbf{x} πολύ συχνά δεν λαμβάνεται υπόψη, σε κινητικές εξισώσεις όπως π.χ. η εξίσωση BOLTZMANN [3], η εξίσωση LANDAU (για την περιγραφή ηλεκτροστατικού πλάσματος χωρίς εξωτερικό πεδίο) [4] κ.ά. Σε αυτή την περίπτωση απουσιάζει ο δεύτερος όρος από το αριστερό μέλος.

⁴Ο όρος αυτός 'mf' ('mean-field': όρος μέσου πεδίου ή όρος Vlasov [3]) δεν θα μας απασχολήσει εδώ, εφόσον μηδενίζεται στο συγκεκριμένο πρόβλημα που θα μελετήσουμε.

(‘κρούσεις’) του σωματίου με τα υπόλοιπα σωματάρια γύρω του. Πρόκειται για τον όρο κρούσεων (ή τελεστή κρούσεων), που έχει συζητηθεί εκτεταμένα, στα πλαίσια της Στατιστικής Μηχανικής: η ύπαρξή του συνδέεται με τη μη-αντιστρεψιμότητα της μακροσκοπικής (στατιστικής) δυναμικής (σε αντίθεση δηλαδή με τη χρονική αντιστρεψιμότητα των νόμων της μηχανικής σε μικροσκοπικό επίπεδο). Η εύρεση της αναλυτικής μορφής του όρου κρούσεων για ένα δεδομένο φυσικό σύστημα απαιτεί εξαιρετική προσοχή, κυρίως στην περίπτωση αλληλεπιδράσεων μεγάλης κλίμακας εμβέλειας, όπως οι ηλεκτροστατικές (βλ. σχήμα 1). Στην περίπτωση όπου υπάρχει ένα εξωτερικό ηλεκτρο-



Σχήμα 1: Αλληλεπίδραση μεταξύ σημειακών σωματιδίων: παρατηρείστε την ποιοτική διαφορά μεταξύ (α) σημειακών αλληλεπιδράσεων μεταξύ αφόρτιστων σωματιδίων (σφαιρών) και (β) ηλεκτροστατικών αλληλεπιδράσεων μεγάλης εμβέλειας μεταξύ φορτισμένων σωματιδίων.

μαγνητικό πεδίο, ιδιαίτερη σημασία πρέπει να δοθεί στη επίπτωσή του στη γεωμετρία της τροχιάς των σωματιδίων μεταξύ διαδοχικών κρούσεων, εφόσον αυτή δεν θα είναι πλέον ευθύγραμμη αλλά ενδεχόμενα καμπυλωμένη εξαιτίας του πεδίου. Το γεγονός αυτό θα περιμέναμε να αντανακλάται στην ίδια τη δομή του τελεστή κρούσεων. Πιο συγκεκριμένα, στην περίπτωση του πλάσματος μέσα σε μαγνητικό πεδίο, η τροχιά είναι ως γνωστόν ελικοειδής [1], [4]. Η επίδραση του πεδίου αναμένεται επομένως να εκφράζεται μέσα από τον ‘ανταγωνισμό’ της τυπικής χωρικής κλίμακας της τροχιάς, δηλαδή της ακτίνας περιστροφής Larmor, και της τυπικής κλίμακας αλληλεπίδρασης (π.χ. μέση ελεύθερη διαδρομή ή, ορθότερα, το μήκος Debye) - (βλ. σχήμα 2)⁵ [4].

Το θέμα μας εδώ είναι η περιγραφή, από την πλευρά της Κινητικής Θεωρίας, ενός φορτισμένου σωματιδίου αναφοράς σε αλληλεπίδραση με ένα ομογενές πλάσμα, ευρισκόμενο μέσα σε ομογενές εξωτερικό πεδίο. Θα εστιάσουμε την προσοχή μας σε δύο σημεία ιδιαίτερης σημασίας: 1ον) την τροποποίηση του όρου κρούσεων της κινητικής εξίσωσης για την περίπτωση μίας χωρικά εξαρτώμενης (και όχι ομογενούς) κατανομής και, 2ον) την εξάρτηση του όρου κρούσεων από το εξωτερικό

⁵ Αυτή η περιγραφική απεικόνιση είναι ποιοτικά ορθή, αλλά όχι ποσοτικά αυστηρή: το πλάσμα σύντηξης χαρακτηρίζεται από ασθενείς αλληλεπιδράσεις, με αποτέλεσμα να αποκλείονται οι μεγάλες αποκλίσεις - μεγάλης γωνίας - από την αρχική τροχιά, λόγω των κρούσεων [2].

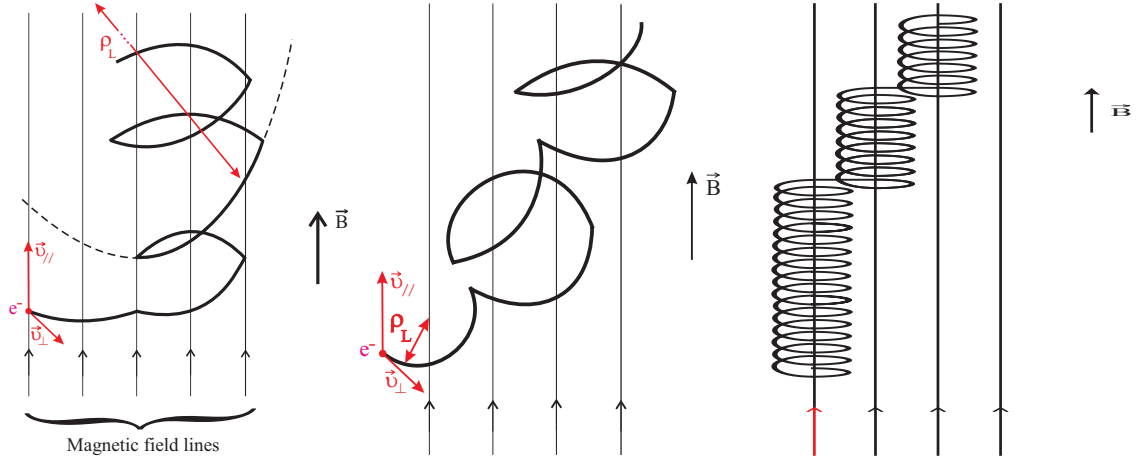


Figure 2: Σχηματική απεικόνιση της τροχιάς συγκρουόμενων φορτίων, κατά την παρουσία μαγνητικού πεδίου. Ανάμεσα στις διαδοχικές χρούσεις, τα σωμάτια περιστρέφονται ελικοειδώς (κίνηση Larmor). Συγκρίνετε την τυπική κλίμακα αλληλεπίδρασης (μήκος Debye r_D) με την τυπική κλίμακα περιστροφικής κίνησης (ακτίνα Larmor ρ_L) σε τρεις περιπτώσεις: (α) $\rho_L \gg r_D$, (β) $\rho_L \approx r_D$ και (γ) $\rho_L \ll r_D$.

πεδίο.

2 Περιγραφή του μοντέλου

Θεωρούμε ένα σύστημα N φορτισμένων σωματίων (πλάσμα) σε κατάσταση θερμικής ισορροπίας, το οποίο θα αποκαλούμε δεξαμενή ('reservoir' R). Το είδος των φορτίων θα υπο- δηλώνεται όπου χρειαστεί από το δείκτη $\alpha = e, i, \dots$ ⁶ (προφανώς: $\sum_{\alpha'} N_{\alpha'} = N$). Το σύστημα βρίσκεται μέσα σε ένα εξωτερικό πεδίο \mathbf{B} , το οποίο θεωρούμε ότι είναι ομογενές και στατικό, με διεύθυνση κατά τον άξονα z : $\mathbf{B} = B\hat{z}$. Εξαιτίας κάποιων τοπικών διακυμάνσεων, υποθέτουμε ότι ένα υποσύστημα από μικρό αριθμό σωματιδίων ($N_\sigma \ll N$) έχει ξεφύγει από την ομογενή κατάσταση που χαρακτηρίζει τη δεξαμενή και εξελίσσεται στο χρόνο, κινούμενο υπό την επίδραση του εξωτερικού πεδίου και σταδιακά επανερχόμενο προς την κατάσταση ισορροπίας υπό την επίδραση του θερμικού περιβάλλοντος. Από αυτά τα σωματίδια, θα εστιάσουμε την προσοχή μας σε ένα σωματίο αναφοράς (*test-particle*: σ) και θα παρακολουθήσουμε τη χρονική του εξέλιξη, μελετώντας το από τη σκοπιά της Στατιστικής Μηχανικής Εκτός Ισορροπίας.

3 Χαμιλτονιανή - εξισώσεις κίνησης

Το φυσικό μας σύστημα περιγράφεται από μία Χαμιλτονιανή συνάρτηση της μορφής:

$$H = H_R + H_\sigma + \lambda H_{int} \quad (6)$$

⁶ Δηλαδή $\alpha = e$ (= electron) για τα ηλεκτρόνια, p (= proton) για τα πρωτόνια κ.ο.κ.

όπου H_R, H_σ δηλώνουν, αντιστοίχως, τη Χαμιλτονιανή της δεξαμενής R και του σωματίου σ :

$$H_R = \sum_{j=1}^N H_j + \sum_{j < n} \sum_{n=1}^N V_{jn} \quad (7)$$

H_j είναι η Χαμιλτονιανή (όρος ενός σωματιδίου) για το j - σωματίδιο. Για κάθε σωματίδιο ($j = 1, 2, \dots, N$ και σ), η H_j είναι της μορφής:

$$H_j(\mathbf{x}_j, \mathbf{p}_j) = \frac{1}{2} m_j |\mathbf{p}_j - \frac{e_j}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}_j)|^2 \equiv \frac{1}{2} m_j v_j^2$$

(Γακωβιανή: $J = m_j^3$)[5] όπου $\mathbf{A}(\mathbf{x}_j)$ είναι το διανυσματικό μαγνητικό πεδίο:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}_j) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}_j)$$

Με H_{int} συμβολίζουμε την αλληλεπίδραση ανάμεσα στα δύο υποσυστήματα:

$$H_{int} = \sum_{n=1}^N V_{\sigma n}$$

όπου $V_{ij} \equiv V(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|)$ ($i, j = 1, 2, \dots, N, \sigma$) δηλώνει την ηλεκτροστατική δυναμική ενέργεια (Coulomb). Οι τυχαίες αλληλεπιδράσεις μεταξύ R και σ σωματίων διακρίνονται από τη χαρακτηριστική 'ετικέττα' λ . Οι ηλεκτροστατικές αλληλεπιδράσεις είναι ασθενείς, επομένως θεωρούμε ότι $\lambda \ll 1$.

Οι εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν από τη Χαμιλτονιανή είναι:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}; \quad \dot{\mathbf{v}} = \frac{1}{m} [\mathbf{F}_0 + \lambda \mathbf{F}_{int}(\mathbf{x}, \mathbf{v}; \mathbf{X}_R)] \quad (8)$$

όπου: $\{\mathbf{x}, \mathbf{v}\} \equiv \{\mathbf{x}_\sigma(t), \mathbf{v}_\sigma(t)\}$ και $\mathbf{X}_R \equiv \{\mathbf{x}_j(t), \mathbf{v}_j(t)\}$ ($j = 1, 2, 3 \dots N$). Παρατηρούμε την ύπαρξη δύο δυνάμεων: της μηδενικής τάξης δύναμης Lorentz $\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_L$ που οφείλεται στο εξωτερικό πεδίο:

$$\mathbf{F}_L = \frac{e}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (9)$$

και της δύναμης αλληλεπίδρασης:

$$\mathbf{F}_{int} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \sum V(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|) \quad (10)$$

η οποία οφείλεται στις τυχαίες αλληλεπιδράσεις μεταξύ του σ και των R - σωματίων γύρω του: πρόκειται για μια τυχαία (στοχαστική) φυσική διεργασία, εφόσον η δεξαμενή θεωρείται ότι βρίσκεται σε θερμική ισορροπία.

Ας παρατηρήσουμε ότι στο μοντέλο αυτό, το σωματίό μας ανταλλάζει ελεύθερα ενέργεια και ορμή με το περιβάλλον: το φυσικό υπο-σύστημα σ δεν είναι, επομένως, ούτε *συντηρητικό* ούτε *αυτόνομο*.

Αγνοώντας τις αλληλεπιδράσεις, τό σωματίδιο ακολουθεί τη γνωστή σπειροειδή τροχιά, συνδυασμός ελεύθερης μεταφορικής κίνησης παράλληλα στο πεδίο (δηλ. $\parallel \hat{z}$) και περιστροφικής κίνησης

στο επίπεδο xy , κάθετα προς αυτό. Η 3-διάστατη αυτή κίνηση περιγράφεται από την ακριβή λύση (για $\lambda = 0$) των εξισώσεων (8):

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^{(0)}(t) &= \mathbf{v} + \frac{1}{m} \int_0^t dt' \mathbf{F}_0(t') = \mathbf{x} + \mathbf{N}'(t) \mathbf{v} \\ \mathbf{x}^{(0)}(t) &= \mathbf{x} + \int_0^t dt' \mathbf{v}(t') = \mathbf{N}(t) \mathbf{v}\end{aligned}\quad (11)$$

($\{\mathbf{x}, \mathbf{v}\} \equiv \{\mathbf{x}^{(0)}(0), \mathbf{v}^{(0)}(0)\}$) όπου $\mathbf{R}(t)$ είναι ο πίνακας στροφής:

$$\mathbf{N}'^\alpha(t) = \mathbf{R}^\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos \Omega t & s \sin \Omega t & 0 \\ -s \sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και

$$\mathbf{N}^\alpha(t) = \int_0^t dt' \mathbf{R}^\alpha(t) = \Omega^{-1} \begin{pmatrix} \sin \Omega t & s(1 - \cos \Omega t) & 0 \\ s(\cos \Omega t - 1) & \sin \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & \Omega t \end{pmatrix}\quad (12)$$

Με Ω συμβολίζουμε τη γυροσκοπική κυκλική συχνότητα και s είναι το πρόσημο του φορτίου του σωματίου:

$$\Omega = \Omega_\alpha = \frac{|e_\alpha|B}{m_\alpha c}, \quad s = s_\alpha = \frac{e_\alpha}{|e_\alpha|} = \pm 1\quad (13)$$

Παρατηρούμε ότι στο όριο $\Omega \rightarrow 0$ παίρνουμε τις εξισώσεις της ελεύθερης κίνησης:

$$\{x_i(t), v_i(t)\} = \{x_i + v_i t, v_i\} \quad i = 1, 2, 3.$$

4 Στατιστική περιγραφή

4.1 Εξίσωση Liouville

Έστω ρ η συνάρτηση κατανομής του συστήματος στο συνολικό χώρο φάσεων $\Gamma = \Gamma_R \cup \Gamma_\sigma$. Όπως γνωρίζουμε, η χρονική εξέλιξη του ρ υπόκειται στη δράση του γραμμικού τελεστή Liouville $L \cdot = [H, \cdot]$. Η διαδικασία για την κατασκευή της εξίσωσης Liouville (1) για το πρόβλημά μας είναι η συνηθισμένη, όπως περιγράφεται στα βιβλία Στατιστικής Μηχανικής [3]. Στην περίπτωση μας, ο τελεστής Liouville έχει την ίδια δομή με τη Χαμιλτονιανή:

$$L = L_R + L_\sigma + \lambda L_{int}\quad (14)$$

Οι τελεστές ορίζονται ως εξής:

$$L_R = \sum_{n=1}^N L_n^{(0)} + \sum_{j < n} \sum_{n=1}^N L_{jn}, \quad L_{int} = \sum_{n=1}^N L_{\sigma n}\quad (15)$$

όπου $L_j^{(0)}$ είναι η Λιουβιλλιανός τελεστής ενός σωματιδίου παρουσία του πεδίου:

$$L_j^{(0)} = -\mathbf{v}_j \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} - \frac{1}{m_j} \mathbf{F}_j^{(0)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_j}\quad (16)$$

και L_{ij} είναι ο όρος αμοιβαίας αλληλεπίδρασης:

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \mathbf{F}_{\text{int}}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) \left(\frac{1}{m_i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_i} - \frac{1}{m_j} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_j} \right) \\ &\equiv \frac{\partial V(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|)}{\partial \mathbf{x}_i} \left(\frac{1}{m_i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_i} - \frac{1}{m_j} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_j} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

Σύμφωνα με την παραπάνω περιγραφή, η δεξαμενή βρίσκεται σε μια κατάσταση ισορροπίας, επομένως $\phi(\mathbf{v}_1) = \phi_{eq}(v_\perp, v_\parallel)$, όπου⁷:

$$\partial_t \phi_{eq} = 0$$

Πρόκειται τυπικά, αν και όχι απαραίτητα, για μια κατάσταση Maxwell της μορφής:

$$\phi_{Max}^{\alpha'}(v_1) = \prod_{i=1,2,3} \phi_0^{(i,\alpha')} e^{-v_{1,i}^2/\sigma_i^{\alpha'}} \quad (18)$$

όπου $\phi_0^{(i)} = \left(\frac{m_{\alpha'}}{2\pi T_{\alpha'}^{(i)}}\right)^{1/2} \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma_i^{\alpha'}}$ είναι η σταθερά κανονικοποίησης και η παράμετρος σ συνδέεται με τη θερμική ταχύτητα (ταχύτητα ήχου) $\sigma_i^{\alpha'} \equiv 2 v_{i,th}^{\alpha'}{}^2 \equiv \frac{2T_i^{\alpha'}}{m_{\alpha'}}$ ($i \in \{1, 2, 3\} \equiv \{x, y, z\}$).

4.2 Αναγωγή της εξίσωσης Liouville - θεωρία διαταραχών

Όπως αναφέραμε παραπάνω, η πλήρης εξίσωση Liouville είναι μάλλον περιορισμένης χρησιμότητας για αναλυτικούς χειρισμούς, στην πράξη. Σκοπός μας είναι λοιπόν η εύρεση μίας εξίσωσης που να περιγράφει την εξέλιξη της συνάρτησης κατανομής ενός σωματιδίου $f = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t)$:

$$f(\Gamma_\sigma) = \int d\Gamma_R \rho(\Gamma) \quad (19)$$

Η μέθοδος που ακολουθείται είναι εξαιρετικά μακριά αλλά αρκετά στερεότυπη, γι' αυτό θα παραλείψουμε τις λεπτομέρειες⁸. Σε γενικές γραμμές, η διαδικασία έχει ως εξής:

- (α) ορίζουμε 'αλληγμένες' συναρτήσεις κατανομής f_p για p σωματίδια ($p = 1, 2, 3, \dots, N$) (βλ. π.χ. (19) για την f_1),
- (β) ολοκληρώνοντας κατάλληλα την (1), περνάμε σε ένα σύστημα N συζευγμένων εξισώσεων⁹ για τις f_p ,
- (γ) εκφράζουμε τις εξισώσεις αυτές σε σειρά ως προς την παράμετρο λ ,
- (δ) έχοντας θεωρήσει ότι $\lambda \ll 1$, κρατάμε μόνο τους πρώτους όρους, έως και λ^2 , της ιεραρχίας αυτής εξισώσεων και
- (ε) συνδυάζουμε τα δύο πρώτα μέλη της ιεραρχίας, που τώρα έχουν αποσυνζευχθεί από τα υπόλοιπα, ώστε να πάρουμε μία κλειστή εξίσωση ως προς τη συνάρτηση f .

⁷Οι δύο αυτές συνιστώσες της ταχύτητας, v_\perp κάθετα και v_\parallel παράλληλα προς το μαγνητικό πεδίο, διατηρούνται αναλλοίωτες.

⁸Η αναλυτική διαδικασία περιγράφεται στην παραπομπή [6], και σε γενικότερη μορφή στην [4].

⁹Το σύστημα αυτό, στην πλήρη του μορφή, αντιστοιχεί ακριβώς στην εξ. (1). Αποκαλείται στη βιβλιογραφία 'η Ιεραρχία εξισώσεων BBGKY', από τα αρχικά των ονομάτων των πρώτων επινοητών του.

4.3 Τελεστής κρούσεων - ‘κυρία εξίσωση’ (Master equation)

Η διαδικασία που περιγράφεται στην προηγούμενη παράγραφο οδηγεί στο σύστημα:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - L_{\sigma}^{(0)} \right) f^{\alpha} &= \lambda^2 \sum_{\alpha'} \int d^3 \mathbf{x}_1 \int d^3 \mathbf{v}_1 L_I g_{\alpha\alpha'} + \mathcal{O}(\lambda^3) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - L_{\sigma}^{(0)} - L_1^{(0)} \right) g_{\alpha\alpha'} &= \lambda L_I \phi_{eq}^{\alpha'} f^{\alpha} + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned} \quad (20)$$

όπου με σ_{α} και $1_{\alpha'}$ συμβολίζουμε, αντίστοιχα, το σωματίδιο που παρατηρούμε και έναν εκπρόσωπο (στην τύχη) από τα $N_{\alpha'}$ (ταυτόσημα) σωματίδια του πληθυσμού α' . Οι διαφορικοί τελεστές Liouville $L_0^{(j)}$ και $L_I \equiv L_{\sigma 1}$ έχουν οριστεί παραπάνω. Θυμίζουμε ότι $f = f^{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t)$, ενώ $\phi = \phi_{eq}^{\alpha'}(\mathbf{v}_1)$. Τέλος, με $g = g_{\alpha\alpha'}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1; t)$ έχουμε συμβολίσει τη *συνάρτηση συσχέτισης (correlation function)*:

$$g_{\alpha\alpha'}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1; t) = f_2^{\alpha\alpha'}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1; t) - \phi^{\alpha'}(\mathbf{v}_1) f^{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t)$$

Προφανώς, η g θα ήταν μηδέν εάν επρόκειτο για μη αλληλεπιδρώντα σωματίδια (οπότε $f_2 = f_1 f_1$). Σε αυτή την περίπτωση με αυτή τη θεωρία θα καταλήγαμε απλώς στην εξίσωση Vlasov σε τάξη λ^1 [2].

Λύνοντας τη δεύτερη εξίσωση και αντικαθιστώντας στην πρώτη, καταλήγουμε σε μία εξίσωση που έχει ακριβώς τη μορφή της (4), όπου ο όρος κρούσεων στο δεξιό μέλος έχει τη μορφή:

$$\mathcal{K} = \sum_{\alpha'} n_{\alpha'} \int_0^t d\tau \int d\mathbf{x}_1 \int d\mathbf{v}_1 L_I e^{L_0 \tau} L_I \phi_{eq}^{\alpha'}(\mathbf{v}_1) f^{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t - \tau) \quad (21)$$

Πρόκειται για μία ‘κυρία εξίσωση’ (*master equation*), η οποία μέσα στη φαινομενικά δύσβατη μορφή της ενσωματώνει όλη τη φυσική του μηχανισμού των κρούσεων. Είναι εμφανής η επιρροή:

- (α) του δυναμικού αλληλεπίδρασης, μέσω του τελεστή L_I - θυμηθείτε τον ορισμό (17),
- (β) των φυσικών χαρακτηριστικών του πλάσματος (πυκνότητα, θερμοκρασία), μέσω της συνάρτησης κατάστασης ισορροπίας ϕ_{eq} - βλ. (18) - και, ιδιαίτερα:
- (γ) του μαγνητικού πεδίου \mathbf{B} , μέσω του τελεστή χρονικής εξέλιξης $e^{L_0 \tau} = e^{L_{\sigma}^{(0)} \tau} e^{L_1^{(0)} \tau}$ - βλ. (16).

Ο εξασκημένος αναγνώστης θα παρατηρήσει ότι έχει εξαφανιστεί ο όρος μέσου πεδίου (Vlasov): αυτό ήταν αναμενόμενο για λόγους συμμετρίας, εφόσον θεωρήσαμε ότι η δεξαμενή βρίσκεται σε μία *χωρικά ομογενή* κατάσταση.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η ‘μνήμη’ που χαρακτηρίζει τον τελεστή κρούσεων: η τιμή της συνάρτησης f τη χρονική στιγμή t εξαρτάται από ολόκληρη την προηγούμενη ‘ιστορία’ της (μέσω της $f(t - \tau)$). Βεβαίως, μπορούμε τυπικά να αξιοποιήσουμε τη γνωστή γενική λύση της εξ. (5) γράφοντας:

$$f(t - \tau) = e^{-L \tau} f(t) \quad (22)$$

αυτό όμως θα ήταν μάλλον άσκοπο, εφόσον η λύση αυτή παραμένει ‘αφηρημένη’: η ακριβής γνώση αυτής της λύσης θα προϋπέθετε την ακριβή γνώση της θέσης ενός σωματίου με δεδομένη την παρουσία όλων των άλλων (πρόβλημα N σωματίων)! Είναι εμφανές ότι δεν έχουμε ακόμη φτάσει στον τελικό σκοπό μας, που είναι η εύρεση μιας (κινητικής) εξίσωσης ‘κλειστής’ ως προς την $f = f(t)$: μιλάμε, σε αυτή την περίπτωση, για έναν τελεστή χρονικής εξέλιξης με *Markov-ιανό*

χαρακτήρα (δηλαδή με χρονικά εντοπισμένη δράση, χωρίς φαινόμενο μνήμης). Διάφορες μέθοδοι έχουν προταθεί στο παρελθόν, με σκοπό τον ‘εκΜαρχοβιανισμό’ της παραπάνω εξίσωσης. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε - και θα συγκρίνουμε - δύο διαφορετικές προσεγγίσεις του προβλήματος.

5 Μία ‘ψευδο-Μαρχοβιανή’ προσέγγιση

Η παραδοσιακή προσέγγιση στο παραπάνω πρόβλημα συνίσταται στην υπόθεση εργασίας ότι αρκεί να κάνουμε χρήση της λύσης (11) του προβλήματος ελεύθερης κίνησης (χωρίς δηλαδή αλληλεπιδράσεις: βλ. (8) για $\lambda=0$). Αντικαθιστούμε λοιπόν με:

$$f(t - \tau) \approx e^{-L_0 \tau} f(t) \quad (23)$$

και συνδυάζοντας τις σχέσεις (12), (16) και (17) με την (21), προκειμένου να υπολογίσουμε την ακριβή μορφή του τελεστή κρούσεων \mathcal{K} . Εφόσον ενδιαφερόμαστε για την ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης, θέτουμε $t \rightarrow \infty$ ως άνω όριο στο χρονικό ολοκλήρωμα της (21).

Η διαδικασία που περιγράφεται εδώ έχει υιοθετηθεί από ένα αριθμό εργασιών πάνω στο πλάσμα. Κατά τρόπο γενικό, το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι μία διαφορική εξίσωση 2ης τάξης με μερικές παραγώγους:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{1}{m} \mathbf{F}_{\text{ext}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} [\mathbf{A}(\mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} + \mathbf{G}(\mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \frac{m}{m_1} \mathbf{a}(\mathbf{v})] f \quad (24)$$

όπου όλοι οι διαφορικοί τελεστές δρουν πάνω σε ό,τι βρίσκεται προς τα δεξιά τους. Οι συντελεστές θα οριστούν παρακάτω.

Στην περίπτωση που το πλάσμα είναι χωρικά ομογενές, δηλαδή $f = f(\mathbf{v}; t)$, ο 2ος όρος και στα δύο μέλη εξαφανίζεται. Με ένα μικρό μετασχηματισμό, η εξίσωση τότε παίρνει τη γνώριμη μορφή της εξίσωσης FOKKER-PLANCK (F.P.):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + m^{-1} \mathbf{F}^{(0)} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{\partial}{\partial v_i} (\mathcal{F}_i f) + \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} (D_{ij} f) \quad (25)$$

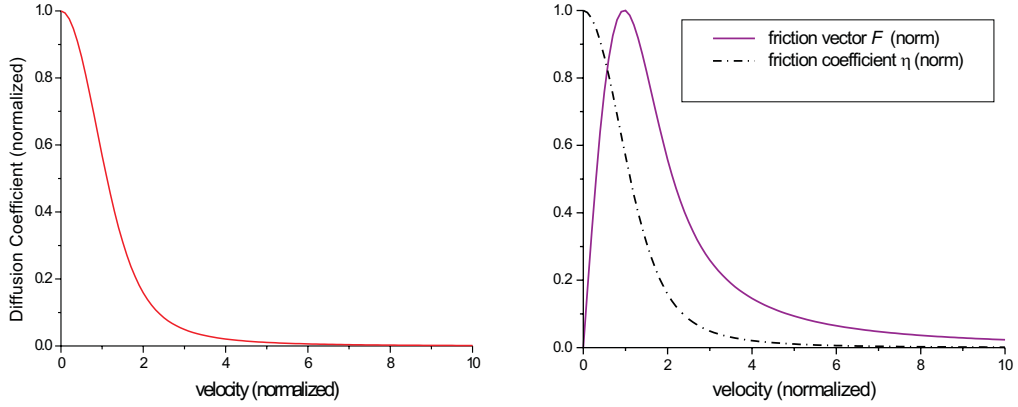
Η εξίσωση αυτή είναι μια τροποποιημένη εξίσωση διάχυσης (δείτε τον 3×3 τετραγωνικό πίνακα διάχυσης $\mathbf{D} = \mathbf{A}$), με έναν όρο ‘ολίσθησης’ (drift): το 3-διάστατο διάνυσμα $\vec{\mathcal{F}}^{(V)}$:

$$\mathcal{F}_i^{(V)} = \left(1 + \frac{m}{m_1}\right) \frac{\partial D_{ij}}{\partial v_j} \quad (26)$$

που υποδηλώνει μία δύναμη τριβής που δέχεται το σωματίο. Ήδη από τη γνωστή περίπτωση του πλάσματος χωρίς πεδίο, είναι γνωστό ότι αυτή η τριβή εξαρτάται από την ταχύτητα του σωματίου μέσα από μία σχέση της μορφής:

$$\vec{\mathcal{F}} = -\eta(v) \vec{v}$$

Μιλάμε σε αυτή την περίπτωση για δυναμική τριβή που ασκείται στο σωματίο εξαιτίας του περιβάλλοντος, και η οποία είναι περισσότερο ή λιγότερο έντονη, ανάλογα με την ταχύτητά του (βλ. σχήμα 3).



Σχήμα 3: Απεικονίζονται (α) ο συντελεστής διάχυσης και (β) το διάνυσμα τριβής (μέτρο) $\mathcal{F}_i = -\eta(v)v_i$ (συνοδευόμενο από το συντελεστή δυναμικής τριβής $\eta(v)$), ως προς την ταχύτητα του σωματιδίου v (κανονικοποιημένη επί της ταχύτητας ήχου) για ηλεκτροστατικό πλάσμα μη μαγνητισμένο (χρησιμοποιώντας στοιχεία από το [7]).

5.1 Intermezzo: Η εξίσωση Fokker-Planck - κίνηση Brown

Η παραπάνω κινητική εξίσωση χαρακτηρίζεται από μεταβλητούς όρους, οι οποίοι είναι, όπως είδαμε, συναρτήσεις της ταχύτητας, των φυσικών παραμέτρων του πλάσματος και του μαγνητικού πεδίου. Αν θεωρήσουμε σταθερούς συντελεστές (ανεξάρτητους του v) D και γραμμικό (ως προς v) διάνυσμα $\mathcal{F} = -\eta v$ (όπου $\eta = \text{const.} \in \mathbb{R}$)¹⁰ προκύπτει επακριβώς η ‘ιστορική’ μορφή της εξίσωσης Fokker-Planck (F.P.), η οποία σε 1 διάσταση π.χ. γράφεται ως εξής:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v}(\eta v f) + D \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} f \quad (27)$$

($D = \eta \frac{k_B T}{m}$). Η εξίσωση αυτή εμφανίστηκε περί τις αρχές του 20ού αιώνα σε μελέτες που σχετίζονταν με την κίνηση Brown¹¹ (όπως αυτή του A. Einstein, σε συνδυασμό με τη θεωρία του P. Langevin για την κίνηση Brown) και συνδέθηκε, γενικότερα, με το πρόβλημα της κίνησης ενός βαριού σωματιδίου σε αλληλεπίδραση με ένα περιβάλλον από ελαφρά σωματίδια: αξιοσημείωτες είναι οι σχετικές εργασίες του Kramers (που ενέταξε την εξ.F.P. στην περιγραφή του χώρου φάσεων, όπως κάνουμε εδώ), του S. Chandrasekhar στην Αστρονομία κ.ά. [9].

Εννοείται ότι στη μορφή της (27) αγνοείται η χωρική εξάρτηση (δηλ. $\partial_{x_i} f = 0$)¹² και η ύπαρξη του εξωτερικού πεδίου στον τελεστή Liouville.

¹⁰ Αυτά τα χαρακτηριστικά ορίζουν μία διαδικασία τύπου *Ornstein-Uhlenbeck* στο Στοχαστικό Λογισμό [8].

¹¹ Ο βοτανολόγος R. Brown παρατήρησε, χωρίς να ερμηνεύσει θεωρητικά, την τυχαία κίνηση κόκκων σκόνης σε κολλοειδή διαλύματα.

¹² Το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα προκύπτει εάν ολοκληρώσουμε στο χώρο $\{\mathbf{x}\}$ την πλήρη εξίσωση, εφόσον, στη δική μας περίπτωση, οι συντελεστές εξαρτώνται μόνο από την ταχύτητα - βλ. κείμενο παρακάτω.

5.2 Μία εξίσωση Fokker-Planck σε 6 διαστάσεις - το πρόβλημα της (μη-) διατήρησης της θετικότητας

Είναι ενδιαφέρον ότι μπορούμε να φέρουμε και το δεξιό μέλος (τελεστή κρούσεων) της εξ. (24) στην ίδια μορφή με αυτό της (25). Σε αυτή την περίπτωση, \mathbf{D} είναι ένας 6×6 πίνακας διάχυσης και το \vec{F} είναι ένα 6-διάστατο διάνυσμα τριβής.

Η κινητική εξίσωση (24) δεν είναι καλά ορισμένη, από μαθηματικής πλευράς. Προκειμένου να μην μπούμε σε τεχνικές λεπτομέρειες, ας περιοριστούμε λέγοντας ότι η ‘ψευδο-Μαρκοβιανή’ αυτή κινητική εξίσωση δεν εγγυάται τη διατήρηση της θετικότητας της f !¹³ Το πρόβλημα αυτό συχνά αγνοείται ή παραβλέπεται, εφόσον οφείλεται στην ύπαρξη του 2ου όρου στο δεξιό μέλος της (24) ο οποίος συχνά παραλείπεται.

Χρειαζόμαστε επομένως μία διαφορετική προσέγγιση, ώστε η κινητική εξίσωση να είναι καλά ορισμένη. Μία τέτοια ιδέα είναι αυτή που θα ακολουθήσουμε στη συνέχεια.

6 Μία διαφορετική προσέγγιση: έναν νέος Μαρκοβιανός τελεστής χρονικής εξέλιξης

Αναζητώντας μία σωστή Μαρκοβιανή προσέγγιση για τον τελεστή κρούσεων της (21), θα ‘δανειστούμε’ ένα τελεστή κινητικής εξέλιξης από την Κβαντική Κινητική Θεωρία [10]. Η δράση του συνοψίζεται στον παρακάτω τελεστή:

$$\mathcal{A}' \cdot = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt' e^{L^{(0)} t'} \cdot e^{-L^{(0)} t'} \quad (28)$$

τον οποίο θα εφαρμόσουμε στο δεξιό μέλος της παραπάνω κινητικής εξίσωσης (24).

Αν και η θεμελίωση του τελεστή αυτού τόσο στην κλασική [11] όσο και στην κβαντική [10] περίπτωση, είναι αρκετά βεβαρυμένη από πλευράς μαθηματικού φορμαλισμού για το σκοπό της παρουσίασης αυτής, μπορούμε να πούμε ότι η δράση του πάνω σε ένα σύστημα είναι αρκετά εμφανής. Το σύστημα προωθείται λίγο εμπρός και λίγο πίσω από μία κρούση (κατά χρονικό διάστημα t') και στη συνέχεια εκφράζεται ο μέσος όρος του αποτελέσματος στην άπειρη χρονικά διάρκεια ζωής του συστήματος. Το αποτέλεσμα είναι ακριβώς το επιθυμητό, δηλαδή μία ‘απόλεια μνήμης’ από την πλευρά του συστήματος.

6.1 Ομογενές σύστημα

Στη χωρικά ομογενή περίπτωση δηλ. εάν $f = f(\mathbf{v}; t)$, αποκτούμε ξανά μία εξίσωση Fokker-Planck της ίδιας μορφής με παραπάνω: βλ. (25). Σε αναπτυγμένη μορφή, η εξίσωση αυτή είναι:

¹³Θυμίζουμε ότι η f έχει το φυσικό νόημα μιας πυκνότητας πιθανότητας, και επομένως πρέπει να παραμένει πραγματική, κανονικοποιημένη στη μονάδα και θετική, ενώ εξελίσσεται στο χρόνο κάτω από τη δράση του κινητικού τελεστή, τείνοντας προς μία κατάσταση ισορροπίας. Στη Θεωρία Πιθανοτήτων, οι ιδιότητες αυτές ορίζουν μία ημι-ομάδα Markov .

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{e}{mc} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = & \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial v_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial v_y^2} \right) [D_{\perp}(\mathbf{v})f] + \frac{\partial^2}{\partial v_z^2} [D_{\parallel}(\mathbf{v})f] \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial v_x} [\mathcal{F}_x(\mathbf{v})f] - \frac{\partial}{\partial v_y} [\mathcal{F}_y(\mathbf{v})f] - \frac{\partial}{\partial v_z} [\mathcal{F}_z(\mathbf{v})f] \right] \end{aligned} \quad (29)$$

[12]. Παρατηρείστε τον όρο διάχυσης, που τώρα εκφράζεται χωριστά στο xy -επίπεδο και στη διεύθυνση z (\perp και \parallel - προς το \vec{B}).

Όλοι οι συντελεστές είναι συναρτήσεις της ταχύτητας \mathbf{v} (για την ακρίβεια, των συνιστωσών της $\{v_{\perp}, v_{\parallel}\}$ κάθετα και παράλληλα, αντίστοιχα, προς το μαγνητικό πεδίο).

6.2 Γενική περίπτωση: μη-ομογενές σύστημα

Στη γενική περίπτωση δηλ. $f = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t)$, η αλλαγή από την περίπτωση της §5 είναι σημαντική:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{e}{mc} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = & \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial v_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial v_y^2} \right) [D_{\perp}(\mathbf{v})f] + \frac{\partial^2}{\partial v_z^2} [D_{\parallel}(\mathbf{v})f] \right. \\ & + 2s \Omega^{-1} \left[\frac{\partial^2}{\partial v_x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial v_y \partial x} \right] [D_{\perp}(\mathbf{v})f] \\ & + \Omega^{-2} [D_{\perp}^{(XX)}(\mathbf{v})] \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f \\ & - \frac{\partial}{\partial v_x} [\mathcal{F}_x(\mathbf{v})f] - \frac{\partial}{\partial v_y} [\mathcal{F}_y(\mathbf{v})f] - \frac{\partial}{\partial v_z} [\mathcal{F}_z(\mathbf{v})f] \\ & \left. + s \Omega^{-1} \mathcal{F}_y(\mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial x} f - s \Omega^{-1} \mathcal{F}_x(\mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial y} f \right] \end{aligned} \quad (30)$$

Παρατηρείστε, σε σχέση με την (24), την εμφάνιση (για πρώτη φορά) της 3ης σειράς στο δεξιό μέρος: πρόκειται για διάχυση στο χώρο (θέσεων), σε αντιδιαστολή με την 1η σειρά, που δηλώνει διάχυση στο χώρο ταχυτήτων· επίσης της 5ης σειράς. Τέλος, ο όρος διάχυσης $V - X$ σε σύζευξη (2η σειρά) έχει έντονα τροποποιηθεί ως προς τον αντίστοιχο της (24)¹⁴.

Παρατηρείστε, στις δύο παραπάνω εξισώσεις, το σπάσιμο της (αρχικά σφαιρικής) συμμετρίας του χώρου προς κυλινδρική, όπως ήταν αναμενόμενο, εξαιτίας του μαγνητικού πεδίου (29). Επίσης, το πεδίο εμφανίζεται εκπεφρασμένα, όπως ήταν αναμενόμενο, στους συντελεστές (βλ. επόμενο μέρος §7). Εάν “σβήσουμε” το πεδίο, το δεξιό μέρος ανάγεται στο γνωστό όρο κρούσεων LANDAU [3], [7] (με σφαιρική συμμετρία) σε γραμμικοποιημένη μορφή [6].

7 Συντελεστές διάχυσης

7.1 Γενική μορφή

Οι συντελεστές που εμφανίζονται σε όλες τις παραπάνω εξισώσεις δίνονται από τις σχέσεις:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \\ \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \end{array} \right\} = \frac{n}{m^2} \int_0^{t \rightarrow \infty} d\tau \int d\mathbf{x}_1 \int d\mathbf{v}_1 \phi_{eq}(\mathbf{v}_1)$$

¹⁴Έχουμε θεωρήσει ότι $\partial f / \partial z \approx 0$.

$$\begin{aligned}
& \mathbf{F}_{\text{int}}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|) \otimes \mathbf{F}_{\text{int}}(|\mathbf{x}(-\tau) - \mathbf{x}_1(-\tau)|) \begin{Bmatrix} \mathbf{N}'^T(\tau) \\ \mathbf{N}^T(\tau) \end{Bmatrix} \\
&= \frac{n}{m^2} \int_0^\infty d\tau \mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t, t - \tau) \begin{Bmatrix} \mathbf{N}'^T(\tau) \\ \mathbf{N}^T(\tau) \end{Bmatrix} \quad (31)
\end{aligned}$$

Επίσης:

$$a_i = -\frac{\partial D_{ij}}{\partial v_j} \quad (32)$$

Τέλος, θυμίζουμε ότι το διάνυσμα τριβής δίνεται από τη σχέση (26).

Παρατηρείστε ότι αυτές οι σχέσεις μας παρέχουν μία “συνταγή” που συνδέει τους συντελεστές διάχυσης με τις συναρτήσεις χρονικής συσχέτισης (correlations) των δυνάμεων αλληλεπίδρασης $C_{ij}(\tau) = \langle F_{int,i}(t) F_{int,j}(t - \tau) \rangle_R$. Οι συναρτήσεις αυτές, που εκφράζουν τη στατιστική συσχέτιση μεταξύ των τιμών δύο συνιστωσών της \mathbf{F}_{int} σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές που απέχουν κατά τ , συχνά θεωρούνται εξ’ αρχής ότι δίνονται από μία συνάρτηση $\delta(\tau)$ (“λευκός θόρυβος”) [8] - πράγμα που απλοποιεί τους υπολογισμούς - χωρίς όμως έτσι να συνδέεται άμεσα ο μηχανισμός των κρούσεων με τους μικροσκοπικούς νόμους κίνησης των σωματιδίων, για ένα δεδομένο δυναμικό πρόβλημα (στην περίπτωση μας, την κίνηση μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο).

7.2 Υπολογισμός της ανεπτυγμένης μορφής για το πλάσμα

Οι παραπάνω συντελεστές περιλαμβάνουν δύο τριπλά ολοκληρώματα στο χώρο των φάσεων (θέσεις και ταχύτητες) του σωματιδίου 1, συν ένα χρονικό ολοκλήρωμα ως προς τ . Υποθέτοντας ότι η συνάρτηση κατανομής της δεξαμενής είναι Maxwell-ιανή (βλ.(18)) και ότι οι αλληλεπιδράσεις είναι τύπου Debye [1], [4], μπορούμε να προχωρήσουμε τον υπολογισμό εκτελώντας πρώτα τα ολοκληρώματα των ταχυτήτων και στη συνέχεια των θέσεων στο χώρο Fourier. Για λεπτομέρειες, που εδώ παραλείπονται, βλ. [6], [13].

Το αποτέλεσμα, σε αδιάστατη μορφή, για τους συντελεστές της (30) είναι:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left\{ \begin{array}{c} D_\perp \\ D_\perp^{(X)} \\ D_\parallel \end{array} \right\} \right\} = D_0 \Lambda \int_0^t d\tau' \int_1^{x_{max}} dx e^{\Lambda^2(1-x^2) \sin^2 \frac{\tau'}{2}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\{1,0\}} e^{-\tilde{v}_\parallel^2} \\
& J_0 \left(2\Lambda \sqrt{x^2 - 1} \tilde{v}_\perp \sin \frac{\tau'}{2} \right) \tilde{F}_{\{\perp,\parallel\}} \left\{ \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2} \cos \tau' \\ (-s^\alpha) \frac{1}{2} \sin \tau' \\ (1 + \frac{1}{2} \cos \tau') \\ 1 \end{array} \right\} \right\} \quad (33)
\end{aligned}$$

όπου όλες οι ποσότητες (εκτός από το D_0) είναι αδιάστατες: $x \equiv \frac{\tilde{k}_\perp}{k_D} = (1 + \frac{k_\perp^2}{k_D^2})^{1/2}$ και $\tau' = \Omega\tau$ είναι αδιάστατες ανηγμένες μεταβλητές κυματριθμού (Fourier) και χρόνου: $J_0(x)$ είναι η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους μηδενικής τάξης. Παρατηρείστε την εμφάνιση, μέσω του $D_0 \equiv \frac{2\sqrt{2}n e^4}{m^2 \sqrt{k_B T}}$, της συχνότητας κρούσεων πλάσματος (Spitzer).

Οι συναρτήσεις $\tilde{F} = \tilde{F}(\phi(x, \tau'), \tilde{v}_{\parallel})$ είναι:

$$\tilde{F}'_{\{\perp, \parallel\}} = \pm \sqrt{\pi} \phi + \frac{\pi}{4} \sum_{s=+1, -1} \left[(1 \mp 2\phi^2 \mp s2\phi\tilde{v}_{\parallel}) e^{(\phi+s\tilde{v}_{\parallel})^2} \text{Erfc}(\phi+s\tilde{v}_{\parallel}) \right] \quad (34)$$

όπου

$$\phi = \frac{1}{2} \Lambda \tau' x, \quad \Lambda = \sqrt{2} \frac{\omega_p}{\Omega}, \quad \tilde{v}_* = \left(\frac{mv_*^2}{2k_B T} \right)^{1/2}, \quad * \in \{\perp, \parallel\}$$

Σε όλες τις σχέσεις, $k_D = \left(\frac{4\pi e_a^2 n_a}{k_B T_a} \right)^{1/2}$ είναι ο κυματαριθμός Debye και $\omega_{p,\alpha} = \left(\frac{4\pi e_a^2 n_a}{m_\alpha} \right)^{1/2}$ είναι η συχνότητα ταλαντώσεων πλάσματος (Langmuir), που έχει αναφερθεί προηγουμένως [15].

Με $\text{Erfc}(x)$ συμβολίζεται η συμπληρωματική συνάρτηση σφάλματος:

$$\text{Erfc}(x) = 1 - \text{Erf}(x) \equiv 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

[14].

Παρατηρείστε τον ανταγωνισμό των μηχανισμών κρούσεων και περιστροφικής κίνησης μέσω της εμφάνισης του $\Lambda \approx \frac{T_{gyro}}{T_{coll}} \equiv \frac{\rho L}{r_D}$ (πρβλ. σχ. 2).

8 Παραμετρική μελέτη των συντελεστών διάχυσης

Σύμφωνα με τα παραπάνω, δεν απομένει παρά να επιλέξουμε τις τιμές των βασικών μεταβλητών του πλάσματος (T , n , m_α , e_α - για δεδομένο είδος σωματιών α , π.χ. e^- - και B), και στη συνέχεια των παραμέτρων του προβλήματος ω_p , Ω και Λ : οι ολοκληρώσεις στις παραπάνω σχέσεις μπορούν επομένως να πραγματοποιηθούν αριθμητικά. Το αποτέλεσμα μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση του χρόνου τ (ή, καλύτερα, της αδιάστατης ποσότητας $\Omega\tau$). Παραμένει, ως παράμετρος, η εξάρτηση από τις συνιστώσες της ταχύτητας v_{\perp}, v_{\parallel} και από τη μαγνητική επαγωγή B (μέσω του Ω).

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε ενδεικτικά μέρος των αποτελεσμάτων, που δείχνει την εξάρτηση του συντελεστή $D_{\perp}(t)$, από τη μαγνητική επαγωγή του εξωτερικού πεδίου [16].

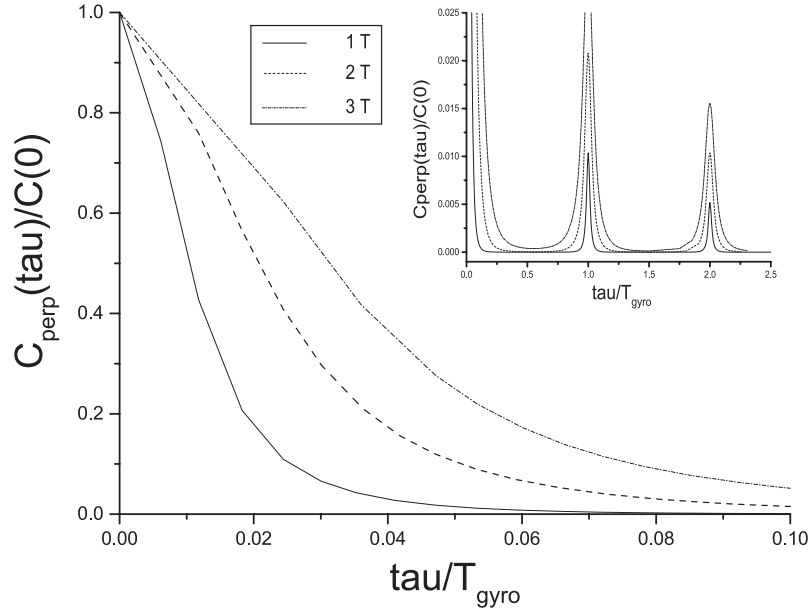
Για ένα πλάσμα ηλεκτρονίων θερμοκρασίας $T = 10 \text{ KeV}$ και πυκνότητας $n = 10^{14} \text{ cm}^{-3} = 10^{20} \text{ m}^{-3}$, έχουμε $\omega_{p,e} = 5.64 \cdot 10^{11} \text{ s}^{-1}$ και $\Omega_e = 1.76 \cdot 10^{11} \times B \text{ s}^{-1}$, οπότε $\Lambda = 4.531/B$ (το B σε Tesla παντού).

Όπως θα περιμέναμε, η συνάρτηση συσχέτισης $C(\tau)$ πέφτει γρήγορα με το χρόνο τ . Η ύπαρξη του πεδίου φαίνεται να ευνοεί τη μηχανισμό συσχέτισης: βλ. σχήμα 4. Από φυσικής πλευράς, αυτό αντανακλά τον (επιθυμητό)¹⁵ μαγνητικό περιορισμό των σωματιδίων από το πεδίο, εφόσον τα σωματίδια 'κολλούν' στην ελικοειδή τους τροχιά και έτσι αισθάνονται το ένα το άλλο για περισσότερο χρόνο.

Σε ότι αφορά την εξάρτηση από την ταχύτητα (π.χ. την εγκάρσια συνιστώσα v_{\perp} , βλ. σχήμα 5), για δεδομένη τιμή του B , τόσο ο συντελεστής διάχυσης D_{\perp} όσο και η αντίστοιχη συνιστώσα του διανύσματος τριβής \mathcal{F}_{\perp} :

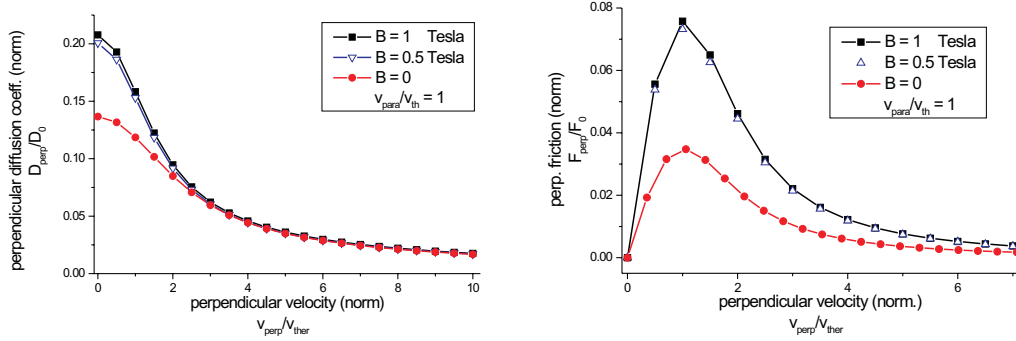
$$\mathcal{F}_{\perp} = \left(1 + \frac{m}{m_1} \right) \frac{\partial D_{\perp}(v_{\perp}, v_{\parallel})}{\partial v_{\perp}}$$

¹⁵Ο μαγνητικός περιορισμός (*magnetic confinement*) χρησιμοποιείται για τον χωρικό 'εγκλωβισμό' των σωματιδίων σε αντιδραστήρες πυρηνικής σύντηξης τύπου *tokamak*: βλ. διαλέξεις στο ίδιο σχολείο.



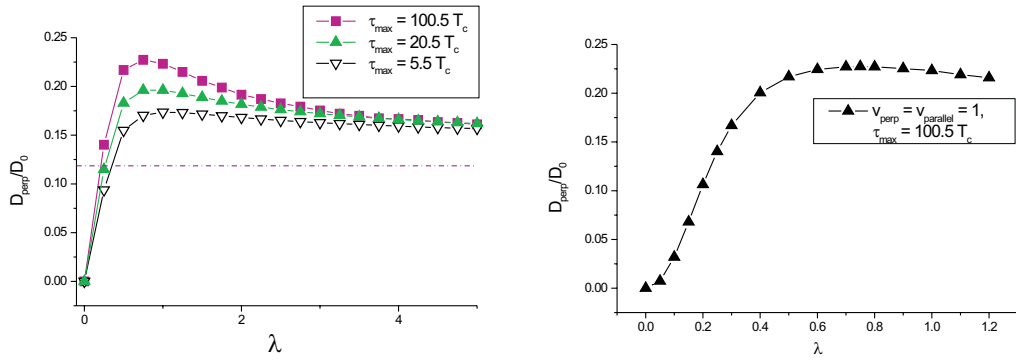
Σχήμα 4: Στο πρώτο σχήμα έχουμε αναπαραστήσει το κάθετο μέρος της συνάρτησης συσχέτισης αλληλεπίδρασης $C_{\perp}(\tau; v_{\perp}, v_{\parallel}, B)$ ως συνάρτηση του χρόνου τ (μετρούμενου σε περιόδους περιστροφής $T_c = 2\pi/\Omega$), για διαφορετικές τιμές του B ($\sim \Omega$). Έχουμε θεωρήσει τιμές $v_{\perp} = v_{\parallel} = v_{th} = (T/m)^{1/2}$. Παρατηρείστε τα τοπικά μέγιστα (που εξαφανίζονται ταχύτατα: βλ. μεγέθυνση στο ενσωματωμένο σχήμα) κάθε περίοδο T .

φαίνονται να αναπαράγουν τα ποιοτικά χαρακτηριστικά του μη-μαγνητισμένου πλάσματος (συγκρ. με το σχήμα 3).



Σχήμα 5: Απεικονίζονται (α) ο συντελεστής διάχυσης D_{\perp} και (β) το διάνυσμα τριβής (μέτρο) \mathcal{F}_{\perp} (κανονικοποιημένα κατάλληλα) ως συναρτήσεις της ταχύτητας του σωματιδίου v_{\perp} κάθετα στο πεδίο (κανονικοποιημένη επί της ταχύτητας ήχου) για ηλεκτροστατικό πλάσμα μαγνητισμένο.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η εξάρτηση από το μαγνητικό πεδίο, που συχνά αγνοείται στη μελέτη του πλάσματος από στατιστική σκοπιά. Στο τελευταίο σχήμα έχουμε αναπαραστήσει την τιμή του D_{\perp} ως συνάρτηση του Λ ($\sim 1/\Omega$). Βλέπουμε ότι στην περιοχή όπου $\Lambda \gg 1$, που αντιστοιχεί



Σχήμα 6: Ο εγκάρσιος συντελεστής διάχυσης D_{\perp} ως συνάρτηση της αδιάστατης παραμέτρου Λ ($\sim 1/\Omega$ - βλ. ορισμό στο κείμενο). Η ασυμπτωτική τιμή (γραμμοσκιασμένη ευθεία) αντιστοιχεί στο όριο $\Lambda \rightarrow \infty$, δηλαδή στη μη-μαγνητισμένη περίπτωση ($\Lambda \rightarrow \infty$ σημαίνει $\Omega \rightarrow 0$). Στο σχήμα (β), έχουμε εστίαση στην περιοχή γύρω από το $\Lambda \approx 1$. Και στα δύο σχήματα έχουμε θεωρήσει $v_{\perp} = v_{\parallel} = v_{th} = (T/m)^{1/2}$. Οι διαφορετικές καμπύλες του σχήματος (α) αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές του άνω ορίου t στη χρονική ολοκλήρωση - βλ. (33).

στο σχήμα 2α, είμαστε κοντά στη μη-μαγνητισμένη περίπτωση (οπότε είναι ικανοποιητική η ευρέως χρησιμοποιούμενη περιγραφή *Landau*, που ισχύει στο όριο $\Lambda \rightarrow \infty$). Όμως, στην περιοχή γύρω από το $\Lambda \leq 1$ - που αντιστοιχεί στο σχήμα 2β - παρατηρούμε έντονη εξάρτηση από το πεδίο, επομένως δεν δικαιολογείται η (αρκετά διαδεδομένη!) παράλειψή του στον όρο κρούσεων.

9 Συμπέρασμα

Στηριζόμενοι στις βασικές αρχές της Στατιστικής Μηχανικής Εκτός Ισορροπίας, παρουσιάσαμε μία μέθοδο για τη σωστή περιγραφή ενός πλάσματος μέσα σε ένα ομογενές εξωτερικό πεδίο. Εστίασαμε κυρίως, πέρα από τη μεθοδολογία, σε δύο σημεία:

1ον, στη χωρική εξάρτηση της συνάρτησης κατανομής, η οποία πρέπει να περιγραφεί σωστά ώστε να διατηρούν οι συναρτήσεις πιθανότητας το φυσικό τους χαρακτήρα, και

2ον, δείξαμε ότι, σε αντίθεση με την ευρέως διαδεδομένη αντίληψη ότι ο όρος κρούσεων δεν εξαρτάται 'και πολύ' από το πεδίο (και άρα η παραδοσιακή περιγραφή *Landau* για την 'μη-μαγνητισμένη' περίπτωση αρκεί), μπορεί σε μία περιοχή τιμών των φυσικών μας παραμέτρων η εξάρτηση αυτή να είναι σημαντική.

Οι θεωρητικές συνέπειες αυτών των συμπερασμάτων μπορούν να εφαρμοστούν τόσο στη μελέτη πλάσματος σύντηξης (με μαγνητικό περιορισμό), όσο και διαστημικού πλάσματος, όπου η ύπαρξη μαγνητικών πεδίων αποτελεί βασικό χαρακτηριστικό της δυναμικής συμπεριφοράς του πλάσματος.

Αναφορές

- [1] Βλ. 'Εισαγωγή στην κινητική θεωρία': διάλεξη κ. Ι. Βομβορίδη στην ίδια σειρά μαθημάτων (σε αυτό το σχολείο).
- [2] Βλ. 'Εισαγωγή στο πλάσμα και τη μαγνητορευστοδυναμική': διάλεξη κ. Α. Γκραιίκου στην ίδια σειρά μαθημάτων.
- [3] L.D. Landau & E. M. Lifshitz, 1982, *Statistical Physics*, Part 1, Pergamon Press; επίσης: R. Balescu, *Equilibrium and Non-Equilibrium Statistical Mechanics*, Wiley, 1975.
- [4] R. Balescu, *Transport Processes in Plasmas, vol. 1, Classical Transport* North Holland, Amsterdam, 1988.
- [5] H.Goldstein, *Classical Mechanics*, 1980, Addison-Wesley.
- [6] Ι. Κουράκης, *Kinetic Theory and Transport Processes in Magnetized Plasma*, διδακτορική διατριβή, U.L.B. (Ελεύθερο Πανεπιστήμιο Βρυξελλών), 2002 (υπό προετοιμασία).
- [7] R. Balescu, *Statistical Mechanics of Charged Particles*, Wiley, 1963.
- [8] C.W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods*, Springer-Verlag 1985.
- [9] Η κλασσική αναφορά για τέτοια προβλήματα είναι οι εργασίες των: G. E. Uhlenbeck & L. S. Ornstein (1930) και S. Chandrasekhar (1943)· και οι δύο βρίσκονται ανατυπωμένες στο: N. Wax, 1954, *Noise and Stochastic Processes*, Dover, New York.
- [10] E. B. Davies, 1980, *One-Parameter Semigroups*, Academic Press, London.
- [11] A.P.Grecos, C.Tzanakis, *Physica A* 151 (1988).
- [12] Ι.Κourakis, *Plasma Phys.Control.Fusion* **41** 587 (1999); επίσης: "On the Fokker-Planck equation for a charged test-particle in magnetized plasma", A.Grecos & Ι.Κourakis (υπό προετοιμασία).
- [13] Ι. Kourakis, D. Carati & B. Weyssow, *Proceedings of the 2000 ICPP Conference (Québec, Canada)*, pp. 49 - 53.
- [14] Abramowitz M. and I. A. Stegun, 1965, *Handbook of Mathematical Functions*, (Dover, New York).
- [15] Βλ. 'Κύματα και αστάθειες στο πλάσμα': διάλεξη κ. Α. Βλάχου σε αυτό το σχολείο.
- [16] Ι.Κourakis, L. Brenig, D. Carati, A. Grecos & B. Weyssow, "Diffusion rates for magnetized plasma" (υπό προετοιμασία).