

Μη-γραμμική διάδοση ηλεκτροστατικών κυμάτων  
στη Φυσική Πλάσματος:  
διαμόρφωση πλάτους και Μη-Γραμμική Εξίσωση Schrödinger  
σε πλάσμα με παρουσία σκόνης <sup>1</sup>

Γιάννης Κουράκης<sup>\*,†,2</sup> και Padma Kant Shukla<sup>\*,3</sup>

\* *Ruhr-Universität Bochum, Fakultät für Physik und Astronomie  
Institut für Theoretische Physik IV, D-44780 Bochum, Γερμανία*

† *U. L. B. - Université Libre de Bruxelles  
Faculté des Sciences Appliquées - C.P. 165/81 Physique Générale  
Avenue F. D. Roosevelt 49, B-1050 Βρυξέλλες, Βέλγιο*

### Περίληψη

Εξετάζουμε τη μη-γραμμική διαμόρφωση πλάτους σε σχέση με ηλεκτροστατικά κύματα που διαδίδονται σε μη-μαγνητισμένο πλάσμα, με παρουσία φορτισμένων κόκκων σκόνης (πλάσμα με σκόνη, ΠΣ). Τρεις γνωστοί τύποι κύματος ΠΣ παρουσιάζονται: α) το Ακουστικό Κύμα Σκόνης (ΑΚΣ), β) το Ιοντο-Ακουστικό Κύμα Σκόνης (ΙΑΚΣ) και γ) Ταλαντώσεις Πλέγματος Σκόνης (σε ισχυρά συζευγμένο ΠΣ). Περιγράφεται η μεθοδολογία που οδηγεί στη Μη-Γραμμική Εξίσωση Schrödinger και διερευνάται η ευστάθεια του κύματος, κατά περίπτωση. Θά δείξουμε ότι τα κύματα παρουσιάζουν αστάθεια διαμόρφωσης, που μπορεί να οδηγήσει στο σχηματισμό διαφόρων τύπων μη-γραμμικών διεγέρσεων (σολιτονίων). Τέλος, θα συνοψίσουμε τα χαρακτηριστικά αυτών των μη-γραμμικών κυμάτων, εξετάζοντας την εξάρτησή τους από την διασπορά και τις φυσικές παραμέτρους του πλάσματος.

## 1 Εισαγωγή

Ο όρος *πολύπλοκο πλάσμα* (complex plasma) ή *πλάσμα με παρουσία σκόνης* (συντ. ΠΣ, στη βιβλιογραφία: DP - dusty plasma) περιγράφει μία συλλογή από φορτισμένα σωματίδια (πλάσμα) στα οποία περιλαμβάνεται μεγάλος αριθμός από μικρο-σωμάτια (κόκκοι σκόνης) μεγάλης μάζας και φορτίου [1]. Ο σχετικός κλάδος της Φυσικής Πλάσματος έχει γνωρίσει ιδιαίτερη άνθηση τις τελευταίες δύο δεκαετίες, χάρη στην εκτεταμένη παρουσία ΠΣ στην

---

<sup>1</sup>16ο Θερινό Σχολείο/Πανελλήνιο Συνέδριο: Μη-Γραμμική Δυναμική – Χάος και Πολυπλοκότητα, Χαλκίδα, 14 - 24 Ιουλίου 2003.

<sup>2</sup>Email: ioannis@tp4.rub.de

<sup>3</sup>Email: ps@tp4.rub.de

ατμόσφαιρα <sup>4</sup>, στο Διάστημα (HM κύματα στην μαγνητόσφαιρα, πλανητικοί δακτύλιοι) [1 – 5] σε εργαστηριακές και βιομηχανικές εφαρμογές [4, 6], σε αντιδραστήρες Πυρηνικής Σύντηξης [1, 7] κλπ.<sup>5</sup>

Οι κόκκοι σκόνης χαρακτηρίζονται από υψηλό φορτίο  $Q$  ( $\sim 10^3 - 10^4 e$ , συνήθως αρνητικό), υψηλή μάζα  $M$  (μέχρι και  $\sim 10^9 m_p$ ) και σχετικά μεγάλη ακτίνα  $r$  (για τα ατομικά δεδομένα: από  $10^{-2} \mu m$  έως  $10^2 \mu m$ ). Όπως είναι εμφανές, η ιδιαίτερα υψηλή τιμή του λόγου  $Q/M$ , συνοδευόμενη από δυναμική διακύμανση του φορτίου (φόρτιση) και από ανομοιογένειες κατανομής μάζας και διαστάσεων, προκαλεί νέα ‘εξωτικά’ φαινόμενα, τόσο από πλευράς κινητικής θεωρίας (νέοι μηχανισμοί απόσβεσης στη θέση της απόσβεσης Landau, διακύμανση φορτίου), κυματικής διάδοσης (νέοι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης), όσο και θεμελιώδους Φυσικής (νέες χαρακτηριστικές κλίμακες χρόνου και μήκους, δυνατότητα έλξης μεταξύ ομόσημα φορτισμένων κόκκων σκόνης λόγω σύζευξης με κύμα η ροής ιόντων [9]). Ίσως το εντυπωσιακότερο από αυτά τα φαινόμενα είναι η δυνατότητα για υψηλές τιμές της μέσης Δυναμικής, σε σχέση με την Κινητική, Ενέργειας στο πλάσμα, δηλ. για υψηλές τιμές της παραμέτρου πλάσματος  $\Gamma = E_{δυν}/E_{κιν}$  <sup>6</sup>, γεγονός που επιτρέπει την τήξη σε κρυσταλλικές δομές (‘κρυστάλλους πλάσματος’!), και επέβαλλε την ανάγκη για εξήγηση νέων πειραματικών φαινομένων όπως αλλαγές φάσης, αστάθειες, ταλαντώσεις πλέγματος (βλ. παρακάτω) κ.ά., που οφείλονται ακριβώς στην παρουσία των προσμίξεων (σκόνης).

Είναι φανερό ότι η παρουσία σκόνης τροποποιεί έντονα τα χαρακτηριστικά των κανονικών τρόπων ταλάντωσης που παρατηρούνται στο πλάσμα [10]. χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η σημαντική μείωση της ταχύτητας φάσης των ιοντο-ακουστικών κυμάτων, με αποτέλεσμα την εξάλειψη της απόσβεσης Landau. Επιπλέον, νέοι τρόποι ταλάντωσης παρατηρούνται, χωρίς ανάλογο σε σύνηθες πλάσμα. Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με τη διάδοση κάποιων ηλεκτροστατικών κυμάτων (απουσία εξωτερικού μαγνητικού πεδίου) μέσα σε πλάσμα με παρουσία σκόνης. Αφού περιγράψουμε με συντομία τη φυσική βάση στην οποία στηρίζεται το κύμα, θα εξετάσουμε την προέλευση και την επίπτωση της μη-γραμμικότητας στη διαμόρφωση του πλάτους του κύματος, καθώς και τη δυνατότητα σχηματισμού και διάδοσης μη-γραμμικών λύσεων (σολιτονίων) της Μη-Γραμμικής Εξίσωσης Schrödinger (ή ΜΓΣ <sup>7</sup>).

---

<sup>4</sup>Η σκόνη στην ατμόσφαιρα προέρχεται από τον άνθρωπο (μόλυνση, κατάλοιπα προωθητικών μηχανών), από κομήτες (είναι ευρέως ... άγνωστο ότι η Γη βομβαρδίζεται από  $2 \cdot 10^4$  τόνους υλικού διαστημικής προέλευσης ετησίως! [5]) κλπ.

<sup>5</sup>Βλ. [4] για μια εξωνυχιστική παρουσίαση της Φυσικής Πλάσματος με παρουσία σκόνης. Επίσης, κάποιες πρόσφατες μονογραφίες: [1] (αναλυτική παρουσίαση επιμέρους θεμάτων, θεωρητικών και εργαστηριακών), [2] (με έμφαση στα κύματα), [8] (με έμφαση στο βαρυτό-πλάσμα, δηλαδή την επίδραση βαρυτικού πεδίου στη διάδοση κυμάτων πλάσματος στην Αστροφυσική) κ.ά.

<sup>6</sup>Οποιοδήποτε πανεπιστημιακό βιβλίο Φυσικής Πλάσματος [10] αναφέρει ότι το ιδανικό πλάσμα έχει ως χαρακτηριστικό ασθενή σύζευξη, δηλ.  $\Gamma \ll 1$ . Αυτό δεν αφορά το πλάσμα με σκόνη, όπου ακόμη και τιμές της τάξης του  $10^2$  έως  $10^4$  είναι συνηθισμένες! ‘Τήξη’ παρατηρείται για  $\Gamma \geq 170$  (θεωρητική τιμή, βλ. βιβλ.).

<sup>7</sup>Συντ.: NLS - Nonlinear Schrödinger Equation. Η Εξ. NLS είναι γνωστό ότι χαρακτηρίζει γενικά τα

Θα θεωρήσουμε ένα πλάσμα (απουσία εξωτερικών ηλεκτρο-μαγνητικών πεδίων) αποτελούμενο από τη συνύπαρξη 3 'ρευστών': ηλεκτρόνια (μάζας  $m$ , φορτίου  $-e$ ), ιόντα (μάζας  $m_i$ , φορτίου  $q_i = +Z_i e$ ) και βαριά σωματίδια (κόκκους) άμμου (μάζας  $m_d$ , φορτίου  $q_d = s Z_d e$ :  $s = \text{sgn } q_d = \pm 1$ ) συντομ.  $e = \text{electrons}$ ,  $i = \text{ions}$ ,  $d = \text{dust}$ . Οι συγκρούσεις μεταξύ σωματίων (απόσβεση) κάθε είδους αγνοούνται. Όλοι οι κόκκοι σκόνης θεωρείται ότι έχουν το ίδιο φορτίο, μάζα και μέγεθος (απλούστευση).

## 2 Ακουστικά κύματα σκόνης

Τα *Ακουστικά Κύματα Σκόνης* (ΑΚΣ) (Dust Acoustic Waves, DAW) (θεωρητική πρόβλεψη: RAO *et al.*, 1990 [13], πειραματική επαλήθευση: BARKAN *et al.*, 1995 [14]) είναι ένας εξαιρετικά χαμηλόσυχνος κανονικός τρόπος ταλάντωσης σε ΠΣ (χωρίς αντίστοιχο σε κοινό πλάσμα e-i): πρόκειται για ταλαντώσεις κόκκων σκόνης μέσα σε περιβάλλον από θερμά ηλεκτρόνια και ιόντα (στα οποία οφείλεται η δύναμη επαναφοράς). Η φασική ταχύτητα των ΑΚΣ  $v_{ph} = \omega/k \ll v_{th,e}, v_{th,i}$  και η συχνότητά τους  $\omega < \omega_{p,d}$  είναι τόσο χαμηλές, ώστε είναι δυνατή η παρατήρησή τους με γυμνό μάτι! [1, 14]

### 2.1 Θεωρητικό μοντέλο.

Θα γράψουμε τις εξισώσεις χρονικής εξέλιξης για τις μέσες τιμές (ροπές ταχύτητας) που αφορούν το ρευστό σκόνης. Η πυκνότητα  $n_d$  υπακούει στην εξίσωση (συνέχειας):

$$\frac{\partial n_d}{\partial t} + \nabla \cdot (n_d \mathbf{u}_d) = 0, \quad (1)$$

και η μέση ταχύτητα  $\mathbf{u}_d$  στην εξίσωση:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_d}{\partial t} + \mathbf{u}_d \cdot \nabla \mathbf{u}_d = -\frac{q_d}{m_d} \nabla \Phi - \frac{1}{m_d n_d} \nabla p_d, \quad (2)$$

όπου  $\Phi$  είναι το ηλεκτρικό δυναμικό· η πίεση της σκόνης  $p_d$  υπακούει:

$$\frac{\partial p_d}{\partial t} + \mathbf{u}_d \cdot \nabla p_d = -\gamma p_d \nabla \cdot \mathbf{u}_d \quad (3)$$

όπου  $\gamma = (f+2)/f$  είναι ο λόγος ειδικών θερμοτήτων (σε  $f$  βαθμούς ελευθερίας) π.χ.  $\gamma = 3$  για αδιαβατική μονοδιάστατη (1d) διάδοση,  $\gamma = 2$  για 2d κ.ο.κ. Τέλος, η εξίσωση Poisson γράφεται:

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi \sum_{\alpha=e,i,d} q_\alpha n_\alpha = 4\pi (n_e e - q_i n_i - q_d n_d) \equiv 4\pi e (n_e - Z_i n_i - s Z_d n_d) \quad (4)$$

---

φαινόμενα διαμόρφωσης και μη-γραμμικής γένεσης αρμονικών σε φυσικά προβλήματα, βλ. π.χ. [11, 12]· επίσης τὰ άρθρα του Δ. Φραντζεσκάκη στους τόμους 5 και 6 της σειράς *Τάξη και Χάος στα Μη-Γραμμικά Δυναμικά Συστήματα* (εκδόσεις Γ. Πνευματικός, Αθήνα 1999, 2000.)

Το δεξιό μέρος μηδενίζεται στη ισορροπία χάρη στη συνθήκη ουδετερότητας του συνολικού φορτίου:

$$n_{e,0} e - n_{i,0} q_i - n_{d,0} q_d = 0. \quad (5)$$

**Αδιάστατη μορφή.** Το παραπάνω σύστημα μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \mathbf{u}) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -s \nabla \phi - \frac{\sigma}{n} \nabla p, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p &= -\gamma p \nabla \cdot \mathbf{u}, \\ \nabla^2 \phi &= \phi - \alpha \phi^2 + \alpha' \phi^3 - s \beta (n - 1). \end{aligned} \quad (6)$$

όπου:  $n = n_d/n_{d,0}$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_d/v_d = [m_d/(k_B T_e)]^{1/2} \mathbf{u}_d$ ,  $p = p_d/p_0 = p_d/(n_{d,0} k_B T_e)$  και  $\phi = Z_d e \Phi / (k_B T_e)$ · κλίμακα μήκους: το ενεργό μήκος κύματος Debye  $\lambda_{D,eff} = (\lambda_{D,e}^{-2} + \lambda_{D,i}^{-2})^{-1/2}$  (όπου  $\lambda_{D,\alpha} = (k_B T_\alpha / 4\pi n_{\alpha,0} q_\alpha^2)^{1/2}$ ,  $\alpha = e, i$ )· κλίμακα χρόνου: η περίοδος ταλαντώσεων πλάσματος  $\Pi \omega_{p,d}^{-1} = (4\pi n_{d,0} q_d^2 / m_d)^{-1/2}$ . Στην 4η εξίσωση αναπτύξαμε γύρω από τη θέση ισορροπίας ( $\phi = 0$ ), θεωρώντας ότι:  $n_e \approx n_{e,0} e^{e\Phi/k_B T_e}$ ,  $n_i \approx n_{i,0} e^{-Z_i e\Phi/k_B T_i}$ , ( $T_{e/i}$ : θερμοκρασία ηλεκτρονίων/πρωτονίων). Οι αδιάστατες παράμετροι είναι:

$$\alpha = \frac{1}{2Z_d} \frac{Z_i^3 \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^2 \frac{n_{i,0}}{n_{e,0}} - 1}{Z_i^2 \frac{T_e}{T_i} \frac{n_{i,0}}{n_{e,0}} + 1}, \quad \alpha' = \frac{1}{6Z_d^2} \frac{Z_i^4 \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^3 \frac{n_{i,0}}{n_{e,0}} + 1}{Z_i^2 \frac{T_e}{T_i} \frac{n_{i,0}}{n_{e,0}} + 1}, \quad \beta = \left( \lambda_{D,eff} \frac{\omega_{p,d}}{v_d} \right)^2 \equiv \left( \frac{c_D}{v_d} \right)^2$$

όπου  $c_D = \lambda_{D,eff} \omega_{p,d}$ . Συνήθως στη σχετική βιβλιογραφία η παρουσία σκόνης δηλώνεται με την ποσότητα  $\delta = (Z_d n_{d,0}) / (Z_i n_{i,0})$  ή  $\mu = n_{e,0} / (Z_i n_{i,0}) = 1 + s\delta$ · προσέξτε ότι  $\delta < 0$ ,  $0 \leq \mu < 1$  (αντίστοιχα  $\delta > 0$ ,  $\mu > 1$ ) αντιστοιχεί σε αρνητικά (θετικά) φορτισμένη σκόνη (προφανώς  $\delta = \mu = 0$  χωρίς σκόνη). Για  $\mu \ll Z_i \frac{T_e}{T_i}$ , έχουμε τις προσεγγιστικές εκφράσεις:  $\alpha \approx \frac{Z_i T_e}{2Z_d T_i}$ ,  $\alpha' \approx \frac{Z_i^2 T_e^2}{6Z_d^2 T_i^2} = \frac{2}{3} \alpha^2$  και  $\beta \approx \frac{Z_d^2 n_{d,0} T_i}{Z_i^2 n_{i,0} T_e}$ .

Τέλος,  $\sigma = p_0 / (n_{d,0} k_B T_e) = 1$  (με την παραπάνω επιλογή κλίμακας κανονικοποίησης<sup>8</sup>)· θα διατηρήσουμε όμως το σύμβολο  $\sigma$  για να διακρίνουμε τη ‘θερμή’ ( $\sigma \neq 0$ ) από την ‘ψυχρή’ ( $\sigma = 0$ ) περιγραφή<sup>9</sup> του πλάσματος.

## 2.2 Θεωρία διαταραχών.

Έστω  $\mathbf{S}$  το διάνυσμα (στήλη)  $(n, \mathbf{u}, p, \phi)^T$ , που περιγράφει την κατάσταση του συστήματος σε δεδομένη θέση  $\mathbf{r}$  και χρονική στιγμή  $t$ . Θα θεωρήσουμε μικρές αποκλίσεις από την κατάσταση ισορροπίας  $\mathbf{S}^{(0)} = (1, \mathbf{0}, 1, 0)^T$  παίρνοντας  $\mathbf{S} = \mathbf{S}^{(0)} + \epsilon \mathbf{S}^{(1)} + \epsilon^2 \mathbf{S}^{(2)} + \dots = \mathbf{S}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \mathbf{S}^{(n)}$ , όπου  $\epsilon \ll 1$  είναι μία μικρή παράμετρος. Ακολουθώντας την *αναγωγική*

<sup>8</sup> Συχνά το  $\sigma$  ερμηνεύεται ως λόγος θερμοκρασιών, βλ. π.χ. [15].

<sup>9</sup> Π.χ. βλ. εξ. (9) - (11) στο [16], οι οποίες ταυτίζονται με τις παραπάνω για  $\sigma = 0$ ,  $s = -1$ ,  $\alpha' = 0$ .

θεωρία διαταραχών (μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων) [17], ορίζουμε τις (αργές) μεταβλητές  $\zeta = \epsilon(x - \lambda t)$ ,  $\tau = \epsilon^2 t$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ). Θεωρούμε ότι οι διαταραγμένες καταστάσεις εξαρτώνται από τις γρήγορες κλίμακες μέσω της φάσης  $\theta_1 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$ , και από τις αργές κλίμακες μέσω του πλάτους της  $l$ -οστής αρμονικής της  $j$ -συνιστώσας  $S_{j,l}^{(n)}$ , που μεταβάλλεται ('διαμορφώνεται') κατά τον άξονα  $x$ :

$$S_j^{(n)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} S_{j,l}^{(n)}(\zeta, \tau) e^{il(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

(η συνθήκη  $S_{j,-l}^{(n)} = S_{j,l}^{(n)*}$  εξασφαλίζει  $S_j^{(n)} \in \mathbb{R}$ ). Θεωρούμε ότι οι ταλαντώσεις του συστήματός μας υφίστανται πλάγια διαμόρφωση, δηλαδή κατά τον άξονα  $x$  ενώ η (αυθαίρετη) διεύθυνση διάδοσης δίνεται από τον κυματαριθμό  $\mathbf{k} = (k_x, k_y) = (k \cos \theta, k \sin \theta)$ . Επομένως, οι διαφορικοί μας τελεστές μετασχηματίζονται ως εξής:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} - \epsilon \lambda \frac{\partial}{\partial \zeta} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \nabla \rightarrow \nabla + \epsilon \hat{x} \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \nabla^2 \rightarrow \nabla^2 + 2\epsilon \frac{\partial^2}{\partial x \partial \zeta} + \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}.$$

Αντικαθιστώντας στο σύστημα (6), προκύπτει ένα διπλό άθροισμα άπειρων όρων, ως προς την τάξη διαταραχής  $\epsilon^n$  και την φάση της αρμονικής  $l$ . Επιλύουμε, κατά τα γνωστά (στη θεωρία διαταραχών), το σύστημα που προκύπτει σε κάθε τάξη  $\sim \epsilon^n$ , αντικαθιστούμε στην επόμενη, κ.ο.κ. (για λεπτομέρειες σχετικά με την επίπονη αυτή διαδικασία, βλ. [18]).

Οι εξισώσεις για  $n = 2$ ,  $l = 1$  παρέχουν τις πρώτες αρμονικές:

$$n_1^{(1)} = s \frac{1 + k^2}{\beta} \phi_1^{(1)} = \frac{1}{\gamma} p_1^{(1)} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1^{(1)} = \frac{k}{\omega \cos \theta} u_{1,x}^{(1)} = \frac{k}{\omega \sin \theta} u_{1,y}^{(1)} \quad (7)$$

και τη συνθήκη:  $\omega^2 = \frac{\beta k^2}{k^2 + 1} + \gamma \sigma k^2$ , δηλαδή, επαναφέροντας τις διαστάσεις, τη σχέση διασποράς των ΑΚΣ [1, 13]:

$$\omega^2 = \frac{c_D^2 k^2}{1 + k_D^2 \lambda_{D_{eff}}^2} + \gamma v_{th,d}^2 k^2. \quad (8)$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, για  $n = 2$ ,  $l = 1$  παίρνουμε τις διορθώσεις 2ης τάξης, δηλαδή το πλάτος της 2ης αρμονικής  $\mathbf{S}_2^{(2)}$ , μία σταθερή συνεισφορά  $\mathbf{S}_0^{(2)}$ , και μία διόρθωση  $\mathbf{S}_1^{(2)}$  στην 1η αρμονική (παραλείπουμε τις περίπλοκες εκφράσεις, βλ. [18]). Προκύπτει επίσης η συνθήκη:  $\lambda = v_g(k) = \frac{\partial \omega}{\partial k_x} = \omega'(k) \cos \theta = \frac{k}{\omega} \left[ \frac{1}{(1+k^2)^2} + \gamma \sigma \right] \cos \theta$ . το  $\lambda$  επομένως εκφράζει την ταχύτητα ομάδας κατά τη διεύθυνση διαμόρφωσης ( $x$ ).

### 2.3 Μη-Γραμμική Εξίσωση Schrödinger

Οι εξισώσεις 3ης τάξης ( $n = 3$ ) για  $l = 1$  σε συνδυασμό δίνουν, με τη μορφή συνθήκης, τη Μη-Γραμμική Εξίσωση Schrödinger :

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + P \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} + Q |\psi|^2 \psi = 0. \quad (9)$$

όπου η μεταβλητή  $\psi$  περιγράφει την 1η αρμονική διόρθωση στο δυναμικό  $\phi_1^{(1)}$ . Θυμηθείτε ότι  $\{\zeta, \tau\}$  είναι οι ‘αργές’ μεταβλητές που ορίσαμε παραπάνω.

Ο συντελεστής διασποράς  $P$  συνδέεται με την κυρτότητα της σχέσης διασποράς, δηλ.  $P = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_x^2} = \frac{1}{2} \left[ \omega''(k) \cos \theta + \omega'(k) \frac{\sin^2 \theta}{k} \right]$  ή, σε ανεπτυγμένη μορφή :

$$P(k) = \frac{1}{\beta} \frac{1}{2\omega} \left( \frac{\omega}{k} \right)^4 \left[ \nu_1 - \left( \nu_1 + 3 \frac{\nu_2}{\beta} \omega^2 \right) \cos^2 \theta \right], \quad (10)$$

όπου:  $\nu_1 = \beta \frac{\beta + \sigma \gamma (1+k^2)^2}{[\beta + \sigma \gamma (1+k^2)]^2}$  και  $\nu_2 = \beta^3 \frac{3\beta + \gamma \sigma (3-k^2)(1+k^2)}{3[\beta + \gamma \sigma (1+k^2)]^4}$  (προσέξτε ότι  $\nu_{1,2} \rightarrow 1$  όταν  $\sigma \rightarrow 0$ ). Παρατηρήστε ότι το  $\sigma$  μπορεί να επηρεάσει το πρόσημο του  $P$ .

Ο συντελεστής μη-γραμμικότητας  $Q$  εκφράζεται σαν το άθροισμα 5 συνεισφορών, δηλ.  $Q = \sum_{j=0}^4 Q_j$ . Συγκεκριμένα, ο όρος  $Q_{0/2}$  οφείλεται στη μηδενική/δεύτερης τάξης αρμονική, ενώ ο  $Q_1$  προέρχεται από τον κυβικό όρο στην εξ. (6δ):

$$\begin{aligned} Q_0 = & + \frac{1}{2\omega} \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{(1+k^2)^2} \frac{1}{\beta + \gamma \sigma - v_g^2} \times \\ & \left\{ \beta k^2 \left[ \beta [3 + 6k^2 + 4k^4 + k^6 + 2\alpha \beta (s(2k^2 + 3) + 2\alpha v_g^2)] \right. \right. \\ & \quad + \gamma \sigma [(\gamma + 1)(1+k^2)^3 + 2\alpha \beta (-2\alpha \beta + s\gamma(1+k^2)^2)] \\ & \quad \left. \left. + [\beta(2 + 4k^2 + 3k^4 + k^6 + 2s\alpha\beta) + 2\gamma\sigma(1+k^2)^2(1+k^2 + s\alpha\beta)] \cos 2\theta \right] \right. \\ & + 2(1+k^2)^4 (\beta + \gamma\sigma) \omega^2 \cos^2 \theta \\ & \left. + k(1+k^2) \left[ \beta k^2 + \omega^2(1+k^2) \right] \frac{v_g}{\omega} \times \right. \\ & \quad \left. \left[ \beta(1+k^2 + 2s\alpha\beta) + \gamma(\gamma - 1)\sigma(1+k^2)^2 \right] \cos \theta \right\}, \quad (11) \end{aligned}$$

$$Q_1 = \frac{3\alpha'\beta}{2\omega} \frac{k^2}{(1+k^2)^2}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} Q_2 = & - \frac{1}{12\beta^3} \frac{1}{\omega} \frac{1}{k^2(1+k^2)^2} \times \\ & \left\{ 2\beta k^2 \left[ 5s\alpha\beta^2(1+k^2)^2 + 2\alpha^2\beta^3 + 2\gamma^2\sigma(1+k^2)^4(1+4k^2) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \beta(1+k^2)^3(3+9k^2+2s\alpha\gamma^2\sigma) \right] \right. \\ & \left. + (1+k^2)^3 \omega^2 \left[ \beta(3+9k^2+6k^4+2s\alpha\beta) + 2\gamma^2\sigma(1+k^2)^2(1+4k^2) \right] \right\}. \quad (13) \end{aligned}$$

Δείτε ότι οι  $Q_1, Q_2$  δεν εξαρτώνται από τη γωνία  $\theta$ . Τέλος, οι όροι  $Q_{3,4}$  (παραλείπονται εδώ για συντομία) οφείλονται στο γεγονός ότι λάβαμε υπόψη μας την πίεση  $p_d$  (και μηδενίζονται στο ‘ψυχρό’ μοντέλο, δηλαδή για  $\sigma = 0$ ).

Είναι ενδιαφέρον να δούμε πως συμπεριφέρονται οι συντελεστές  $P$  και  $Q$  για πολύ μεγάλο μήκος κύματος, δηλαδή για μικρό κυματαριθμό  $k \ll 1$  (συνεχές όριο). Για  $\theta = 0$ , παίρνουμε

τις προσεγγιστικές εκφράσεις:

$$P|_{\theta=0} \approx -\frac{3}{2} \frac{\beta}{\sqrt{\beta + \gamma\sigma}} k,$$

$$Q|_{\theta=0} \approx +\frac{1}{12\beta^3} \frac{1}{\sqrt{\beta + \gamma\sigma}} [\beta(2s\alpha\beta + 3) + 2\gamma\sigma] [\beta(2s\alpha\beta + 3) + \gamma(\gamma + 1)\sigma] \frac{1}{k},$$

ενώ για  $\theta \neq 0$ , και οι δύο συντελεστές αλλάζουν πρόσημο:

$$P|_{\theta \neq 0} \approx \frac{\sqrt{\beta + \gamma\sigma}}{2k} \sin^2 \theta,$$

$$Q|_{\theta \neq 0} \approx -\frac{1}{12\beta^3} \frac{1}{\sqrt{\beta + \gamma\sigma}} [\beta(2s\alpha\beta + 3) + 2\gamma^2\sigma] [\beta(2s\alpha\beta + 3) + \gamma(\gamma + 1)\sigma] \frac{1}{k},$$

διατηρώντας, κατά τρόπο αξιοθαύμαστο, το αρνητικό πρόσημο του γινομένου  $PQ$  και εξασφαλίζοντας έτσι, όπως θα δούμε παρακάτω, ευστάθεια για μεγάλα μήκη κύματος,  $\lambda \gg \lambda_{D,eff}$ .

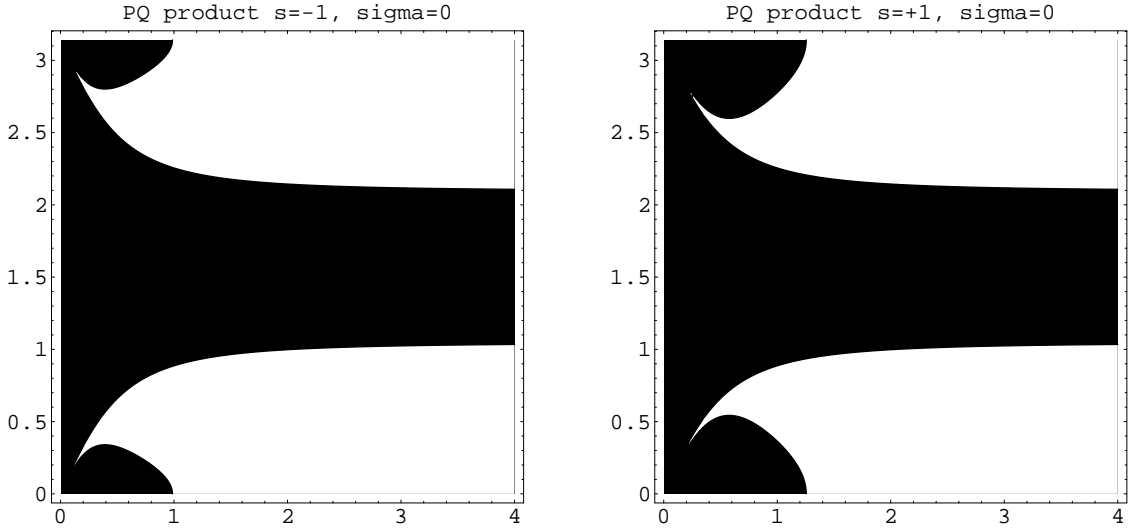


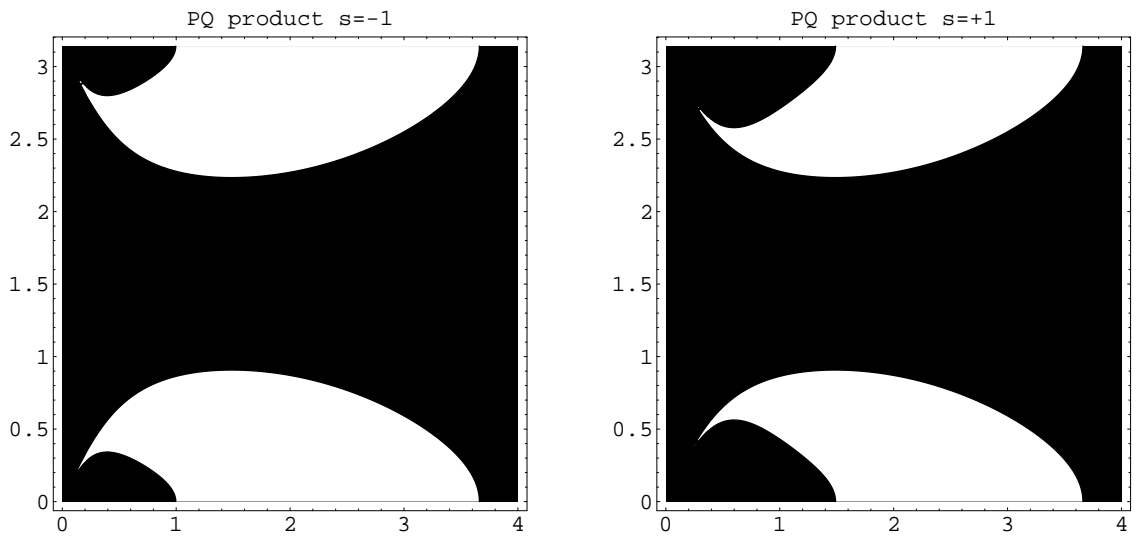
Figure 1: Η καμπύλη όπου μηδενίζεται το γινόμενο των συντελεστών της Εξ. NLS  $PQ = 0$  απεικονίζεται ως συνάρτηση του (κανονικοποιημένου) κυματαριθμού  $k/k_D$  (οριζόντια μεταβλητή) και της γωνίας  $\theta$  (από 0 έως  $\pi$ )· η περιοχή με μαύρο (λευκό) χρώμα παριστάνει την περιοχή τιμών στο επίπεδο  $(k - \theta)$  όπου το γινόμενο είναι αρνητικό (θετικό)· το κύμα είναι ασταθές στη λευκή περιοχή. Αυτό το γράφημα αφορά τα Ακουστικά Κύματα Σκόνης (§2), όπου πήραμε  $\sigma = 0$  (ψυχρή σκόνη). (α) αρνητικό φορτίο σκόνης ( $s = -1$ ). (β) θετικό φορτίο σκόνης ( $s = +1$ ).

## 2.4 Έλεγχος ευστάθειας

Θα ακολουθήσουμε τον γνωστό, από παρόμοιες περιπτώσεις, έλεγχο ευστάθειας [11, 12]. Η εξ. (9) δέχεται τη μονοχρωματική λύση (κύμα Stokes) :  $\psi = \hat{\psi} e^{iQ|\hat{\psi}|^2\tau} + c.c...$  Γραμμικοποιούμε, υποθέτοντας ότι  $\hat{\psi} = \hat{\psi}_0 + \epsilon\hat{\psi}_1$ , και θεωρούμε ότι η διαταραχή  $\hat{\psi}_1$  είναι της

μορφής :  $\hat{\psi}_1 = \hat{\psi}_{1,0} e^{i(\hat{k}\zeta - \hat{\omega}\tau)} + c.c.$  (c.c.: μιγαδικός συζυγής) αντικαθιστώντας στην (9), παίρνουμε:  $\hat{\omega}^2 = P^2 \hat{k}^2 \left( \hat{k}^2 - 2\frac{Q}{P} |\hat{\psi}_{1,0}|^2 \right)$ . Το κύμα θα είναι ευσταθές ( $\omega \in \mathbb{R}$ ) πάντα ( $\forall \hat{k}$ ) εάν  $PQ < 0$ . Στην αντίθετη περίπτωση  $PQ > 0$ , παρατηρείται αστάθεια ( $Im\omega \neq 0$ ) για τιμές κυματαριθμού (της διαταραχής)  $\hat{k} < \hat{k}_{cr} = \sqrt{2\frac{Q}{P}} |\hat{\psi}_{1,0}|$  (δηλαδή για μήκος κύματος:  $\lambda > \lambda_{cr} = 2\pi/\hat{k}_{cr}$ ). ορίζοντας το ρυθμό αύξησης της διαταραχής ως  $\sigma = |Im\hat{\omega}(\hat{k})|$ , βλέπουμε ότι γίνεται μέγιστος για  $\hat{k} = \hat{k}_{cr}/\sqrt{2}$ , δηλ.  $\sigma_{max} = |Im\hat{\omega}|_{\hat{k}=\hat{k}_{cr}/\sqrt{2}} = |Q| |\hat{\psi}_{1,0}|^2$ .

Συμπερασματικά, βλέπουμε ότι η συνθήκη για αστάθεια διαμόρφωσης πλάτους εξαρτάται από το πρόσημο  $PQ$ , που μπορεί να διερευνηθεί αριθμητικά με βάση τις παραπάνω σχέσεις. Για τα διαγράμματα έχουμε επιλέξει τις αντιπροσωπευτικές τιμές:  $\alpha = 5 \cdot 10^{-3}$ ,  $\alpha' = 2\alpha^2/3 \approx 1.6 \cdot 10^{-5}$  και  $\beta \approx 100$ , που εντιστοιχούν σε  $Z_d/Z_i = 10^3$  και  $T_e/T_i = 10$  ( $\gamma = 2$ ,  $\sigma = 1$ ).



Σχήμα 2: Όπως στο σχήμα 1, αλλά με  $\sigma = 1$  (θερμή σκόνη).

Όπως προβλέψαμε παραπάνω, το κύμα είναι ευσταθές (μαύρη περιοχή στα σχ. 1, 2) για μεγάλο μήκος κύματος (δηλ.  $k \ll 1$ ). Για  $\theta$  κοντά στο μηδέν, παρατηρείται αστάθεια (λευκή περιοχή) για  $k > k_{cr}$ , για  $\sigma = 0$  - βλ. σχ. 1α - (ή για  $k_{cr} < k < k'_{cr}$  αν  $\sigma = 0$ , βλ. σχ. 1β), όπου  $k_{cr}$ ,  $k'_{cr}$  είναι κάποιες κρίσιμες τιμές κατωφλίου που εξαρτώνται από τη γωνία  $\theta$ : το  $k_{cr}$  ελαττώνεται (αστάθεια) όσο το  $\theta$  μεταβάλλεται από μηδέν σε κάποια τιμή  $\theta_{cr}$  και εξαφανίζεται (ευστάθεια) για υψηλότερες τιμές του  $\theta$  (έως  $\pi/2$ ). αυτό ισχύει και για τιμές που θα ήταν ασταθείς για  $\theta = 0$ . Το αντίστροφο φαινόμενο παρατηρείται επίσης: τιμές του  $k$  που είναι ευσταθείς για  $\theta = 0$ , αποσταθεροποιούνται εξαιτίας της πλάγιας διαμόρφωσης. Αυτά τα συμπεράσματα ισχύουν τόσο για αρνητικά ( $s = -1$ , βλ. σχ. 1) όσο και για θετικά ( $s = +1$ , βλ. σχ. 2) φορτισμένη σκόνη, στη δεύτερη όμως περίπτωση το κατώφλι  $k_{cr}$  είναι ψηλότερο: η θετική σκόνη μάλλον ευνοεί τη σταθερότητα.



## 2.5 Μη-γραμμικές διεγέρσεις

Είναι γνωστό ότι η ΜΓΕΣ (9) χαρακτηρίζεται από λύσεις εντοπισμένες χωρικά, τύπου σολιτόνιο. Αυτές περιγράφονται εξονυχιστικά στη βιβλιογραφία [19], επομένως θα αναφέρουμε μόνο περιληπτικά τη μεθοδολογία για τη μελέτη τους, προκειμένου να ερευνήσουμε τη σχέση τους με το συγκεκριμένο φυσικό πρόβλημα.

Θα αναζητήσουμε μία λύση της (9) της μορφής  $\psi(\zeta, \tau) = \sqrt{\rho(\zeta, \tau)} e^{i\Theta(\zeta, \tau)}$  [19], όπου οι πραγματικές μεταβλητές  $\rho$  και  $\sigma$  προσδιορίζονται με αντικατάσταση στην (9). Διάφοροι τύποι λύσης υπάρχουν, ανάλογα με το πρόσημο του γινομένου  $PQ$ .

**Φωτεινό σολιτόνιο.** Για  $PQ > 0$  βρίσκουμε τη λύση φωτεινού σολιτονίου: [20]

$$\rho = \rho_0 \operatorname{sech}^2\left(\frac{\zeta - u\tau}{L}\right), \quad \Theta = \frac{1}{2P} \left[ u\zeta - \left( \Omega + \frac{1}{2}u^2 \right) \tau \right], \quad (14)$$

που παριστάνει έναν εντοπισμένο παλμό που ταξιδεύει με ταχύτητα  $u$  και ταλαντώνεται με συχνότητα  $\Omega$  (για  $u = 0$ ). βλ. σχ. 3. Το εύρος του παλμού  $L$  εξαρτάται από το τετράγωνο του μέγιστου πλάτους  $\rho_0$ :  $L = \sqrt{\frac{2P}{Q\rho_0}}$ .

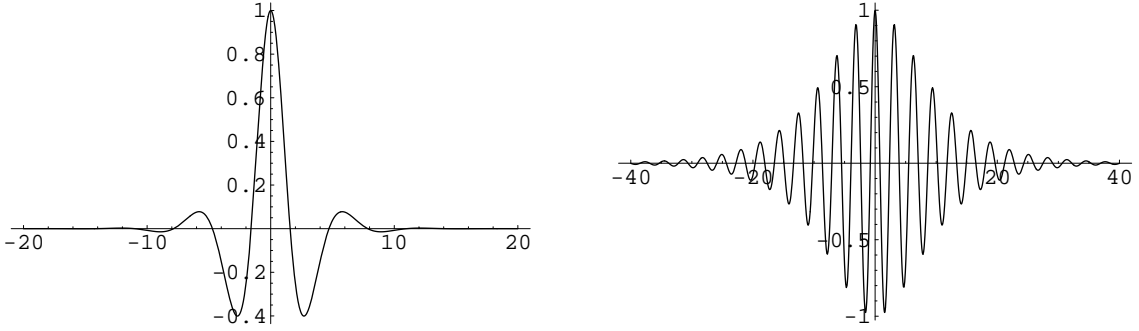


Figure 3: Λύσεις της Μη-Γραμμικής Εξίσωσης Schrödinger τύπου φωτεινό σολιτόνιο (παλμός), βλ. (14) στο κείμενο, για δύο διαφορετικά σεντ παραμέτρων.

**Σκοτεινό σολιτόνιο.** Για  $PQ < 0$ , έχουμε τη λύση σκοτεινού σολιτονίου (οπή) [20]:

$$\rho = \rho_1 \left[ 1 - \operatorname{sech}^2\left(\frac{\zeta - u\tau}{L'}\right) \right] = \rho_1 \operatorname{tanh}^2\left(\frac{\zeta - u\tau}{L'}\right),$$

$$\Theta = \frac{1}{2P} \left[ u\zeta - \left( \frac{1}{2}u^2 - 2PQ\rho_1 \right) \tau \right], \quad (15)$$

που παριστάνει μία εντοπισμένη περιοχή κενή από φέρον κύμα, μηδενικού πλάτους (shock wave) που ταξιδεύει με ταχύτητα  $u$ . βλ. σχ. 4α. Και εδώ, το εύρος του παλμού  $L$  εξαρτάται από το τετράγωνο του μέγιστου πλάτους  $\rho_1$ :  $L' = \sqrt{2 \left| \frac{P}{Q\rho_1} \right|}$ .

‘Γκρίζο’ σολιτόνιο. Για  $PQ < 0$ , βρίσκουμε επίσης τη λύση:

$$\rho = \rho_2 \left[ 1 - a^2 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\zeta - u\tau}{L''} \right) \right],$$

$$\Theta = \frac{1}{2P} \left[ V_0 \zeta - \left( \frac{1}{2} V_0^2 - 2PQ\rho_2 \right) \tau + \Theta_{10} \right] - S \sin^{-1} \frac{a \tanh \left( \frac{\zeta - u\tau}{L''} \right)}{\left[ 1 - a^2 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\zeta - u\tau}{L''} \right) \right]^{1/2}} \quad (16)$$

που παριστάνει μία εντοπισμένη περιοχή κενή, παρόμοια με το σκοτεινό λύση, αλλά μη μηδενικού πλάτους, βλ. σχ. 4β.  $\Theta_{10} = \text{σταθ.}$ :  $S = \operatorname{sign} P \times \operatorname{sign} (u - V_0)$ . Τόσο το μέγιστο πλάτος  $\rho$  όσο και το εύρος  $L'' = \sqrt{2 \left| \frac{P}{Q\rho_2} \right|} \frac{1}{a}$  εξαρτώνται τώρα και από μια ανεξάρτητη παράμετρο  $a$ :  $a^2 = 1 + \frac{1}{2PQ} \frac{1}{\rho_2} (u^2 - V_0^2) \leq 1$ , που παριστάνει το βάθος διαμόρφωσης ( $0 < a \leq 1$ ). Η σταθερά  $V_0$  υπακούει στη συνθήκη [19]:  $V_0 - \sqrt{2|PQ|\rho_2} \leq u \leq V_0 + \sqrt{2|PQ|\rho_2}$ . Στην ειδική περίπτωση  $V_0 = u$ , έχουμε  $a = 1$  και βρίσκουμε πάλι το σκοτεινό σολιτόνιο (15).

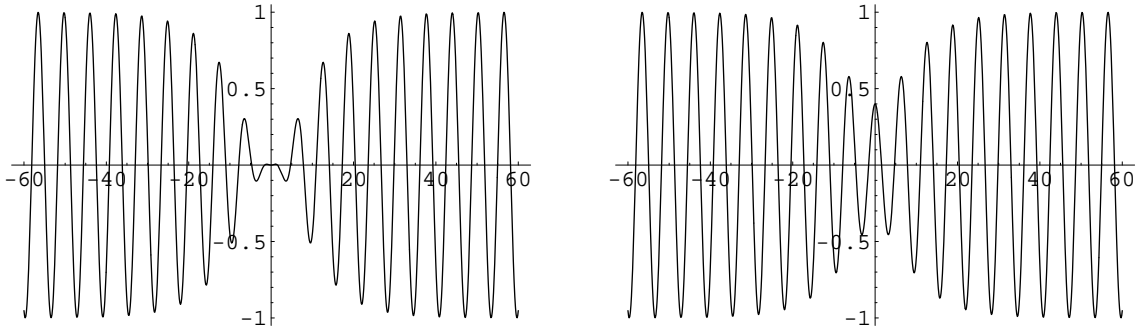


Figure 4: Λύσεις της Μη-Γραμμικής Εξίσωσης Schrödinger τύπου (α) σκοτεινό, (β) γκρίζο σολιτόνιο (οπές), βλ. (15), (16) στο κείμενο. Παρατηρείστε ότι το πλάτος δεν μηδενίζεται ποτέ στο (β).

Συμπερασματικά, οι περιοχές αστάθειας (ευστάθειας) που απεικονίζονται με λευκό (μαύρο) χρώμα στα σχ. 1, 2, δείχνουν επίσης τα ζεύγη τιμών  $(k, \theta)$  όπου φωτεινού (σκοτεινού) τύπου λύσεις δηλ. παλμοί (οπές) μπορούν να διαδοθούν. Επίσης, τα χαρακτηριστικά αυτών των λύσεων θα εξαρτώνται από τη διασπορά μέσω των  $P$  και  $Q$ : π.χ. περιοχές με χαμηλότερη τιμή του  $P$  (η ψηλότερη τιμή του  $Q$ ) θα δέχεται στενότερους παλμούς.

### 3 Ιοντο-ακουστικά κύματα σκόνης

Τα *Ιοντο-Ακουστικά Κύματα Σκόνης* (ΙΑΚΣ) (Dust Ion Acoustic Waves, DIAW) [1, 21] είναι το φυσικό ανάλογο, με παρουσία σκόνης, του γνωστού ιοντο-ακουστικού κύματος (ΙΑΚ) [10], όπου αδρανειακά ιόντα ταλαντώνονται μέσα σε ένα περιβάλλον από θερμά ηλεκτρόνια και βαριά, φορτισμένα μικρο-σωμάτια σκόνης. Τα τελευταία επηρεάζουν δραστικά τόσο την ταχύτητα φάσης, που τώρα είναι  $v_{th,i} \ll v_{ph} \ll v_{th,e}$ , όσο και την συχνότητα, που είναι υψηλότερη από τη συχνότητα πλάσματος σκόνης  $\omega_{p,d}$  (μερικές δεκάδες *KHz* στο εργαστήριο). επομένως, στη χρονική κλίμακα που μας ενδιαφέρει, η σκόνη μπορεί να θεωρηθεί στατική και πρακτικά ακίνητη. Τα ΙΑΚΣ δεν παρουσιάζουν απόσβεση Landau [1].

#### 3.1 Το θεωρητικό μοντέλο

Σύμφωνα με τα παραπάνω, γράφουμε τις εξισώσεις για τα μεγέθη που αφορούν τα ιόντα, σε συνδυασμό με την εξ. Poisson :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{u}_i) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla \mathbf{u}_i &= -\frac{q_i}{m_i} \nabla \Phi - \frac{1}{m_i n_i} \nabla p_i, \\ \frac{\partial p_i}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla p_i &= -\gamma p_i \nabla \cdot \mathbf{u}_i, \\ \nabla^2 \Phi &= -4\pi \sum q_s n_s = 4\pi (n_e e - q_i n_i - q_d n_d), \end{aligned} \quad (17)$$

οι οποίες, σε συνδυασμό με τη συνθήκη ουδετερότητας (5) και κοντά στην κατάσταση ισορροπίας δηλ.  $\Phi \approx 0$ , παίρνουν ακριβώς την (αδιάστατη) μορφή των εξισώσεων (6) (αντικαθιστώντας με  $s = 1$ ,  $\alpha \rightarrow -\tilde{\alpha}$ ), κανονικοποιώντας με κατάλληλα χαρακτηριστικά μεγέθη [22]: το μήκος Debye  $\lambda_{D,e} = (k_B T_e / 4\pi n_{e,0} e^2)^{1/2}$  για το μήκος, την κλίμακα χρόνου  $\lambda_{D,e} / c_s \equiv \omega_{p,e}^{-1} \frac{m_i}{m_e}$ , (όπου  $\omega_{p,e}$  είναι η συχνότητα πλάσματος  $\omega_{p,e} = (4\pi n_{e,0} e^2 / m_e)^{1/2}$ ). Για την πυκνότητα, μέση ταχύτητα και πίεση των ιόντων παίρνουμε: την πυκνότητα ισορροπίας  $n_{i,0}$ , την ταχύτητα ήχου  $c_s \equiv (k_B T_i / m_i)^{1/2}$  και  $p_0 = n_{i,0} k_B T_e$ , αντίστοιχα: επίσης  $k_B T_e / (Z_i e)$  για το δυναμικό  $\Phi$ . Το  $\sigma$  τώρα δηλώνει το λόγο  $T_i / T_e$ .

Οι χαρακτηριστικές (αδιάστατες) παράμετροι στην (6δ) τώρα είναι

$$\tilde{\alpha} = 1/(2Z_i), \quad \alpha' = 1/(6Z_i^2), \quad \beta = Z_i^2 n_{i,0} / n_{e,0} = Z_i / \mu.$$

Η σκόνη επομένως δηλώνει την παρουσία της μέσω του  $\mu$ , όπως ορίστηκε προηγουμένως: θυμηθείτε ότι  $\mu < 1$  ( $\mu > 1$ ) αναφέρεται σε αρνητικό (θετικό) φορτίο κόκκων σκόνης. Όπως περιμένει κανείς, ξαναβρίσκουμε παρακάτω κάποια προηγούμενα αποτελέσματα για τα ιοντο-ακουστικά κύματα (χωρίς σκόνη) [23 – 26] θέτοντας  $\mu = 1$ .

### 3.2 Μη - γραμμική διαμόρφωση πλάτους

Για να μελετήσουμε τη διαμόρφωση πλάτους και τη γένεση αρμονικών, ακολουθούμε πάλι τη μέθοδο που παρουσιάστηκε παραπάνω. Δεν παραθέτουμε τους υπολογισμούς (βλ. [22]), εφόσον το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει, όπως αναφέραμε, εάν θέσουμε  $s = 1$ ,  $\alpha \rightarrow -\tilde{\alpha}$  στις σχέσεις της § 2. Συγκεκριμένα, προκύπτει μετά από πράξεις η εξ. NLS (9) για το πλάτος του ΙΑ κύματος σκόνης (δηλ. για την 1ης τάξης διαταραχή του δυναμικού  $\psi = \phi_1^{(1)}$ ), μαζί με νέες εκφράσεις για τους συντελεστές  $P$  και  $Q$ , βλ. (10) και (11) – (13), αντίστοιχα.

Όπως και στην περίπτωση της § 2, οι προσεγγιστικές εκφράσεις για τα  $P$  και  $Q$  στο (συνεχές) όριο  $k \ll k_D$  προβλέπουν ευστάθεια [27]. Για παράλληλη διαμόρφωση ( $\theta = 0$ ), παρατηρείται αστάθεια πάνω από κάποια τιμή κυματαριθμού  $k_{cr}$ , όπως ακριβώς και χωρίς σκόνη<sup>10</sup>, και κάτω από μία δεύτερη, έστω  $k'_{cr}$ , για μη-μηδενική ιοντική θερμότητα  $T_i$ , δηλ.  $\sigma \neq 0$ ) (και μόνο: για  $T_i = 0$  δηλ.  $\sigma = 0$ , είναι  $k'_{cr} \rightarrow \infty$  βλ. σχ. 5β)· πρβλ. σχ. 2. Το  $k'_{cr}$  ελαττώνεται όταν ανεβαίνει η θερμοκρασία  $T_i$ , όπως και χωρίς σκόνη [28], επομένως θερμά ιόντα ευνοούν την ευστάθεια του ΙΑ κύματος (και) με παρουσία σκόνης.

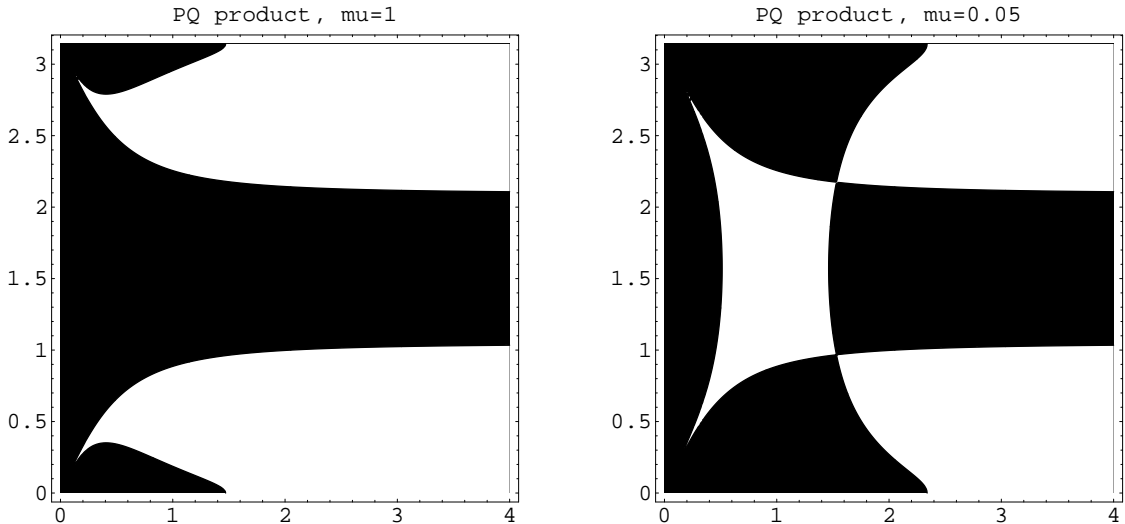


Figure 5: Η καμπύλη μηδενισμού  $PQ = 0$  απεικονίζεται συναρτήσει των  $k$  και  $\theta$  (πρβλ. σχ. 1) σε δύο οριακές περιπτώσεις: (α) στο όριο χωρίς σκόνη (πλάσμα  $e - i$ ) δηλ.  $\mu = 1$ , και (β) με πολύ ισχυρή παρουσία αρνητικής σκόνης,  $\mu = 0,05$ . Αυτό το γράφημα αφορά τα Ιοντο-Ακουστικά Κύματα (§3), όπου έχουμε θέσει  $\sigma = 0$  (ψυχρά ιόντα) και  $Z_i = 1$ .

Γενικά, η παρουσία αρνητικής (αντίστοιχα θετικής) σκόνης ( $\mu < 1$ ) φαίνεται να οδηγεί σε πιο ασταθή (σταθερά) κύματα· βλ. [22] για λεπτομέρειες.

Τέλος, όπως ήταν αναμενόμενο (και από το κοινό πλάσμα  $e - i$  [26]), η πλάγια διαμόρφωση μεταβάλλει έντονα την ευστάθεια του κύματος. Η τιμή του  $k_{cr}$  (πάνω από την οποία έχουμε

<sup>10</sup>Με ανακούφιση, π.χ., βλέπει κανείς να αναδύεται ακριβώς το προηγούμενο αριθμητικό αποτέλεσμα  $k_{cr} = 1.47 k_D$  (βλ. σχ. 5α για  $\theta = 0$ ), εάν  $\mu = 1$ , βλ. [17, 23] μετά από τόσο μακροσκελείς υπολογισμούς.

αστάθεια) ελαττώνεται με το  $\theta$  μέχρι κάποια τιμή  $\theta_{cr}$ , και μετά πηγαίνει στο άπειρο: η *ευρυγώνια διαμόρφωση ευνοεί τη σταθερότητα*, βλ. σχ. 5α <sup>11</sup>. Συμπερασματικά, η πλάγια διαμόρφωση μπορεί να αποσταθεροποιήσει ένα ευσταθές κύμα, και αντιστρόφως. Επίσης, μπορεί να επηρεάσει το είδος του σολιτονίου [22].

## 4 Πλεγματικές ταλαντώσεις με παρουσία σκόνης

Είναι πλέον γνωστό, τόσο θεωρητικά όσο και πειραματικά, ότι το πλάσμα με σκόνη (ΠΣ) μπορεί να υπάρξει σε ‘κρυσταλλική’ μορφή (βλ. εισαγωγή). Όπως έχειδειχτεί πειραματικά [29, 30] (και επαληθευτεί πειραματικά [31]), τα κρυσταλλικά πλέγματα ΠΣ (dust-lattices, DL), επιτρέπουν τη διάδοση τόσο διαμήκων [29] όσο και εγκάρσιων [30] αρμονικών κυμάτων. Εξαιτίας της αναπόφευκτης μη-γραμμικότητας, είτε λόγω του δυναμικού ηλεκτροστατικής (Debye) αλληλεπίδρασης μεταξύ των κόκκων σκόνης, είτε λόγω του (εξωτερικού) ηλεκτρικού δυναμικού στο χώρο μεταξύ των ηλεκτροδίων (sheath), σε πείραμα, θα περίμενε κανείς αυτές οι ταλαντώσεις να υπόκεινται σε μη-γραμμικούς μηχανισμούς, όπως εξάλλου φαίνεται από φαινόμενα που έχουν παρατηρηθεί σε τέτοια πλέγματα π.χ. αστάθειες, αλλαγές φάσης (‘τήξη’) κ.ά. Γνωστοί από καιρό, πολλοί τέτοιοι μηχανισμοί έχουν αναλυθεί διεξοδικά στη Φυσικής Στερεάς Κατάστασης, αλλά σπάνια σε σχέση με ΠΣ [32, 33]. Η αστάθεια διαμόρφωσης, που συναντήσαμε και πριν, είναι ένας από αυτούς: ευθύνεται για τον ενεργειακό εντοπισμό που παρατηρείται σε μη-γραμμικά πλέγματα [34] και πιστεύεται ότι εξηγεί [35] το πέρασμα από γραμμικές (φωνόνια) σε μη-γραμμικές ταλαντώσεις (“breathers”), που παρατηρούνται σε ατομικές αλυσίδες [36].

Εμπνεόμενοι από πειραματικές ενδείξεις για εγκάρσιες μη-γραμμικές ταλαντώσεις κόκκων σκόνης [37], επιλέξαμε να εξετάσουμε τη μη-γραμμική διαμόρφωση τέτοιων ταλαντώσεων που διαδίδονται σε αλυσίδα από κόκκους σκόνης. Θεωρούμε εγκάρσια ( $\sim \hat{z}$ ) κύματα σε πλέγμα σκόνης (ΕΚΠΣ) που διαδίδονται σε οριζόντιο ( $\sim \hat{x}$ ) κρύσταλλο ΠΣ (σταθεράς  $r_0$ ): η εξίσωση κίνησης είναι:

$$M \frac{d^2 \delta z_n}{dt^2} = M \omega_0^2 (2 \delta z_n - \delta z_{n-1} - \delta z_{n+1}) + F_z, \quad (18)$$

όπου  $\delta z_n = z_n - z_0$  η μετατόπιση του  $n$ -οστού κόκκου (μάζας  $M$ , φορτίου  $q$ ) γύρω από τη θέση ισορροπίας  $z_0$  (θεωρούμε μόνο αλληλεπιδράσεις μεταξύ πρώτων γειτόνων). Η εγκάρσια ‘ιδιο-συχνότητα’ είναι  $\omega_0^2 = -\frac{q}{Mr_0} \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \Big|_{x=r_0}$  όπου  $\Phi(x)$  είναι το δυναμικό αλληλεπίδρασης μεταξύ των κόκκων σκόνης ( $x = |x_i - x_j|$ ). π.χ. για ένα δυναμικό τύπου Debye-Hückel:  $\Phi(x) = (q/x) e^{-x/\lambda_D}$ , είναι [1]:  $\omega_0^2 = \frac{q^2}{Mr_0^3} \left(1 + \frac{r_0}{\lambda_D}\right) e^{-r_0/\lambda_D}$ . Η δύναμη  $F_z = F_e - Mg$  είναι η συνισταμένη του βάρους και της δύναμης  $F_e = q E(z)$  λόγω του κατακόρυφου ηλεκτρικού

<sup>11</sup>εκτός εάν έχουμε πολύ έντονη παρουσία σκόνης, δηλ. για  $\mu$  κάτω από  $\approx 0.1$ . βλ. σχ. 5β.

πεδίου  $E(z) = -\partial V(z)/\partial z$ . Το δυναμικό  $V(z)$ <sup>12</sup> αναπτύσσεται απλά σε σειρά γύρω από τη θέση ισορροπίας  $z_0$  δηλ.  $V(z) \approx V(z_0) + V_{(1)} \delta z + \frac{1}{2} V_{(2)} (\delta z)^2 + \frac{1}{6} V_{(3)} (\delta z)^3 + \mathcal{O}[(\delta z)^4]$ , όπου  $V_{(j)} \equiv \left. \frac{\partial^j V(z)}{\partial z^j} \right|_{z=z_0}$ . Η ηλεκτρική δύναμη  $F_e(z) = -q \sum_j \frac{1}{j!} V_{(j+1)} (\delta z)^j \equiv \sum_j \gamma_{(j)} (\delta z)^j$  τώρα έχει: ένα μηδενικής τάξης όρο που εξουδετερώνει τη βαρύτητα στο  $z_0$ , ένα γραμμικό όρο (επαναφοράς)  $\gamma_{(1)} \delta z \equiv -q V_{(2)} \delta z \equiv -M \omega_g^2 \delta z$ , και υψηλότερης τάξης (μη-γραμμικούς) όρους. Η συχνότητα αποκοπής (gap)  $\omega_g = \omega(k=0)$  βρίσκεται θεωρητικά [30] είτε προσδιορίζεται πειραματικά [37]: είναι της τάξης:  $\omega_g/2\pi \approx 20 \text{ Hz}$  σε πειραματικές συνθήκες.

Αν γραμμικοποιήσουμε την εξ. (18), θέτοντας  $\delta z_n = A_n \exp[i(knr_0 - \omega t)] + c.c.$  (όπου  $\omega$  και  $k = 2\pi/\lambda$  είναι η συχνότητα και ο κυματαριθμός), παίρνουμε τη σχέση διασποράς [30]

$$\omega^2 = \omega_g^2 - 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{kr_0}{2}. \quad (19)$$

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει εάν κρατήσουμε τους μη-γραμμικούς όρους.

Θα περιοριστούμε, για απλότητα, στο συνεχές όριο, θεωρώντας μεγάλα μήκη κύματος  $\lambda$  σε σχέση με τη σταθερά πλέγματος  $r_0$  (δηλ.  $kr_0 \ll 1$ ). Η επιτάχυνση  $F_z/M$  στην Εξ. (18), που τώρα περιγράφει την εξέλιξη μιας συνεχούς συνάρτησης  $\delta z = u(x, t)$ , είναι ίση με:  $F_z/M = -\omega_g^2 u - \alpha u^2 - \beta u^3$  όπου οι συντελεστές  $\alpha, \beta$  σχετίζονται με τη μορφή του δυναμικού:  $\alpha = -\gamma_{(2)}/M \equiv qV_{(3)}/(2M)$ ,  $\beta = -\gamma_{(3)}/M \equiv qV_{(4)}/(6M)$ .

Θεωρώντας μικρές μετατοπίσεις:  $u = \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2^2 + \dots$  και χρησιμοποιώντας τη θεωρία δια-ταραχών όπως περιγράφηκε πριν, παίρνουμε τη λύση:

$$u(x, t) = \epsilon \left[ A e^{i(kx - \omega t)} + c.c. \right] + \epsilon^2 \alpha \left[ -\frac{2|A|^2}{\omega_g^2} + \frac{A^2}{3\omega_g^2} e^{2i(kx - \omega t)} + c.c. \right] + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (20)$$

όπου  $\omega$  και  $k$  ικανοποιούν τη σχέση:

$$\omega^2 = \omega_g^2 - c_0^2 k^2 \quad (21)$$

( $c_0 = \omega_0 r_0$ ) · πρβλ. (19) στην περιοχή  $k \approx 0$ . Το πλάτος  $A = A(\zeta)$  κινείται με την (αρνητική!) ταχύτητα ομάδας  $v_g = d\omega/dk = -c_0^2 k/\omega$  στην αντίθετη κατεύθυνση από την ταχύτητα φάσης: αυτό το ιδιόρρυθμο οπισθοδρομικό κύμα (backward wave) έχει πρόσφατα παρατηρηθεί και πειραματικά [39]. Το πλάτος  $A$  περιγράφεται από την Εξ. NLS (9) όπου οι 'αργές' μεταβλητές  $\{\zeta, \tau\}$  τώρα είναι  $\{\epsilon(x - v_g t), \epsilon^2 t\}$ . Οι συντελεστές  $P$  και  $Q$  τώρα είναι:  $P = \omega''(k)/2 = -c_0^2 \omega_g^2/(2\omega^3)$  και  $Q = \frac{1}{2\omega} \left( \frac{10\alpha^2}{3\omega_g^2} - 3\beta \right) = \frac{\omega_g^2}{4\omega} \left[ \frac{5}{3} \left( \frac{V_3}{V_2} \right)^2 - \frac{V_4}{V_2} \right]$ .

Για να προσδιορίσει κανείς τις ακριβείς εκφράσεις των  $P$  και  $Q$  και να διερευνήσει την ευστάθεια του κύματος, χρειάζεται μία δεδομένη μορφή δυναμικού  $V(z)$ . Από πειραματικά δεδομένα [37], έχει προκύψει για τη δυναμική ενέργεια  $\mathcal{U}(z) = qV(z)$  των κόκκων σκόνης

<sup>12</sup>Το δυναμικό  $V(z)$  περιλαμβάνει το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό, καθώς και το δυναμικό λόγω ροής ιόντων (ion wake potential) στο χώρο μεταξύ των ηλεκτροδίων, σε πειράματα εκκένωσης [38].

η εμπειρική σχέση<sup>13</sup>:

$$U(z) \simeq M\omega_g^2 \left[ -0.9 \delta z + \frac{1}{2} (\delta z)^2 - \frac{1}{3} 0.5 (\delta z)^3 + \frac{1}{4} 0.07 (\delta z)^4 + \dots \right].$$

Συγκρίνοντας με τους ορισμούς μας, έχουμε  $V_{(3)}/V_{(2)} = -1$ ,  $V_{(4)}/V_{(2)} = 0.42$ , επομένως  $Q > 0$ . Επίσης  $P < 0$ , κοντά στο  $k = 0$  (συνεχές όριο). Επομένως, οι εγκάρσιες ταλαντώσεις που παρατηρήθηκαν στο πείραμα [37] μπορούν να διαδοθούν σαν ευσταθές κύμα, με μεγάλο μήκος κύματος  $\lambda$ . Για μικρότερο όμως μήκος κύματος, στη γενικότερη (διακριτή) περίπτωση, ο συντελεστής  $P = \omega''(k)/2$  - όπως προκύπτει από την (19) - αλλάζει πρόσημο σε κάποια τιμή<sup>14</sup> του  $k$  και το γινόμενο  $PQ$  μπορεί να γίνει θετικό· το εγκάρσιο αυτό κύμα πλέγματος σκόνης μπορεί επομένως να είναι δυνάμει ασταθές.

Όπως είδαμε, εφόσον το πλάτος του κύματος περιγράφεται από την Εξ. (9), μπορούμε να περιμένουμε την ύπαρξη και διάδοση φωτεινών, για  $PQ > 0$ ) είτε σκοτεινών ( $PQ < 0$ ) σολιτονίων [19]· αυτά θα δίνονται ακριβώς από τις σχέσεις που είδαμε παραπάνω. Τα πρώτα (παλμοί) θα σχηματίζονται εάν επιλέξουμε αρκετά μικρό μήκος κύματος (ώστε  $PQ > 0$ ). Τα τελευταία (οπές), αν και φαινομενικά ευνοούνται στο συνεχές όριο, δεν είναι μάλλον φυσικά αποδεκτά στο μοντέλο αυτό (αλυσίδα απείρου μήκους), εφόσον εκπροσωπούν άπειρη αποθηκευμένη ενέργεια. Αυτές οι προβλέψεις μπορούν να διερευνηθούν πειραματικά.

## 5 Συμπεράσματα

Είδαμε ότι

- (α) τα ηλεκτροστατικά κύματα που διαδίδονται σε πλάσμα με παρουσία σκόνης υπόκεινται σε αστάθεια που συνδέεται με τη διαμόρφωση του πλάτους τους·
- (β) η υπόθεση ότι η διαμόρφωση αυτή συμβαίνει σε διεύθυνση πλάγια ως προς τη διεύθυνση διάδοσης, μπορεί να επηρεάσει έντονα το χαρακτήρα του κύματος: περιοχές σταθερές σε παράλληλη διαμόρφωση αποσταθεροποιούνται, και αντιστρόφως·
- (γ) ευρυγώνια διαμόρφωση ευνοεί την ευστάθεια, ενώ μικρές γωνίες προκαλούν αστάθεια, κυρίως για μικρά μήκη κύματος·
- (δ) το πλάσμα με παρουσία σκόνης επιτρέπει τη διάδοση εντοπισμένων διεγέρσεων της περιβάλλουσας του κύματος (envelope excitations)· περιοχές τιμών των  $(k, \theta)$  με ευστάθεια (αστάθεια) δέχονται σκοτεινού (φωτεινού) τύπου τέτοια σολιτόνια, με χαρακτηριστικά που εξαρτώνται από τα  $k, \theta$  μέσω των συντελεστών της Μη-Γραμμικής Εξίσωσης Schrödinger·
- (ε) σε σύγκριση με το κοινό  $(e - i)$  πλάσμα, η παρουσία θετικά (αρνητικά) φορτισμένης σκόνης ευνοεί (αναιρεί) την ευστάθεια, ευνοώντας τη διάδοση σκοτεινών (φωτεινών) σολιτονίων, δηλ. οπών (παλμών).

<sup>13</sup>Βλ. Εξ. (9) στο [37].

<sup>14</sup>Στη Φυσική Στερεάς Κατάστασης, αυτή η τιμή του  $k$  είναι γνωστή ως σημείο μηδενικής διασποράς (zero-dispersion point) της ζώνης Brillouin.

Συμπερασματικά, παρουσιάσαμε μία γενική μέθοδο για τη μελέτη της διαμόρφωσης πλάσματος των ηλεκτροστατικών κυμάτων που διαδίδονται σε πλάσμα με παρουσία σκόνης. Εστιάζοντας στα ποιοτικά χαρακτηριστικά του μοντέλου, επιλέξαμε να αγνοήσουμε φαινόμενα όπως η απόσβεση λόγω κρούσεων μεταξύ ιόντων και κόκκων σκόνης (ion drag) είτε μεταξύ κόκκων και ουδέτερου περιβάλλοντος (neutral drag), διακυμάνσεων μεγέθους και φορτίου των κόκκων, επίσης η μη-καρτεσιανή, πεπερασμένη γεωμετρία πλάσματος κ.λ.π.

#### **Σημειώσεις - ευχαριστίες.**

Το κείμενο αυτό στηρίζεται στη μελέτη [40].

Παρουσιάστηκε στο 16ο Θερινό Σχολείο/Πανελλήνιο Συνέδριο *Μη-Γραμμική Δυναμική: Χάος και Πολυπλοκότητα* (Χαλκίδα, 14-24 Ιουλίου 2003), τους διοργανωτές του οποίου ευχαριστούμε.

Η εργασία αυτή πραγματοποιήθηκε με την υποστήριξη της Επιτροπής Ευρωπαϊκών Κοινοτήτων (Human Potential Research and Training Network, Πρόγραμμα: “*Complex Plasmas: The Science of Laboratory Colloidal Plasmas and Mesospheric Charged Aerosols*” - HPRN-CT-2000-00140).



## Αναφορές

- [1] P. K. Shukla and A. A. Mamun, *Introduction to Dusty Plasma Physics* (Institute of Physics, Bristol, 2002).
- [2] F. Verheest, *Waves in Dusty Space Plasmas* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001).
- [3] C. Goertz, *Rev. Geophysics* **27**, 271 (1989).
- [4] Βλ. πλήθος άρθρων στον τόμο: P. K. Shukla, D. A. Mendis & T. Desai (Eds.), *Advances in Dusty Plasmas* (World Scientific, Singapore, 1997).
- [5] U. de Angelis, *Phys. Scr.* **45**, 465 (1992).
- [6] A. Bouchoule (Ed.), *Dusty Plasmas: Physics, Chemistry and Technical Impacts* (Wiley, New York, 1999).
- [7] J. Winter, *Plasma Phys. Cont. Fusion* **40**, 1201 (1998).
- [8] P. Bliokh, V. Sinitsin & V. Yaroschenko, *Dusty and self-gravitational plasmas in space*, (Kluwer Academic, Dordrecht, 1995).
- [9] M. Nambu *et al.*, *Phys. Letters A* **203**, 40 (1995).
- [10] Α. Βλάχος, *Φυσική Πλάσματος*, Εκδόσεις Τζιόλα (Θεσσαλονίκη 2000); N. A. Krall and A. W. Trivelpiece, *Principles of plasma physics*, McGraw - Hill (New York, 1973); Th. Stix, *Waves in Plasmas*, American Institute of Physics (New York, 1992).
- [11] M. Remoissenet, *Waves Called Solitons* (Springer-Verlag, Berlin, 1994).
- [12] A. Hasegawa, *Plasma Instabilities and Nonlinear Effects* (Springer-Verlag, Berlin, 1975); επίσης: *Optical Solitons in Fibers* (Springer-Verlag, 1989).
- [13] N. N. Rao, P. K. Shukla and M. Y. Yu, *Planet. Space Sci.* **38**, 543 (1990).
- [14] A. Barkan, R. Merlino and N. D'Angelo, *Phys. Plasmas* **2** (10), 3563 (1995); J. Pieper and J. Goree, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3137 (1996).
- [15] W. Duan, K. Lü and J. Zhao, *Chin. Phys. Lett.* **18**, 1088 (2001).
- [16] M. R. Amin, G. E. Morfill and P. K. Shukla, *Phys. Rev. E* **58**, 6517 (1998).
- [17] T. Taniuti and N. Yajima, *J. Math. Phys.* **10**, 1369 (1969); N. Asano, T. Taniuti and N. Yajima, *J. Math. Phys.* **10**, 2020 (1969).

- [18] I. Kourakis and P. K. Shukla, *Oblique amplitude modulation of dust-acoustic plasma waves*, Journal of Mathematical Physics, submitted (2003).
- [19] R. Fedele *et al.*, *Phys. Scripta T* **98** 18 (2002); also, R. Fedele and H. Schamel, *Eur. Phys. J. B* **27** 313 (2002).
- [20] Σύμφωνα με το [19], προσαρμόζοντας την ονοματολογία εκεί ως εξής:  $x \rightarrow \zeta$ ,  $s \rightarrow \tau$ ,  $\rho_m \rightarrow \rho_0$ ,  $\alpha \rightarrow 2P$ ,  $q_0 \rightarrow -2PQ$ ,  $\Delta \rightarrow L$ ,  $E \rightarrow \Omega$ ,  $V_0 \rightarrow u$ .
- [21] P. K. Shukla and V. P. Silin, *Phys. Scr.* **45**, 508 (1992).
- [22] I. Kourakis and P. K. Shukla, *Modulational instability and localized excitations of dust-ion acoustic waves*, *Phys. Plasmas* **10**, in press (2003).
- [23] K. Shimizu and H. Ichikawa, *J. Phys. Soc. Japan* **33**, 789 (1972).
- [24] T. Kakutani and N. Sugimoto, *Phys. Fluids* **17**, 1617 (1974).
- [25] J.-K. Xue, W.-S. Duan and L. He, *Chin. Phys.* **11**, 1184 (2002).
- [26] M. Kako and A. Hasegawa, *Phys. Fluids* **19**, 1967 (1976).
- [27] Για να το δούμε, αντικαθιστούμε στις εκφράσεις των  $P$ ,  $Q$  στο όριο για χαμηλό  $k$  (βλ. 2 στο κείμενο) με τις τιμές των παραμέτρων  $\{\alpha, \beta, s\}$  που αναφέρονται στην παράγραφο 3· πρβλ. Εξ. (41) στην [23]: παρατηρήσετε ότι ξαναβρίσκουμε τον ίδιο αριθμητικό παράγοντα  $1/3$  εδώ, για  $\mu = 1$ .
- [28] I. Durrani *et al.*, *Phys. Fluids* **22**, 791 (1979).
- [29] F. Melandsø, *Phys. Plasmas* **3**, 3890 (1996); B. Farokhi *et al.*, *Phys. Lett. A* **264**, 318 (1999); *idem*, *Phys. Plasmas* **7**, 814 (2000); D. Tskhakaya and P. K. Shukla, *Phys. Lett. A* **286**, 277 (2001).
- [30] S. V. Vladimirov *et al.*, *Phys. Rev. E* **56**, R74 (1997).
- [31] A. Melzer *et al.*, *Phys. Lett. A* **191**, 301 (1994); Y. Hayashi and K. Tachibana, *Jpn. J. Appl. Phys.* **33**, L84 (1994).
- [32] M. R. Amin, G. E. Morfill and P. K. Shukla, *Phys. Plasmas* **5** (7), 2578 (1998); also: *idem*, *Phys. Scripta* **58**, 628 (1998).
- [33] I. Kourakis, *Proceedings of the 29th EPS meeting on Controlled Fusion and Plasma Physics, European Conference Abstracts (ECA) Vol. 26B P-4.221* (2002).
- [34] Y. S. Kivshar and M. Peyrard, *Phys. Rev. A* **46**, 3198 (1992).

- [35] I. Daumont *et al*, *Nonlinearity***10**, 617 (1997); M. Peyrard, *Physica D* **119**, 184 (1998).
- [36] See several papers in the volume: G. Tsironis and E. N. Economou (Eds.), *Fluctuations, Disorder and Nonlinearity*, *Physica D* **113**, North-Holland, Amsterdam (1998); T. Bountis *et al.*, *Phys. Lett.* **268**, 50 (2000).
- [37] A.V.Ivlev *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4060 (2000).
- [38] P. K. Shukla and N. N. Rao, *Phys. Plasmas* **3**, 1770 (1996).
- [39] T. Misawa *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 1219 (2001).
- [40] I. Kourakis and P. K. Shukla, *Modulated Wave-packets and Envelope Solitary Structures in Complex Plasmas*, *IEEE Transactions in Plasma Science*, submitted (2003).