

ΔΙΑΔΟΣΗ ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΕ ΠΛΑΣΜΑ ΜΕ ΣΚΟΝΗ – ΠΑΡΟΥΣΙΑ ΣΚΟΝΗΣ ΣΤΟ ΠΛΑΣΜΑ ΣΥΝΤΗΞΗΣ *†

Ιωάννης Κουράκης

*Ruhr-Universität Bochum, Fakultät für Physik und Astronomie
Institut für Theoretische Physik IV, D-44780 Bochum, Γερμανία
Email: ioannis@tp4.rub.de*

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η εργασία αυτή είναι αφιερωμένη στην μελέτη των γραμμικών και μη-γραμμικών χαρακτηριστικών της διάδοσης ηλεκτροστατικών κυμάτων σε μη μαγνητισμένο πλάσμα με παρουσία φορτισμένων κόκκων σκόνης (πλάσμα με σκόνη, ΠΣ· dusty plasma, DP). Μία εκτενής εισαγωγή είναι αφιερωμένη στις βασικές έννοιες που είναι απαραίτητες για μία πρώτη γνωριμία με αυτό τον τύπο πλάσματος, περιγράφοντας σύντομα τη σχέση του με το χώρο της Ελεγχόμενης Σύντηξης. Τρεις γνωστοί τύποι ηλεκτροστατικού κύματος ΠΣ παρουσιάζονται: α) το Ακουστικό Κύμα Σκόνης, β) το Ιοντο-Ακουστικό Κύμα Σκόνης και γ) εγκάρσιες Ταλαντώσεις Πλέγματος Σκόνης (σε ισχυρά συζευγμένο ΠΣ). Αφού οριστεί ο κάθε τύπος κύματος, θα περιγραφεί τη μεθοδολογία που χρησιμοποιείται για τη μελέτη της (χρονικής και χωρικής) εξέλιξης του πλάτους του κύματος και θα διερευνησουμε την ευστάθειά του. Θα δείξουμε ότι τα κύματα χαρακτηρίζονται από αστάθεια διαμόρφωσης (*modulational instability*), που μπορεί να οδηγήσει στο σχηματισμό μη-γραμμικών διεγέρσεων (σολιτονίων) για την περιβάλλουσα του κύματος (*envelope solitons*). Τέλος, θα συνοψίσουμε τα χαρακτηριστικά αυτών των μη-γραμμικών κυμάτων, εξετάζοντας την εξάρτησή τους από την διασπορά και τις φυσικές παραμέτρους του πλάσματος.

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σκοπός της παρουσίασης αυτής είναι η μελέτη της διάδοσης κάποιων ηλεκτροστατικών κυμάτων μέσα σε φορτισμένη ύλη (πλάσμα) με παρουσία σκόνης (βλ. ορ. παρακάτω). Μετά από μία σύντομη εισαγωγή στις απαραίτητες βασικές έννοιες, θα περιγράψουμε κάποια

* *Electrostatic wave propagation in dusty plasmas - occurrence of dust in fusion plasmas;* Ioannis Kourakis, in collaboration with Prof. Padma Kant Shukla; proc. 3rd Hellenic School of Fusion Physics and Technology, , 29 March - 2 April 2004; org. Euratom-Hellenic Republic Association, held at: University of Thessaly, Volos, Greece; online at: www.tp4.rub.de/~ioannis/tutorials/2004T01.pdf .

† σε συνεργασία με τον κ. Καθ. Padma Kant Shukla; 3ο Σχολείο Φυσικής και Τεχνολογίας Σύντηξης, 29 Μαρτίου - 2 Απριλίου 2004· οργ. Ένωση Euratom-Ελληνική Δημοκρατία, Παν. Θεσσαλίας, Βόλος.

(γραμμικά) κύματα που εμφανίζονται σε αυτό τον τύπο πλάσματος και θα διερευνήσουμε την επίδραση της μη-γραμμικότητας όταν το πλάτος του κύματος σταδιακά αυξάνεται. Στο σύνολο του χειμένου, στόχος μας είναι τόσο το επίπεδο (από την πλευρά των φυσικών και μαθηματικών εννοιών) όσο και η ροή της παρουσίασης να παραμείνουν όσο το δυνατό πιο απλά, αντανακλώντας τις παιδαγωγικές επιδιώξεις του Σχολείου². Παρόλα αυτά, κάποια εξοικείωση με βασικές έννοιες της Φυσικής Πλάσματος θεωρείται δεδομένη και είναι απαραίτητη για τη συνέχεια.

Με τον όρο *Πολύπλοκο Πλάσμα* (Complex Plasma) ή *Πλάσμα με παρουσία Σκόνης* (συντ. ΠΣ, στη βιβλιογραφία: DP - Dusty Plasma) περιγράφουμε μία μεγάλη συλλογή από φορτισμένα σωματίδια δηλ. ηλεκτρόνια e και ιόντα i (πλάσμα) στα οποία έχει προστεθεί σημαντικός αριθμός από μικρο-σωμάτια (κόκκοι σκόνης) με μεγάλη μάζα M και ισχυρό φορτίο Q [1 – 3]. Ο σχετικός κλάδος της Φυσικής Πλάσματος έχει γνωρίσει ιδιαίτερη άνθηση τις τελευταίες δύο δεκαετίες, χάρη στην εκτεταμένη παρουσία ΠΣ στην ατμόσφαιρα¹ [4] (επίδραση στη διάδοση ΗΜ κυμάτων στην ατμόσφαιρα, δορυφορικές παρατηρήσεις στη μαγνητόσφαιρα), στο Διάστημα [2] (Ηλιακό Σύστημα [5], μεσοαστρικός χώρος [6], πλανητικοί δακτύλιοι από σκόνη [7]), σε εργαστηριακές και βιομηχανικές εφαρμογές [8, 9], σε αντιδραστήρες Πυρηνικής Σύντηξης [10] κλπ. Η πρόσφατη βιβλιογραφία περιλαμβάνει αρκετές αναλυτικές αναφορές τόσο της πειραματικής μελέτης της δυναμικής των φυσικών προσμίξεων (σκόνης) σε διάφορους τύπους πλάσματος, όσο και της επίδρασής της στις φυσικές ιδιότητες του πλάσματος², επομένως δεν θα επιμείνουμε περισσότερο, σε επίπεδο γενικής περιγραφής, σε αυτή τη σύντομη εισαγωγή. Επίσης, δεν θα ασχοληθούμε λεπτομερώς με κάποιες κλασικές έννοιες σχετικές με την περιγραφή του πλάσματος γενικά, εφόσον αυτές μπορεί να τις αναζητήσει κανείς σε πανεπιστημιακά βιβλία Φυσικής Πλάσματος³. Τέλος, σε ότι αφορά ειδικότερα το πρόβλημα των ηλεκτροστατικών κυμάτων ΠΣ που θα συζητήσουμε, οι τεχνικές λεπτομέρειες (που θα παραλείψουμε σκόπιμα εδώ, για συντομία) βρίσκονται σε κάποιες εργασίες που αναφέρονται στο τέλος⁴.

1.1 Γενικά χαρακτηριστικά του πλάσματος με σκόνη (ΠΣ)

Οι κόκκοι σκόνης που συναντιούνται στο πλάσμα χαρακτηρίζονται από ισχυρό φορτίο Q ($\sim 10^3 - 10^4 e$, όπου e δηλώνει το φορτίο του ηλεκτρονίου), συνήθως αρνητικό⁵, υψηλή μάζα M (μέχρι και $\sim 10^9 m_p \sim 10^{13} m_e$) και μεγάλη (“μεσοσκοπική”) ακτίνα r σε σχέση με τα ατομικά δεδομένα (από $10^{-2} \mu m$ έως $10^2 \mu m$). βεβαίως, τα μεγέθη αυτά διαφέρουν από τη μία περίπτωση στην άλλη, ανάλογα με το φυσικό περιβάλλον (δηλ. ατμόσφαιρα, διάστημα, εργαστήριο, αντιδραστήρες) και με τον φυσικό μηχανισμό στον οποίο οφείλουν

¹Η σκόνη στην ατμόσφαιρα προέρχεται κυρίως από τον άνθρωπο (μόλυνση, κατάλοιπα προωθητικών μηχανών), αλλά και από κομήτες: είναι ευρέως ... άγνωστο ότι η Γή βομβαρδίζεται από $2 \cdot 10^4$ τόνους υλικού διαστημικής προέλευσης ετησίως! [3]

²Βλ. το συλλογικό τόμο [8] για μια εξωνυχιστική παρουσίαση των χαρακτηριστικών και της Φυσικής διαφόρων τύπων πλάσματος με σκόνη. Επίσης, βλ. κάποιες πρόσφατες μονογραφίες, όπως [2] (αναλυτική παρουσίαση επιμέρους θεμάτων, θεωρητικών και εργαστηριακών), [1] (με έμφαση στα κύματα), [11] (με έμφαση στη βαρυτο-ηλεκτροδυναμική, δηλαδή την επίδραση βαρυτικού πεδίου στη διάδοση κυμάτων πλάσματος στην Αστροφυσική) κ.ά. Μία συνοπτική περιγραφή των βασικών αρχών της Φυσικής ΠΣ υπάρχει στο άρθρο [12].

³Βλ. για παράδειγμα βιβλία όπως [13 – 16] κ.ά.

⁴Βλ. [17, 18, 19, 20] για τα ΑΚΣ, τα ΙΑΚΣ (ψυχρό μοντέλο, $T = 0$), τα ΙΑΚΣ (θερμό μοντέλο, $T \neq 0$) και τα εγχάρσια κύματα πλέγματος σκόνης (βλ. παρακάτω), αντίστοιχα.

⁵Αυτό οφείλεται προφανώς στην ευκολότερη απορρόφηση των (πιο ελαφρών και ευκίνητων, σε σχέση με τα θετικά ιόντα) ηλεκτρονίων από τους κόκκους σκόνης. Παρόλα αυτά, αναφέρεται επίσης ύπαρξη θετικά φορτισμένης σκόνης, κυρίως στο Διάστημα.

την ύπαρξη και το ηλεκτρικό τους φορτίο [2, 3]. Όπως είναι εμφανές, ο χαρακτηριστικός λόγος φορτίου προς μάζα Q/M (ειδικό φορτίο) των σωματίων αυτών (δηλ. των κόκκων σκόνης) είναι κατά πολλές κλίμακες μεγέθους μικρότερος από την τιμή του για τα ιόντα ή τα ηλεκτρόνια (περίπου $1:10^{5+}:10^{9+}$ για $d : i : e$ αντίστοιχα). Αυτό οδηγεί σε νέα φυσικά φαινόμενα που χαρακτηρίζονται από χαρακτηριστικές κλίμακες χρόνου και μήκους έντονα διαφοροποιημένες από αυτές του πλάσματος $e - i$. Για παράδειγμα, ας πάρουμε τη συνθήκη ουδετερότητας του φορτίου μέσα σε ένα πλάσμα $e - i - d$ (d : dust, σκόνη) σε ισορροπία:

$$\sum_{\alpha=e,i,d} Q_s = 0 \quad \Rightarrow \quad n_{i,0}Z_i e + s n_{d,0}Z_d e - n_{e,0}e = 0,$$

όπου με $n_{\alpha,0}$ συμβολίζουμε την αριθμητική πυκνότητα (αρ. σωματίων ανά μονάδα όγκου) του πληθυσμού α ($\alpha = d, i, e$) στην κατάσταση ισορροπίας, με s συμβολίζουμε το πρόσημο του φορτίου της σκόνης d , δηλ. $s = +1$ (-1) για θετικό (αρνητικό, αντίστοιχα) φορτίο, και με Z_i (Z_d) το βαθμό ιονισμού των ιόντων (κόκκων σκόνης) – τυπικά ≈ 1 ($10^3 - 10^4$, αντίστοιχα)· με e δηλώνουμε στη συνέχεια την απόλυτη τιμή του φορτίου του ηλεκτρονίου. Ορίζοντας τη μεταβλητή $\delta = Z_d n_{d,0}/Z_i n_{i,0}$ που προσδιορίζει την περιεκτικότητα σε σκόνη⁶, παίρνουμε

$$n_{e,0} = (1 + s\delta) n_{i,0}Z_i.$$

Με μία πρώτη ματιά στη βιβλιογραφία παίρνει κανείς τις εξής ενδεικτικές τιμές, για ένα εργαστηριακό πλάσμα ΠΣ [21]: $n_i \sim 10^9 \text{ cm}^{-3}$, $n_d \sim 10^5 - 10^6 \text{ cm}^{-3}$, $Q_d = -Z_d e \sim 10^3 - 10^4 e$, $n_d \sim 10^9 \delta \text{ cm}^{-3}$ (και ακτίνα κόκκων $r = 1 - 5 \mu\text{m}$). Ένας πρόχειρος υπολογισμός (βλ. [21] για λεπτομέρειες) δίνει μία *συχνότητα ταλαντώσεων πλάσματος*⁷ $\omega_{p,\alpha} = (4\pi n_\alpha Q_\alpha^2/m_\alpha)^{1/2}$ ίση με $\omega_{p,e} = 10^9 \text{ s}^{-1}$ (ή Hz) για τα ηλεκτρόνια, $\omega_{p,i} = 10^7 \text{ s}^{-1}$ για τα ιόντα, και $\omega_{p,d} = 10^3 \delta^{-1/2} \text{ s}^{-1}$ για τους κόκκους σκόνης: παρατηρούμε ότι $\omega_{p,d} \ll \omega_{p,i}, \omega_{p,e}$. Επίσης, σε ότι αφορά τις συχνότητες αλληλεπιδράσεων (κρούσεων) $\nu_{\alpha,\alpha'}$, αυτές είναι της τάξης των $\sim 10^4 - 10^5 \text{ s}^{-1}$ για κρούσεις μεταξύ e, i (δηλ. $\nu_{e,e}, \nu_{i,i}, \nu_{e,i}$)· επίσης $\nu_{d,e}, \nu_{d,i} \sim 10^8 - 10^9 \text{ s}^{-1}$. όμως, $\nu_{d,d} \sim 1 \times \delta^1 \text{ s}^{-1}$ (!), πράγμα που επιτρέπει την παρατήρηση (και ψηφιακή καταγραφή – κινηματογράφηση με απλό εξοπλισμό! [22]) φαινομένων που πηγάζουν από την Κινητική Θεωρία (η οποία σχετίζεται από την ίδια της τη θεμελίωση με μικροσκοπικές χρονικές κλίμακες [14])⁸.

Η διαφορά του ΠΣ από το “κοινό” πλάσμα $e - i$ όμως δεν είναι μόνο ποσοτική, αλλά και (κυρίως) ποιοτική. Μία σειρά από νέα ‘εξωτικά’ φαινόμενα εμφανίζονται· ας αναφέρουμε μερικά.

α) Η *χρονική διακύμανση του φορτίου* Q (λόγω δυναμικής φόρτισης από το ιονισμένο περιβάλλον)⁹ επιβάλλει μία νέα περιγραφή από την πλευρά της Στατιστικής Μηχανικής – όπου το Q αποτελεί δυναμική μεταβλητή και όχι σταθερά [23, 24] – και προκαλεί ένα νέο

⁶ Δηλ. $\delta = 0$ χωρίς σκόνη, και $\delta = 1$ (με $s = -1$) για πλήρη απορρόφηση των ηλεκτρονίων από τη σκόνη, κατάσταση που είναι όχι τόσο σπάνια σε περιβάλλον π.χ. γύρω από κομήτες.

⁷ Πρόκειται π.χ. για το αντίστροφο του χαρακτηριστικού χρόνου $\tau_{D,\alpha} \approx \omega_{p,\alpha}^{-1} = \lambda_{p,\alpha}/v_{th,\alpha}$ που χρειάζεται για το σχηματισμό του νέφους Debye γύρω από το σωματίο ($v_{th,\alpha}$ είναι η θερμική ταχύτητα $(T_\alpha/m_\alpha)^{1/2}$ (T_α : θερμοκρασία του πληθυσμού σωματίων α) και $\lambda_{p,\alpha} = v_{th,\alpha}/\omega_{p,\alpha}$ το μήκος Debye για το σωματίο $\alpha = e, i, d$)· βλ. [13, 14, 16].

⁸ Για αυτό το λόγο τα φαινόμενα που μελετά η Φυσική (και η Χημεία) σε σχέση με την παρουσία σκόνης στο πλάσμα (και σε κolloειδή διαλύματα, στη Χημεία) αποκαλούνται *μεσοσκοπικά φαινόμενα*.

⁹ Για τις παραπάνω τιμές πλάσματος ΠΣ, η χαρακτηριστική χρονική σταθερά μεταβολής του φορτίου (φόρτισης) είναι της τάξης του $\tau_{ch} \sim 3 \times 10^{-6} \text{ s}$, πράγμα που επιτρέπει αυτή να αγνοείται σε πρώτη φάση (θεωρώντας $Q \approx \text{σταθ.}$) όταν μελετούνται κυματικά φαινόμενα χαμηλής συχνότητας $\omega \ll \tau_{ch}^{-1}$ – βλ. παρακάτω.

μηχανισμό απόσβεσης (ανεξάρτητο από την απόσβεση Landau ή τις συγκρούσεις μεταξύ των σωματιδίων).

β) Η εξαιρετικά χαμηλή σχέση του φορτίου Q προς τη μάζα M των κόκκων σκόνης οδηγεί σε βαρυτικές δυνάμεις οι οποίες μπορεί να είναι συγκρίσιμες σε τάξη μεγέθους με τις ηλεκτρικές (κυρίως σε αστροφυσικό περιβάλλον) [1, 11] - αυτό το στοιχείο δεν υπήρχε στην παραδοσιακή ηλεκτροδυναμική των ηλεκτρονίων και των ιονισμένων ατόμων.

γ) Η σημαντική μεταβολή της φασικής ταχύτητας $v_{ph} = \omega/k$ των ηλεκτροστατικών κυμάτων (λόγω της σκόνης) έχει ως αποτέλεσμα τη μειωμένη εμφάνιση απόσβεσης Landau [13, 16] κατά τη διάδοση ακόμη και κοινών (π.χ. ιοντο-ακουστικών) ηλεκτροστατικών κυμάτων μέσα σε ΠΣ¹⁰.

δ) Παρατηρείται πειραματικά (και ερμηνεύεται θεωρητικά) η δυνατότητα έλξης μεταξύ (ομόσημα φορτισμένων) κόκκων σκόνης (!), λόγω σύζευξης με κάποιο περιβάλλον κύμα η κατά την παρουσία ροής ιόντων σε πειράματα [25]: πρόκειται για μηχανισμό ανάλογο του φαινομένου Cooper (σχηματισμός ζεύγους ηλεκτρονίων) στην υπεραγωγικότητα [2].

ε) Ένα εντυπωσιακό νέο φαινόμενο που οφείλεται στην υψηλή τιμή του φορτίου Q είναι η δυνατότητα για υψηλές τιμές της μέσης Δυναμικής (σε σχέση με την Κινητική) Ενέργειας στο πλάσμα, δηλ. για υψηλές τιμές της παραμέτρου πλάσματος $\Gamma = E_{δυν}/E_{κιν} \sim (Q^2/r)/(k_B T)$ ¹¹, με αποτέλεσμα ακόμη και το σχηματισμό κρυσταλλικών δομών σε 1, 2 ή 3 διαστάσεις¹², πράγμα που επιτρέπει την παρατήρηση (και επιβάλλει τη θεωρητική ερμηνεία) νέων φαινομένων (για τη Φυσική Πλάσματος) όπως αλλαγές φάσης¹³, ταλαντώσεις πλέγματος, κρυσταλλικές δομές κλπ.

Αυτά τα νέα φυσικά φαινόμενα, σε συνδυασμό με άλλα πιο εξειδικευμένα που παραλείπουμε εδώ (π.χ. ανομοιογένεια στη στατιστική κατανομή της μάζας και των διαστάσεων των φορτισμένων κόκκων, νέοι μηχανισμοί απόσβεσης κ.ά.) συνθέτουν εδώ και (λιγότερο από) δύο δεκαετίες ένα νέο puzzle στο χώρο της Φυσικής Πλάσματος και επιβάλλουν την ανάγκη για ερμηνεία νέων φαινομένων (κύματα, αστάθειες, ...) που οφείλονται ακριβώς στην παρουσία των προσμίξεων (σκόνης).

Ας δούμε όμως, σε συντομία, τι σχέση θα μπορούσε να υπάρχει μεταξύ του πλάσματος με σκόνη (ΠΣ) και της Φυσικής που εφαρμόζεται στην ελεγχόμενη σύντηξη¹⁴.

1.2 Ο ρόλος της σκόνης σε αντιδραστήρες σύντηξης

Η παρουσία σκόνης σε αντιδραστήρες ελεγχόμενης σύντηξης (ΑΕΣ) [28] και η πιθανή επίπτωσή της στη συμπεριφορά του πλάσματος κατά τη λειτουργία τους, αποτελούν ένα ανοικτό θέμα που μόλις τα τελευταία λίγα χρόνια έχει αρχίσει να εξετάζεται προσεκτικά [10]. Ιδιαίτερη αφορμή για αυτό αποτελεί, τελευταία, η συντονισμένη προσπάθεια πολλών ερευνητικών ομάδων για συλλογή τεχνολογίας από υπάρχουσες 'μηχανές σύντηξης'

¹⁰Θυμηθείτε ότι το φαινόμενο της απόσβεσης Landau έρχεται στο προσκήνιο όταν η φασική ταχύτητα $v_{th} = \omega/k$ είναι συγκρίσιμη σε μέγεθος με τη θερμική ταχύτητα $v_{th} = k_B T/m$ των ηλεκτρονίων (ή και των πρωτονίων, ανάλογα με το πρόβλημα) [13, 16]. Δείτε σχετικά τη διάλεξη του κ. Α. Βλάχου στις σημειώσεις του *Ιου Σχολείου Φυσικής και Τεχνολογίας Σύντηξης* (Παν. Θεσσαλίας, 2002).

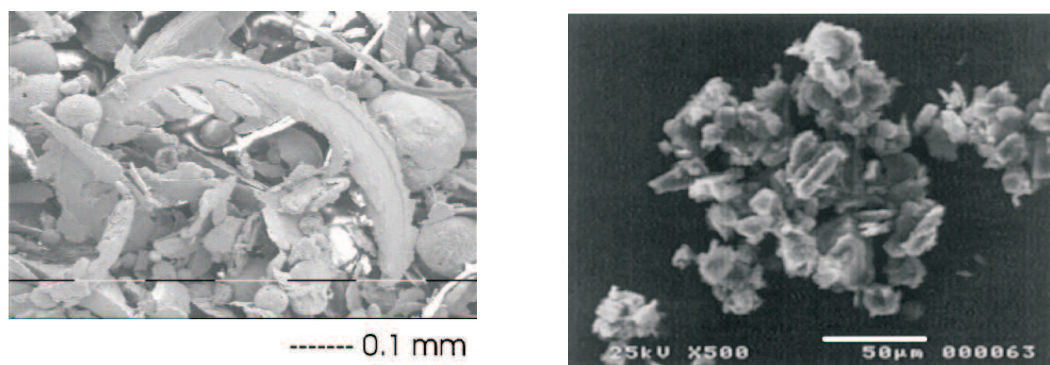
¹¹ r : μέση απόσταση μεταξύ σωματιδίων, T : θερμοκρασία, k_B : η σταθερά του Boltzmann. Οποιοδήποτε πανεπιστημιακό βιβλίο Φυσικής Πλάσματος [14, 16] αναφέρει ότι το ιδανικό πλάσμα χαρακτηρίζεται από ασθενή σύζευξη, δηλ. $\Gamma \ll 1$. Αυτό δεν αφορά το πλάσμα με σκόνη, όπου ακόμη και τιμές της τάξης του 10^2 έως 10^4 είναι συνηθισμένες!

¹²Βλ. [26] για ανασκόπηση των πειραματικών παρατηρήσεων σε σχέση με το "στερεό" αυτό πλάσμα.

¹³Παρατηρείται 'τήξη' (δηλ. μετάβαση από τη 'στερεά' φάση προς την 'υγρή') για $\Gamma \geq 170$ (θεωρητική πρόβλεψη: ΙΚΕΖΙ 1986 [27], που κατόπιν επαληθεύτηκε πειραματικά).

¹⁴Η επόμενη παράγραφος §1.2 αποτελεί βεβαίως πληροφοριακή παρένθεση στην παρουσίαση αυτή, ως ερευνητική εργασία: ο ... βιαστικός αναγνώστης μπορεί να την παραλείψει, σε μία πρώτη ανάγνωση.

(κυρίως τύπου *Tokamak*¹⁵), με σκοπό το σχεδιασμό και την υλοποίηση – μέσα στα επόμενα χρόνια – του μεγάλου αντιδραστήρα ITER¹⁶ [29], ο οποίος θα αποτελέσει προϊόν συνεργασίας (και συγχρηματοδότησης) μεταξύ της Ευρωπαϊκής Ένωσης, των Η.Π.Α. και της Ιαπωνίας. Είναι γνωστό ότι πρόκειται για ένα τεράστιο εγχείρημα, τόσο από πλευράς επιστημονικού σχεδιασμού και μηχανολογικής πραγματοποίησης, όσο και οικονομικού προγραμματισμού και επιχειρηματικού κόστους, το μέγεθος του οποίου κάνει προφανή την ανάγκη για πολύ προσεκτική προετοιμασία των τεχνικών χαρακτηριστικών, κατάλληλη επιλογή υλικών, λειτουργική μορφολογία της κατασκευής κλπ.



Σχήμα 1: Κόκκοι σκόνης όπως περισυλλέχτηκαν σε αντιδραστήρες σύντηξης μετά από περίοδο λειτουργίας (παρατήρηση με σάρωση ηλεκτρονίων SEM: *Scanning Electron Microscopy*): α) TEXTOR (Γερμανία) [10], β) JET (Αγγλία) [31].

Από πού όμως προέρχεται η ενδεχόμενη παρουσία σκόνης στους αντιδραστήρες σύντηξης; Σταχυολογώντας πειραματικές αναφορές από την υπάρχουσα βιβλιογραφία, βλέπουμε ότι η ύπαρξη σκόνης έχει ανιχνευτεί (και η μορφολογία και η φυσική της προέλευση έχουν διερευνηθεί) τα τελευταία χρόνια από πολλές ερευνητικές ομάδες που δραστηριοποιούνται πειραματικά γύρω από ΑΕΣ¹⁷, οι οποίες έχουν συζητήσει την εμπειρία τους σχετικά με την επίπτωσή της στη λειτουργία του πλάσματος, προσπαθώντας παράλληλα να αντλήσουν συμπεράσματα για τον πιθανό ρόλο της στη λειτουργία του ITER. Σε γενικές γραμμές, οι μελέτες αυτές αποδίδουν την προέλευση της σκόνης σε κόπωση υλικού στα τμήματα που έρχονται σε επαφή με το πλάσμα (PFC: *plasma facing components*, στη βιβλιογραφία), και συγκεκριμένα στην αποκόλληση μικρών κόκκων (ή την απόξυση νιφάδων – flakes) υλικού από τα τοιχώματα του αντιδραστήρα. Για την ακρίβεια, οι παρυφές του τοροειδούς θαλάμου όπου εγλωβίζεται το πλάσμα σύντηξης αποτελούν αντικείμενο ιδιαίτερης προσοχής κατά το σχεδιασμό ενός ΑΕΣ: προβλέπεται κάποιος μηχανισμός παρέκκλισης (*divertor* ή *limiter*) των φορτισμένων σωματιδίων (προϊόντων της αντίδρασης σύντηξης) που προσεγγίζουν τα άκρα του τόρου με υψηλή κινητική ενέργεια, ώστε αυτά να αδρανοποιηθούν και να διοχετευτούν έξω από τον θάλαμο, αντί να προσκρούσουν στα υλικά τοιχώματα. Αυτές ακριβώς οι προσκρούσεις σωματιδίων, οι οποίες παρόλα αυτά δεν μπορούν να αποφευχθούν πλήρως, είναι υπεύθυνες για τις υψηλές πιέσεις που χαρακτηρίζουν την περιοχή

¹⁵Βλ. τις σχετικές διαλέξεις στα πλαίσια του Σχολείου.

¹⁶ITER : International Thermonuclear Experimental Reactor.

¹⁷Σε πρόσφατες μελέτες περιλαμβάνονται στοιχεία από γνωστές μηχανές σύντηξης όπως: JIPPT-IIU στην Ιαπωνία (Narihara *et al.*, 1997 [30]), JET (Peacock *et al.*, 1999 [31]) στην Αγγλία, TORE-SUPRA στη Γαλλία (Chappuis *et al.*, 2001 [32]), TFTR στις Η.Π.Α. (Skinner *et al.*, 2001 [33]), TEXTOR (Muto *et al.*, 2002 [34]) και ASDEX-Upgrade στη Γερμανία (Sharpe *et al.*, 2003 [35]), LHD (Large Helical Device) στην Ιαπωνία (Sharpe *et al.*, 2003 [35], Sagara *et al.*, 2003 [36]) κ.ά.

αυτή του πλάσματος¹⁸ και για την αποκόλληση ανεπαίσθητων τμημάτων (κόκκων) από το υλικό από το οποίο είναι κατασκευασμένα τα τοιχώματα: συνηθέστερα σύνθετα υλικά με βάση τον άνθρακα (ίνες γραφίτη), tungsten αλλά και βηρύλλιο ή μέταλλα (σίδηρο, νικέλιο, χρώμιο κ.ά.). Στη συνέχεια, αυτοί οι κόκκοι υλικού¹⁹ είτε παραμένουν εκτός πλάσματος (όπου ενδέχεται να φράζουν π.χ. λεπτές διόδους που εξυπηρετούν διαγνωστικούς σκοπούς) είτε κατευθύνονται προς το επίκεντρο της σύντηξης με ενδεχόμενη επίπτωση στην ίδια τη λειτουργία της διάταξης. Συμπερασματικά, η παρουσία σκόνης στους ΑΕΣ οφείλεται σε διαδικασίες αλληλεπίδρασης πλάσματος – υλικών, η κατανόηση των οποίων (την οποία δεν έχουμε ακόμη πλήρως επιτύχει) αποτελεί προϋπόθεση για την κατασκευή ενός λειτουργικά ικανοποιητικού υλικού περιβλήματος του χώρου εγκλωβισμού του πλάσματος σύντηξης.

Τα παραπάνω στοιχεία αφορούν την προέλευση της σκόνης που ανιχνεύεται μέσα στους αντιδραστήρες σύντηξης, αλλά δεν αγγίζουν το ερώτημα του ρόλου, αυτού καθεαυτού, που μπορεί να παίζει η σκόνη στη λειτουργία των αντιδραστήρων. Κατά γενική ομολογία, ενώ η σκόνη δεν φαίνεται να αποτελεί σημαντικό ζήτημα στους σημερινούς (μικρούς) εργαστηριακούς ΑΕΣ, φαίνεται να αποκτά κρίσιμη σημασία σε σχέση με τη λειτουργία μίας μεγάλης κλίμακας μηχανής, όπως το ITER. Μπορούμε να διακρίνουμε την πιθανή επίδραση της σκόνης σε δύο βασικούς άξονες: ο πρώτος αφορά ζητήματα ασφαλείας που έχουν σχέση με την παρουσία σκόνης, ενώ ο δεύτερος σχετίζεται με την ίδια τη λειτουργία του αντιδραστήρα σύντηξης.

Ο πρώτος άξονας φαίνεται να είναι σχετικά σαφής: οι κόκκοι σκόνης (και ιδιαίτερα από υλικά με βάση τον άνθρακα) έχουν αποδεδειγμένα αυξημένη χημική ικανότητα προσρόφησης και εγκλωβισμού ισοτόπων του υδρογόνου. Εστιάζοντας λοιπόν στην περίπτωση απορρόφησης μέρους του (ραδιενεργού) τρίτου ^3H που υπάρχει στον αντιδραστήρα²⁰, αυτό σημαίνει ότι: α) η σκόνη που θα διαρρέυσει σε περίπτωση ατυχήματος θα μπορούσε να συντελέσει σε (μέτριας κλίμακας²¹ αλλά) ανεξέλεγκτη διάχυση ραδιενέργειας στο περιβάλλον, και β) η περισυλλογή της σκόνης από τον θάλαμο σύντηξης θέτει ζητήματα ασφαλείας του προσωπικού. Επίσης, έχει συζητηθεί η πιθανότητα δυναμικής επίπτωσης αυτής της απορρόφησης τρίτου (από τη σκόνη) στο απόθεμα “καυσίμου” του αντιδραστήρα (βλ. υποσημ. 20).

Ομολογουμένως, ο δεύτερος άξονας του ρόλου της σκόνης δεν έχει πλήρως αποσαφηνιστεί: οι σχετικές μελέτες έχουν αρχίσει εξαιρετικά πρόσφατα, και – κυρίως λόγω της έλλειψης κατάλληλων διαγνωστικών τεχνικών για τη μελέτη της δυναμικής του ΠΣ μέσα σε ΑΕΣ σε λειτουργία – περιορίζονται προς το παρόν σε πειράματα οδηγούμενα από τη φυσική διαίσθηση, θεωρητικές εικασίες ή και απλή φαινομενολογία. Πιο συγκεκριμένα, τελευταία καταγράφεται μία αυξανόμενη τάση των πειραματικών να αποδίδουν μέρος από τις διακοπές λειτουργίας (*disruptions*) που χαρακτηρίζουν το πλάσμα σύντηξης, στην παρουσία σκόνης από τα τοιχώματα (βλ. παραπάνω). Ενδιαφέρον παρουσιάζει μία μελέτη σε ΑΕΣ στην Ιαπωνία [30], η οποία στηρίχτηκε στην ελεγχόμενη διασπορά σκόνης σε

¹⁸Η περιοχή αυτή ονομάζεται στην τεχνική βιβλιογραφία περιοχή απόξυσης (*Scrape-off layer, SOL*) διότι χαρακτηρίζεται από μαγνητικές γραμμές που τέμνουν πλάγια την πλάκα του *divertor* - οδηγώντας σε πλευρικές διαρροές πλάσματος.

¹⁹Η τυπική διαμέτρος των κόκκων είναι της τάξης των 10 - 100 nm, είτε 5 - 20 μm – ανάλογα με το υλικό προέλευσης – σημαντικό μέρος των οποίων έχουν σιδηρομαγνητικές ιδιότητες [10].

²⁰Θυμηθείτε τις βασικές αντιδράσεις στις οποίες στηρίζεται ο μηχανισμός της σύντηξης: σήμερα οι ΑΕΣ στηρίζονται κυρίως στην αντίδραση δευτερίου-τρίτιου (D - T)· βλ. εισαγωγικές διαλέξεις του Σχολείου· βλ. επίσης [28].

²¹Παρά τη εξαιρετικά μειωμένη εμφάνιση ραδιενέργειας κατά τη διεργασία της πυρηνικής σύντηξης, σε σχέση με την πυρηνική σχάση, αυτή δεν είναι ανύπαρκτη [28].

πλάσμα σύντηξης (πριν και κατά τη λειτουργία) και κατέδειξε τον πιθανό ρόλο της σκόνης στις συνθήκες λειτουργίας του αντιδραστήρα²². Δεδομένου ότι πλάσμα με σκόνη μπορεί, όπως είπαμε, να σχηματιστεί κυρίως στα άκρα του αντιδραστήρα (κοντά στα τοιχώματα, από όπου προέρχεται) και ότι η ραδιενεργός φόρτιση των κόκκων σκόνης τους κάνει να αλληλεπιδρούν τόσο με ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία (όπως αυτό του *divertor*, σε αυτή την περιοχή) όσο και με ηλεκτροστατικά ή MHD κύματα – όπως π.χ. οι εντοπισμένοι τρόποι ταλάντωσης στα άκρα του πλάσματος (*Edge Localized Modes, ELMs*), θεωρείται απαραίτητη η κατανόηση της φυσικής δυναμικής των τρόπων ταλάντωσης που διεγείρονται μέσα στο ΠΣ ώστε: α) να ελεγχθεί η (επιβλαβής, όπως είπαμε) προώθηση σκόνης προς το εσωτερικό του πλάσματος σύντηξης σε ώρα λειτουργίας του αντιδραστήρα, και β) να εξεταστεί η απομάκρυνση των κόκκων – όπως έχει προταθεί – δυναμικά κατά τη λειτουργία του αντιδραστήρα (και όχι “με το χέρι” μετά την παύση λειτουργίας). Το σημερινό επίπεδο γνώσης για τη Φυσική των αλληλεπιδράσεων πλάσματος με υλικά τοιχώματα (αναφορικά με τους ΑΕΣ) απεικονίζεται σε δύο εκτενή συλλογικά (συνεργασία 12 ερευνητών από 5 χώρες!) σχετικά πρόσφατο άρθρο [37], όπου γίνεται σαφής αναφορά και στο ζήτημα της επίδρασης σκόνης. Γενικότερα, η σχετική βιβλιογραφία εμπλουτίζεται σταδιακά με μελέτες της Φυσικής (καθαρά) πλευράς του ζητήματος, τόσο από παρατηρησιακή (πειραματική) [38, 39] και θεωρητική [39, 40] σκοπιά, όσο και με τη χρήση εξειδικευμένων αριθμητικών μεθόδων για την 3-διάστατη προσομοίωση [41] της κυματικής συμπεριφοράς του ΠΣ μέσα σε αντιδραστήρες σύντηξης.

Συνοψίζοντας, η φυσική περιγραφή του πλάσματος με σκόνη σε σχέση με τη λειτουργία των αντιδραστήρων σύντηξης αντιμετωπίζεται σήμερα ως ένα πρόβλημα που πρέπει να γίνει όσο γίνεται κατανοητό, με απώτερο σκοπό τη μελλοντική άντληση ενέργειας με τρόπο αποτελεσματικό και ασφαλές. Οι έρευνες εστιάζονται στις ιδιότητες των χαμηλόσυχνων κυμάτων ΠΣ, όπως αυτά που θα συζητήσουμε πιο κάτω.

1.3 Περιγραφή του μοντέλου – γραμμική και μη-γραμμική διάδοση κυμάτων

Είναι φανερό από τα παραπάνω ότι η σημαντική παρουσία σκόνης μπορεί να τροποποιήσει έντονα τα χαρακτηριστικά των κανονικών τρόπων ταλάντωσης που διαδίδονται στο πλάσμα²³ [13, 15]. Επιπλέον, νέοι τρόποι ταλάντωσης παρατηρούνται, χωρίς ανάλογο σε σύννητες πλάσμα $e - i$. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τη διάδοση κάποιων ηλεκτροστατικών κυμάτων μέσα σε πλάσμα με παρουσία σκόνης. Αφού περιγράψουμε με συντομία τη φυσική βάση στην οποία στηρίζεται το κύμα, θα εξετάσουμε την προέλευση και την επίδραση της μη-γραμμικότητας στη διαμόρφωση του πλάτους του κύματος.

Πριν μπούμε στην περιγραφή του φυσικού μας μοντέλου, επιβάλλεται μία παρένθεση με κάποια στοιχεία για τη μεθοδολογία που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια. Η μελέτη μας παρακάτω στηρίζεται σε μία μέθοδο διαταραχών που περιγράφει κυματικά φαινόμενα με ασθενή μη-γραμμικότητα. Τι σημαίνει όμως αυτό; Ας υποθέσουμε ότι μελετούμε ένα φυσικό σύστημα, του οποίου η εξέλιξη στο χώρο και το χρόνο περιγράφεται από ένα συγκεκριμένο μοντέλο. Όπως είναι γνωστό, εάν οι φυσικοί μηχανισμοί που διέπουν το

²²Ειδικότερα, συζητήθηκε εκεί [30] η επίδραση της σκόνης στο ενεργό φορτίο ιονισμού $Z_{eff} = \sum n_i Z_i^2 / \sum n_i Z_i$, που αποτελεί μέρος των παραμέτρων - δεικτών για την ποιότητα του πλάσματος σύντηξης.

²³Στην απλούστερή της μορφή, αυτή η αλλαγή στην απόκριση του πλάσματος εκδηλώνεται μέσα από τη μεταβολή στο ισοζύγιο πυκνότητας n_e/n_i , το οποίο επηρεάζει τους νόμους διασποράς του κύματος [13, 15].

σύστημα επιτρέπουν την ύπαρξη ενός (γραμμικού) κύματος (δηλαδή μίας ταλάντωσης γύρω από κάποια κατάσταση ισορροπίας – υπό την επίδραση κάποιας δύναμης επαναφοράς – η οποία διαδίδεται στο χώρο), η περιγραφή αυτού προκύπτει από τους νόμους εξέλιξης (τις εξισώσεις του μοντέλου), μετά από γραμμικοποίηση²⁴. Η αναλυτική μορφή του κύματος προκύπτει τότε εάν θεωρήσουμε ότι $u_1 = \Psi \cos(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t + \phi_0)$ ²⁵, οπότε από την κυματική εξίσωση παίρνουμε τη χαρακτηριστική σχέση γραμμικής διασποράς του κύματος, δηλ. μία συναρτησιακή σχέση του τύπου $\omega = \omega(\mathbf{k})$. Από φυσικής πλευράς, λοιπόν, ένα γραμμικό κύμα περιγράφει το αποτέλεσμα μίας μικρής ($\sim \epsilon$) απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας Θ.Ι. Από την άλλη πλευρά, ενδιαφερόμαστε να δούμε τι θα συμβεί εάν αυξήσουμε σταδιακά το πλάτος Ψ της ταλάντωσης, επιτρέποντας έτσι σιγά σιγά στη μη γραμμικότητα του προβλήματος να μπει στο παιχνίδι. Όπως θα δούμε παρακάτω, αυτός ο μηχανισμός έχει καταρχήν ως αποτέλεσμα την εμφάνιση νέων αρμονικών της βασικής φάσης $\phi = \mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t$, (δηλ. αρμονικές συναρτήσεις με όρισμα 2ϕ , 3ϕ κλπ.) σε συνδυασμό με τη λεγόμενη διαμόρφωση του πλάτους του κύματος (βλ. ορ. παρακάτω) και ... τη συνέχεια θα τη δούμε παρακάτω, σε σχέση με τα κύματα σε πλάσμα τύπου ΠΣ²⁶.

Θα θεωρήσουμε ένα πλάσμα (χωρίς να υπάρχουν εξωτερικά ηλεκτρικά ή μαγνητικά πεδία) αποτελούμενο από τη συνύπαρξη 3 “ρευστών”: ηλεκτρόνια (μάζας m , φορτίου $-e$), ιόντα (μάζας m_i , φορτίου $q_i = +Z_i e$) και βαριά σωματίδια (κόκκους) άμμου (μάζας m_d , φορτίου $q_d = s Z_d e$, όπου $s = \text{sgn } q_d = \pm 1$) συντομ. $e = \text{electrons}$, $i = \text{ions}$, $d = \text{dust}$. Οι συγκρούσεις μεταξύ σωματίων (απόσβεση) κάθε είδους αγνοούνται. Επίσης, θα θεωρήσουμε προς το παρόν (με εξαίρεση το μέρος ξ ;;) ότι το πλάσμα ΠΣ που μελετούμε βρίσκεται σε ελαφρά συζευγμένη (\sim “αέρια”) κατάσταση. Όλοι οι κόκκοι σκόνης θεωρείται ότι έχουν το ίδιο φορτίο, μάζα και μέγεθος (για απλοποίηση).

2 ΑΚΟΥΣΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ ΣΚΟΝΗΣ

Τα Ακουστικά Κύματα Σκόνης (ΑΚΣ) (Dust Acoustic Waves, DAW) (θεωρητική πρόβλεψη: RAO *et al.* 1990 [43], πειραματική επαλήθευση: BARKAN *et al.* 1995 [44]) είναι ένας εξαιρετικά χαμηλόσυχνος κανονικός τρόπος ταλάντωσης σε ΠΣ (χωρίς αντίστοιχο σε κοινό πλάσμα $e - i$): πρόκειται για γραμμικές ταλαντώσεις κόκκων σκόνης μέσα σε περιβάλλον από ηλεκτρόνια και ιόντα τα οποία βρίσκονται πρακτικά σε θερμική ισορροπία (και στα οποία οφείλεται η δύναμη επαναφοράς που είναι απαραίτητη για τη γραμμική ταλάντωση). Τόσο η κυκλική συχνότητά των ΑΚΣ $\omega_{DAW} \approx c_D k$ (όπου η χαρακτηριστική

²⁴ Αυτό σημαίνει – με απλούς πρακτικούς όρους – ότι, αφού π.χ. θέσουμε $u = u_0 + \epsilon u_1$ (για κάποιο φυσικό μέγεθος u , με θέση ισορροπίας Θ.Ι. $u = u_0$, όπου $\epsilon \ll 1$), διατηρούμε τους γραμμικούς όρους στις εξισώσεις ($\sim \epsilon$), όπως u_1 , $\partial u_1 / \partial x$, $\partial u_1 / \partial t$ κλπ., ενώ “πετούμε” τους μη-γραμμικούς όρους ($\sim \epsilon^2$), όπως u_1^2 , $u_1 \partial u_1 / \partial x$ κλπ.

²⁵ Όπως συνήθως, ορίζουμε την κυκλική συχνότητα ω , τον κυματριθμό $k = 2\pi / \lambda$, το μήκος κύματος λ , και την αρχική φάση ϕ_0 η οποία εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Ψ είναι το (πραγματικό, εδώ) πλάτος του κύματος.

²⁶ Στον αντίποδα αυτής της λογικής, προκαλώντας μία μεγάλη (και όχι μέτρια, όπως εδώ) απομάκρυνση του συστήματός μας από τη Θ.Ι., ενδέχεται να το ωθήσουμε να βρεί μια νέα δυναμική κατάσταση η οποία δεν αλλοιώνεται με την πάροδο του χρόνου, παραμένει όμως μακριά από τη θέση ισορροπίας: για ένα πρόβλημα που περιγράφεται από μη-γραμμικές εξισώσεις, αυτό μπορεί να εκδηλωθεί με τη μορφή μίας εντοπισμένης διέγερσης (π.χ. *solitónio*) η οποία διατηρεί τα χαρακτηριστικά της καθώς διαδίδεται στο χώρο. Η περιγραφή τέτοιων μεγάλων διεγέρσεων προϋποθέτει τη χρήση ακριβών αναλυτικών (ή αριθμητικών) μεθόδων, που δεν προκύπτουν από θεωρίες διαταραχών όπως αυτή που θα μας απασχολήσει εδώ. Τέτοιες ισχυρά μη-γραμμικές διεγέρσεις έχουν ήδη μελετηθεί σε σχέση με το ΠΣ [42], αλλά δεν θα μας απασχολήσουν εδώ.

ταχύτητα c_D δίνεται από τη σχέση

$$c_D \approx Z_d \left(\frac{n_{d,0}}{n_{i,0}} \right)^{1/2} \left(\frac{T_i}{m_d} \right)^{1/2} \sim \delta^{1/2} \left(\frac{Z_d/m_d}{Z_i/m_i} \right)^{1/2} v_{th,i}$$

[2, 12], ώστε $\omega < \omega_{p,d}$ βλ. ορ. παραπάνω) όσο και η φασική τους ταχύτητα $v_{ph} = \omega/k$ ($\ll v_{th,e}, v_{th,i}$), είναι εξαιρετικά χαμηλές: ενδεικτικά αναφέρουμε ότι οι τυπικές εργαστηριακές τιμές [12] είναι της τάξης των $\sim 10 - 30$ Hz για την κυκλική συχνότητα $\omega_{DAW} \approx c_D k$, με ταχύτητα φάσης $v_{ph} \approx c_D \sim 5 - 10$ cm/s και (μετρήσιμο πειραματικά) μήκος κύματος έως και $\lambda \approx 0.6$ cm. Οι τιμές αυτές σχεδόν επιτρέπουν την παρατήρηση των κυμάτων ΑΚΣ με πολύ απλό οπτικό εξοπλισμό (αν όχι με γυμνό μάτι!) [2, 44].

2.1 Θεωρητικό μοντέλο

Θα γράψουμε τις εξισώσεις χρονικής εξέλιξης για τις μέσες τιμές (ροπές της ταχύτητας) που αφορούν τη σκόνη ως “ρευστό” [13, 14, 16]. Η πυκνότητα n_d υπακούει στην εξίσωση (συνέχειας):

$$\frac{\partial n_d}{\partial t} + \nabla \cdot (n_d \mathbf{u}_d) = 0, \quad (1)$$

και η μέση ταχύτητα \mathbf{u}_d στην εξίσωση:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_d}{\partial t} + \mathbf{u}_d \cdot \nabla \mathbf{u}_d = -\frac{q_d}{m_d} \nabla \Phi - \frac{1}{m_d n_d} \nabla p_d, \quad (2)$$

όπου Φ είναι το ηλεκτρικό δυναμικό· η πίεση της σκόνης p_d υπακούει:

$$\frac{\partial p_d}{\partial t} + \mathbf{u}_d \cdot \nabla p_d = -\gamma p_d \nabla \cdot \mathbf{u}_d \quad (3)$$

όπου $\gamma = (f + 2)/f$ είναι ο λόγος ειδικών θερμοτήτων c_P/c_V (σε f βαθμούς ελευθερίας) π.χ. $\gamma = 3$ για αδιαβατική μονο-διάστατη (1d) διάδοση, $\gamma = 2$ για 2d κ.ο.κ. Τέλος, η εξίσωση Poisson γράφεται:

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi \sum_{\alpha=e,i,d} q_\alpha n_\alpha = 4\pi (n_e e - q_i n_i - q_d n_d) \equiv 4\pi e (n_e - Z_i n_i - s Z_d n_d) \quad (4)$$

Το δεξιό μέρος μηδενίζεται στη ισορροπία (και μόνο) χάρη στη συνθήκη ουδετερότητας του συνολικού φορτίου:

$$n_{e,0} e - n_{i,0} q_i - n_{d,0} q_d = 0. \quad (5)$$

Αδιάστατη μορφή. Το παραπάνω σύστημα μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \mathbf{u}) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -s \nabla \phi - \frac{\sigma}{n} \nabla p, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p &= -\gamma p \nabla \cdot \mathbf{u}, \\ \nabla^2 \phi &= \phi - \alpha \phi^2 + \alpha' \phi^3 - s \beta (n - 1). \end{aligned} \quad (6)$$

όπου: $n = n_d/n_{d,0}$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_d/v_d = [m_d/(k_B T_e)]^{1/2} \mathbf{u}_d$, $p = p_d/p_0 = p_d/(n_{d,0} k_B T_d)$ και $\phi = Z_d e \Phi / (k_B T_e)$. Επίσης, επιλέγουμε ως κλίμακα μήκους: το ενεργό μήκος κύματος Debye $\lambda_{D,eff} = (\lambda_{D,e}^{-2} + \lambda_{D,i}^{-2})^{-1/2}$ (όπου $\lambda_{D,\alpha} = (k_B T_\alpha / 4\pi n_{\alpha,0} q_\alpha^2)^{1/2}$, $\alpha = e, i$) και ως κλίμακα χρόνου: την περίοδο ταλαντώσεων πλάσματος $\Pi \Sigma \omega_{p,d}^{-1} = (4\pi n_{d,0} q_d^2 / m_d)^{-1/2}$. Στην 4η εξίσωση αναπτύξαμε το δεξιό μέρος σε ανάπτυγμα γύρω από τη θέση ισορροπίας ($\phi = 0$), θεωρώντας ότι: $n_e \approx n_{e,0} e^{e\Phi/k_B T_e}$ και $n_i \approx n_{i,0} e^{-Z_i e \Phi / k_B T_i}$ ($T_{e/i}$: θερμοκρασία ηλεκτρονίων/πρωτονίων). Οι αδιάστατες παράμετροι α , α' και β είναι:

$$\alpha = \frac{1}{2Z_d} \frac{Z_i^3 \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^2 \frac{n_{i,0}}{n_{e,0}} - 1}{Z_i^2 \frac{T_e}{T_i} \frac{n_{i,0}}{n_{e,0}} + 1}, \quad \alpha' = \frac{1}{6Z_d^2} \frac{Z_i^4 \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^3 \frac{n_{i,0}}{n_{e,0}} + 1}{Z_i^2 \frac{T_e}{T_i} \frac{n_{i,0}}{n_{e,0}} + 1},$$

$$\beta = \left(\lambda_{D,eff} \frac{\omega_{p,d}}{v_d} \right)^2 \equiv \left(\frac{c_D}{v_d} \right)^2,$$

όπου $c_D = \lambda_{D,eff} \omega_{p,d}$ είναι η χαρακτηριστική κλίμακα ταχύτητας για τα ΑΚΣ. Συνήθως στη σχετική βιβλιογραφία η παρουσία σκόνης δηλώνεται με μία από τις ποσότητες: $\delta = (Z_d n_{d,0}) / (Z_i n_{i,0})$ ή $\mu = n_{e,0} / (Z_i n_{i,0}) = 1 + s \delta$. προσέξτε ότι $\delta < 0$ και $0 \leq \mu < 1$ (ή, αντίστοιχα, $\delta > 0$ και $\mu > 1$) αντιστοιχεί σε αρνητικά (θετικά) φορτισμένη σκόνη (προφανώς $\delta = \mu = 0$ χωρίς σκόνη). Για $\mu \ll Z_i \frac{T_e}{T_i}$, έχουμε τις προσεγγιστικές εκφράσεις: $\alpha \approx \frac{Z_i}{2Z_d} \frac{T_e}{T_i}$, $\alpha' \approx \frac{Z_i^2}{6Z_d^2} \frac{T_e^2}{T_i^2} = \frac{2}{3} \alpha^2$ και $\beta \approx \frac{Z_d^2}{Z_i^2} \frac{n_{d,0}}{n_{i,0}} \frac{T_i}{T_e}$. Τέλος, $\sigma = p_0 / (n_{d,0} k_B T_e) = T_d / T_e$ (με την παραπάνω επιλογή κλίμακας πίεσης): η παράμετρος σ επιτρέπει να διακρίνουμε την αποκαλούμενη ‘θερμή’ ($\sigma \neq 0$) από την ‘ψυχρή’ ($\sigma = 0$) περιγραφή του πλάσματος ως ρευστό.

2.2 Θεωρία διαταραχών

Έστω \mathbf{S} το διάνυσμα (στήλη) $(n, \mathbf{u}, p, \phi)^T$, που περιγράφει την κατάσταση του συστήματος σε δεδομένη θέση \mathbf{r} και χρονική στιγμή t . Θα θεωρήσουμε μικρές αποκλίσεις από την κατάσταση ισορροπίας $\mathbf{S}^{(0)} = (1, \mathbf{0}, 1, 0)^T$ παίρνοντας $\mathbf{S} = \mathbf{S}^{(0)} + \epsilon \mathbf{S}^{(1)} + \epsilon^2 \mathbf{S}^{(2)} + \dots = \mathbf{S}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \mathbf{S}^{(n)}$, όπου $\epsilon \ll 1$ είναι μία μικρή παράμετρος. Ακολουθώντας την αναγωγική θεωρία διαταραχών (μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων) [45], ορίζουμε τις (αργές) μεταβλητές $\zeta = \epsilon(x - \lambda t)$, $\tau = \epsilon^2 t$ (η παράμετρος $\lambda \in \mathfrak{R}$, με φυσική έννοια ταχύτητας, θα προσδιοριστεί αργότερα). Θεωρούμε ότι οι διαταραγμένες καταστάσεις εξαρτώνται από τις γρήγορες κλίμακες μέσω της φάσης $\theta_1 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = k_x x + k_y y - \omega t$, και από τις αργές κλίμακες μέσω του πλάτους της l -οστής αρμονικής της j -συνιστώσας $S_{j,l}^{(n)}$, που μεταβάλλεται κατά τον άξονα x :

$$S_j^{(n)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} S_{j,l}^{(n)}(\zeta, \tau) e^{il(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = S_{0,l}^{(n)} + \sum_{l=-1}^{\infty} |S_{j,l}^{(n)}| \cos il(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi_l)$$

(δηλ. π.χ. $S_{1,l}^{(n)} = n_l^{(n)}$, $S_{2,l}^{(n)} = u_{x,l}^{(n)}$, $S_{3,l}^{(n)} = u_{y,l}^{(n)}$ κλπ. η συνθήκη $S_{j,-l}^{(n)} = S_{j,l}^{(n)*}$ εξασφαλίζει $S_j^{(n)} \in \mathfrak{R}$, ώστε το πλάτος κάθε αρμονικού κύματος να είναι πραγματικός αριθμός²⁷). Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε ότι έχουμε να περιγράψουμε ένα κύμα που διαδίδεται σε δύο διαστάσεις ($2d$), δηλ. $\gamma = 2$ (η αντιμετώπιση σε 3 θα ήταν η ίδια, με $\gamma = 5/3$).

²⁷Θυμηθείτε τις σχέσεις Euler (ή DeMoivre): $\cos \theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$ και $\sin \theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/(2i)$. Δείτε ότι εδώ: $|A| \cos(\theta + \phi_l) = (Ae^{i\theta} + A^* e^{-i\theta})/2$ και $|A| \sin(\theta + \phi_l) = (Ae^{i\theta} - A^* e^{-i\theta})/(2i)$ (όπου $A = |A|e^{i\phi_l} \in \mathbb{C}$).

Πλάγια διαμόρφωση: Θα θεωρήσουμε ότι το πλάτος του κύματός μας μεταβάλλεται αργά (δηλαδή 'διαμορφώνεται') κατά τον άξονα x (μόνο), ενώ η (τυχαία) διεύθυνση διάδοσης δίνεται από τον κυματαριθμό $\mathbf{k} = (k_x, k_y) = (k \cos \theta, k \sin \theta)$ (η τρίτη διεύθυνση z παραμένει τυχαία). Μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε το ρόλο της γωνίας θ (δηλ. της πλάγιας διαμόρφωσης) στη δυναμική εξέλιξη του κύματός μας.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, θα γράψουμε τους διαφορικούς μας τελεστές ως εξής:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} - \epsilon \lambda \frac{\partial}{\partial \zeta} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \nabla \rightarrow \nabla + \epsilon \hat{x} \frac{\partial}{\partial \zeta},$$

δηλ.

$$\nabla^2 \rightarrow \nabla^2 + 2\epsilon \frac{\partial^2}{\partial x \partial \zeta} + \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2},$$

οπότε

$$\frac{\partial}{\partial t}(Ae^{i\theta_1}) \rightarrow \left(-i\omega A - \epsilon \lambda \frac{\partial A}{\partial \zeta} + \epsilon^2 \frac{\partial A}{\partial \tau}\right) e^{i\theta_1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(Ae^{i\theta_1}) \rightarrow \left(ik_x A + \epsilon \frac{\partial A}{\partial \zeta}\right) e^{i\theta_1}, \quad \frac{\partial}{\partial y}(Ae^{i\theta_1}) \rightarrow ik_y A e^{i\theta_1},$$

($A \in C$) κ.ο.κ. Αντικαθιστώντας στο σύστημα (6), προκύπτει ένα διπλό άθροισμα άπειρων όρων, ως προς την τάξη διαταραχής ϵ^n (για $n = 1, 2, 3, \dots$) και την φάση της αρμονικής l (για $l = -n, -n+1, \dots, 0, \dots, n$). Επιλύουμε, κατά τα γνωστά (στη θεωρία διαταραχών), το σύστημα που προκύπτει σε κάθε τάξη $\sim \epsilon^n$, αντικαθιστούμε στην επόμενη, κ.ο.κ.

Οι εξισώσεις για $n = 2, l = 1$ παρέχουν τις πρώτες αρμονικές:

$$n_1^{(1)} = s \frac{1+k^2}{\beta} \phi_1^{(1)} = \frac{1}{\gamma} p_1^{(1)} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1^{(1)} = \frac{k}{\omega \cos \theta} u_{1,x}^{(1)} = \frac{k}{\omega \sin \theta} u_{1,y}^{(1)} \quad (7)$$

και τη συνθήκη: $\omega^2 = \frac{\beta k^2}{k^2+1} + \gamma \sigma k^2$, δηλαδή, επαναφέροντας τις διαστάσεις, τη σχέση διασποράς των ΑΚΣ [2, 43]:

$$\omega^2 = \frac{c_D^2 k^2}{1+k_D^2 \lambda_{D_{eff}}^2} + \gamma v_{th,d}^2 k^2 \quad (8)$$

(βλ. ορισμούς παραπάνω).

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, για $n = 2, l = 1$ παίρνουμε τις διορθώσεις 2ης τάξης, δηλαδή το πλάτος της 2ης αρμονικής $\mathbf{S}_2^{(2)}$, μία σταθερή συνεισφορά $\mathbf{S}_0^{(2)}$, και μία διόρθωση $\mathbf{S}_1^{(2)}$ στην 1η αρμονική (παραλείπουμε τις περίπλοκες εκφράσεις, βλ. [17]). Επομένως, η λύση που προκύπτει για το δυναμικό ϕ είναι της μορφής:

$$\phi \approx \epsilon \phi_1^{(1)} \cos \theta_1 + \epsilon^2 (\phi_0^{(2)} + \phi_1^{(2)} \cos \theta_1 + \phi_2^{(2)} \cos 2\theta_1) + \mathcal{O}(\epsilon^3),$$

όπου θ_1 είναι η φάση του γραμμικού (φέροντος) κύματος· ανάλογες εκφράσεις προκύπτουν για την πυκνότητα n , τις συνιστώσες $u_{x,y}$ της ταχύτητας του ρευστού και την πίεση p . Παρατηρούμε την εμφάνιση αρμονικών (δηλαδή φάσεων που είναι πολλαπλάσια της θεμελιώδους φάσης θ_1).

Προκύπτει επίσης η συνθήκη²⁸: $\lambda = v_g(k) = \frac{\partial \omega}{\partial k_x} = \omega'(k) \cos \theta = \frac{k}{\omega} \left[\frac{1}{(1+k^2)^2} + \gamma \sigma \right] \cos \theta$; το λ επομένως εκφράζει την ταχύτητα ομάδας κατά τη διεύθυνση διαμόρφωσης (δηλ. x).

2.3 Μη-Γραμμική Εξίσωση Schrödinger

Οι (5) εξισώσεις 3ης τάξης ($n = 3$) για $l = 1$ σε συνδυασμό δίνουν, με τη μορφή συνθήκης (βλ. υποσημείωση 28), τη **Μη-Γραμμική Εξίσωση Schrödinger** :

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + P \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} + Q |\psi|^2 \psi = 0. \quad (9)$$

Θυμηθείτε ότι $\{\zeta, \tau\}$ είναι οι 'αργές' μεταβλητές που ορίσαμε παραπάνω. Η νέα μεταβλητή ψ περιγράφει την τιμή (σε πρώτη διόρθωση) του πλάτους (της 1ης αρμονικής) του δυναμικού $\phi_1^{(1)}$, από την οποία προκύπτει – μέσω της (7) – το αντίστοιχο πλάτος για όλα τα υπόλοιπα μεγέθη (θυμηθείτε ότι πρόκειται για *μγαδικούς* αριθμούς, σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς).

Ο *συντελεστής διασποράς* P συνδέεται με την κυρτότητα της σχέσης διασποράς, δηλ. $P = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_x^2} = \frac{1}{2} \left[\omega''(k) \cos^2 \theta + \omega'(k) \frac{\sin^2 \theta}{k} \right]$ ή, σε ανεπτυγμένη μορφή :

$$P(k) = \frac{1}{\beta} \frac{1}{2\omega} \left(\frac{\omega}{k} \right)^4 \left[\nu_1 - \left(\nu_1 + 3 \frac{\nu_2}{\beta} \omega^2 \right) \cos^2 \theta \right], \quad (10)$$

όπου: $\nu_1 = \beta \frac{\beta + \sigma \gamma (1+k^2)^2}{[\beta + \sigma \gamma (1+k^2)]^2}$ και $\nu_2 = \beta^3 \frac{3\beta + \gamma \sigma (3-k^2)(1+k^2)}{3[\beta + \gamma \sigma (1+k^2)]^4}$ (προσέξτε ότι $\nu_{1,2} \rightarrow 1$ όταν $\sigma \rightarrow 0$). Παρατηρείστε πώς μπορεί να επηρεάσει το σ το πρόσημο του P , πού είναι αρνητικό για $\sigma \rightarrow 0$.

Ο *συντελεστής μη-γραμμικότητας* Q δίνεται από μία περίπλοκη μαθηματική σχέση, που δίνεται στο τέλος του κειμένου – βλ. Εξ. (20) - (22).

Είναι ενδιαφέρον να δούμε πως συμπεριφέρονται οι συντελεστές P και Q στο *συνεχές όριο*, δηλαδή για πολύ μεγάλο μήκος κύματος λ (σε σχέση με το μήκος Debye λ_D), ή μικρό κυματριθμό $k \ll 1$. Για $\theta = 0$ παίρνουμε τις προσεγγιστικές εκφράσεις:

$$P|_{\theta=0} \approx -\frac{3}{2} \frac{\beta}{\sqrt{\beta + \gamma \sigma}} k,$$

$$Q|_{\theta=0} \approx +\frac{1}{12\beta^3} \frac{1}{\sqrt{\beta + \gamma \sigma}} [\beta (2s\alpha\beta + 3) + 2\gamma\sigma] [\beta (2s\alpha\beta + 3) + \gamma(\gamma + 1)\sigma] \frac{1}{k},$$

ενώ για $\theta \neq 0$ οι δύο συντελεστές αλλάζουν πρόσημο:

$$P|_{\theta \neq 0} \approx \frac{\sqrt{\beta + \gamma \sigma}}{2k} \sin^2 \theta,$$

²⁸Για την ακρίβεια, για $l = 1$ ($\forall n$) παίρνουμε ένα μη-ομογενές σύστημα (για $n \geq 2$) Cramer 5×5 , (ως προς n, u_x, u_y, p, ϕ) του οποίου η ορίζουσα D μηδενίζεται ακριβώς λόγω της σχέσης διασποράς (8). Οι μερικές ορίζουσες D_j ($j = 1, 2, 3, 4$) πρέπει να μηδενίζονται επίσης, ώστε από το σύστημα να μην προκύπτουν απειριζόμενες λύσεις. Από αυτό το γεγονός προκύπτουν οι συνθήκες συμβατότητας που αναφέρουμε.

$$Q|_{\theta \neq 0} \approx -\frac{1}{12\beta^3} \frac{1}{\sqrt{\beta + \gamma\sigma}} [\beta(2s\alpha\beta + 3) + 2\gamma^2\sigma] [\beta(2s\alpha\beta + 3) + \gamma(\gamma + 1)\sigma] \frac{1}{k},$$

διατηρώντας, κατά τρόπο αξιοθαύμαστο, το αρνητικό πρόσημο του γινομένου PQ και εξασφαλίζοντας έτσι, όπως θα δούμε παρακάτω, ευστάθεια για μεγάλα μήκη κύματος, $\lambda \gg \lambda_{D,eff}$.

2.4 Έλεγχος ευστάθειας

Θα ακολουθήσουμε τον γνωστό, από παρόμοιες περιπτώσεις, έλεγχο ευστάθειας [46, 47]. Κατ' αρχήν βλέπουμε ότι, όπως μπορούμε να ελέγξουμε με αντικατάσταση, η Εξ. (9) δέχεται τη μονοχρωματική λύση (κύμα Stokes): $\psi = \hat{\psi} e^{iQ|\hat{\psi}|^2\tau} + \text{c.c.}$ (c.c.: μιγαδικός συζυγής)· όπως βλέπουμε, το πλάτος (η περιβάλλουσα μορφή του κύματος, όπως λέγεται) μπορεί να μεταβάλλεται με περιοδικό τρόπο, προσθέτοντας μία μικρή μη-γραμμική μεταβολή $\Delta\omega = \epsilon^2 Q|\hat{\psi}|^2$ στη βασική συχνότητα ω . Υποθέτουμε ότι το πλάτος διαταράσσεται περιοδικά, θέτοντας ότι $\hat{\psi} = \hat{\psi}_0 + \epsilon\hat{\psi}_{1,0} \cos(\hat{k}\zeta - \hat{\omega}\tau)$ · αντικαθιστώντας στην (9), παίρνουμε τη σχέση διασποράς της διαταραχής του πλάτους:

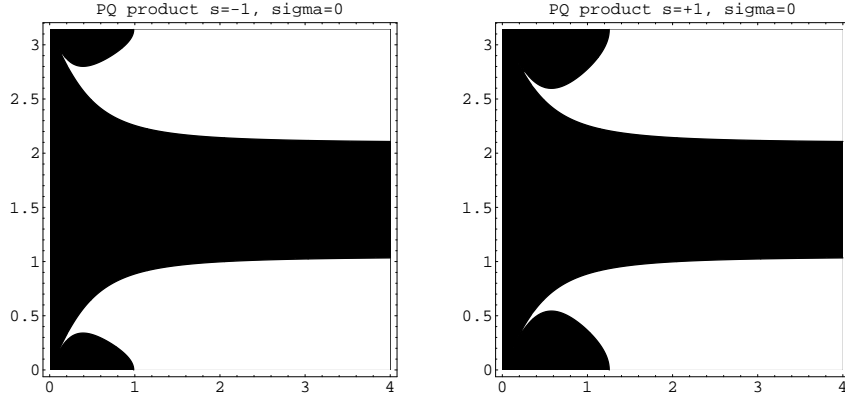
$$\hat{\omega}^2 = P^2 \hat{k}^2 \left(\hat{k}^2 - 2\frac{Q}{P}|\psi_{1,0}|^2 \right). \quad (11)$$

Το κύμα θα είναι ευσταθές (δηλ. $\omega \in \mathbb{R}$) πάντα ($\forall \hat{k} \in \mathbb{R}$) εάν $PQ < 0$. Στην αντίθετη περίπτωση, αν $PQ > 0$, παρατηρείται αστάθεια²⁹ ($\text{Im}\hat{\omega} \neq 0$) για τιμές κυματαριθμού (της διαταραχής) $\hat{k} < \hat{k}_{cr} = \sqrt{2\frac{Q}{P}}|\hat{\psi}_{1,0}|$ (δηλαδή για μήκος κύματος: $\lambda > \lambda_{cr} = 2\pi/\hat{k}_{cr}$)· ορίζοντας το ρυθμό αύξησης της διαταραχής ως $\Sigma = |\text{Im}\hat{\omega}(\hat{k})|$, βλέπουμε ότι γίνεται μέγιστος για $\hat{k} = \hat{k}_{cr}/\sqrt{2}$, δηλ. $\Sigma_{max} = |\text{Im}\hat{\omega}|_{\hat{k}=\hat{k}_{cr}/\sqrt{2}} = |Q||\hat{\psi}_{1,0}|^2$.

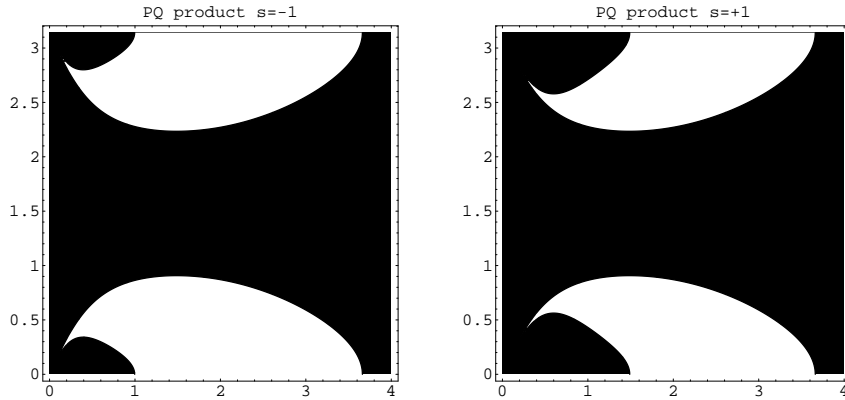
Συμπερασματικά, βλέπουμε ότι η συνθήκη για αστάθεια διαμόρφωσης πλάτους εξαρτάται απλά από το πρόσημο του γινομένου PQ , που μπορεί να διερευνηθεί αριθμητικά με βάση τις παραπάνω σχέσεις. Για τα διαγράμματα έχουμε επιλέξει τις αντιπροσωπευτικές τιμές: $\alpha = 5 \cdot 10^{-3}$, $\alpha' = 2\alpha^2/3 \approx 1.6 \cdot 10^{-5}$ και $\beta \approx 100$, που αντιστοιχούν σε $Z_d/Z_i = 10^3$ και $T_e/T_i = 10$ ($\gamma = 2$, $\sigma = 1$).

Όπως προβλέψαμε παραπάνω, το κύμα είναι ευσταθές (μαύρη περιοχή στα σχήματα 2, 3) για μεγάλο μήκος κύματος (δηλ. $k \ll 1$). Για θ κοντά στο μηδέν, παρατηρείται αστάθεια (λευκή περιοχή) για $k > k_{cr}$, για $\sigma = 0$ – βλ. σχ. 2α – (ή για $k_{cr} < k < k'_{cr}$ αν $\sigma = 0$, βλ. σχ. 2β), όπου k_{cr} , k'_{cr} είναι κάποιες κρίσιμες τιμές κατωφλίου που εξαρτώνται από τη γωνία θ : το k_{cr} ελαττώνεται (\Rightarrow μικρότερη ευστάθεια) όσο το θ μεταβάλλεται από μηδέν σε κάποια τιμή θ_{cr} και εξαφανίζεται προς το άπειρο (\Rightarrow μεγαλύτερη ευστάθεια) για υψηλότερες τιμές του θ (έως $\pi/2$)· αυτό ισχύει και για τιμές του k που θα ήταν ασταθείς για $\theta = 0$. Το αντίστροφο φαινόμενο παρατηρείται επίσης: τιμές του k που είναι ευσταθείς για $\theta = 0$, αποσταθεροποιούνται εξαιτίας της πλάγιας διαμόρφωσης. Αυτά τα συμπεράσματα ισχύουν τόσο για αρνητικά ($s = -1$, βλ. σχ. 2) όσο και για θετικά ($s = +1$, βλ. σχ. 3) φορτισμένη σκόνη, στη δεύτερη όμως περίπτωση το κατώφλι k_{cr} είναι ψηλότερο: η θετική σκόνη φαίνεται να ευνοεί τη σταθερότητα.

²⁹ *Modulational instability*, στη βιβλιογραφία.



Σχήμα 2: Η καμπύλη όπου μηδενίζεται το γινόμενο των συντελεστών της Εξ. NLS $PQ = 0$ απεικονίζεται ως συνάρτηση του (κανονικοποιημένου) κυματαριθμού k/k_D (οριζόντια μεταβλητή) και της γωνίας θ (από 0 έως π): η περιοχή με μαύρο/λευκό χρώμα παριστάνει την περιοχή τιμών στο επίπεδο $(k - \theta)$ όπου το γινόμενο είναι αρνητικό/θετικό (αντίστοιχα): το κύμα είναι ασταθές στη λευκή περιοχή. Αυτό το γράφημα αφορά τα Ακουστικά Κύματα Σκόνης (§5), όπου πήραμε $\sigma = 0$ (ψυχρή σκόνη). (α) αρνητικό φορτίο σκόνης ($s = -1$). (β) θετικό φορτίο σκόνης ($s = +1$).



Σχήμα 3: Όπως στο σχήμα 2, αλλά με $\sigma \neq 0$ (θερμή σκόνη).

2.5 Μη-γραμμικές διεγέρσεις

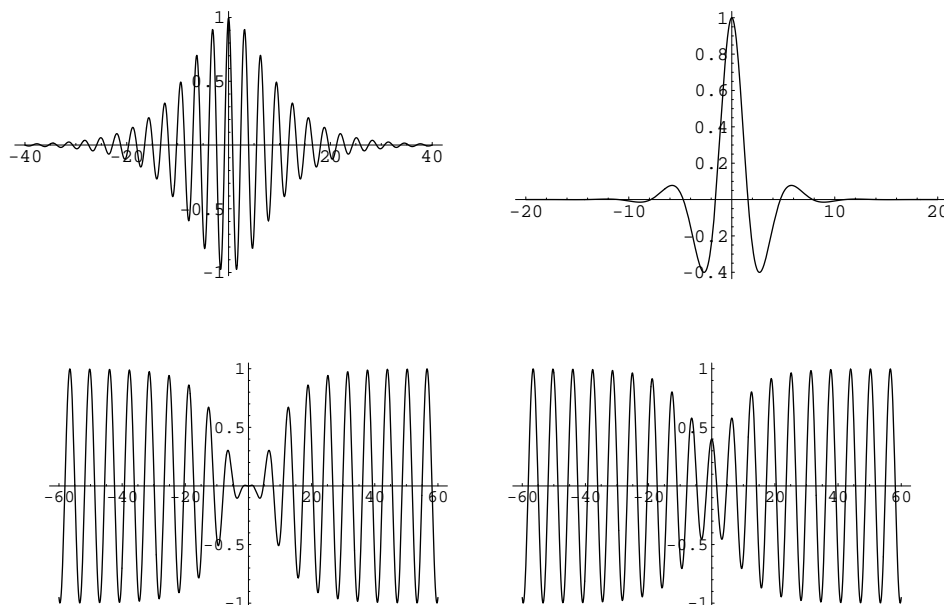
Είναι ήδη γνωστό ότι η Εξίσωση (9) χαρακτηρίζεται από λύσεις εντοπισμένες χωρικά, τύπου *σολιτόνιο*. Αυτές περιγράφονται εξονυχιστικά στη βιβλιογραφία [46, 47, 48], επομένως θα αναφέρουμε μόνο περιληπτικά τη αναλυτική μορφή τους, προκειμένου να ερευνήσουμε τη σχέση τους με το συγκεκριμένο φυσικό πρόβλημα.

Έστω ότι αναζητούμε μία λύση της Εξ. (9) με τη μορφή $\psi(\zeta, \tau) = \rho(\zeta, \tau) e^{i\Theta(\zeta, \tau)}$, όπου οι πραγματικές μεταβλητές ρ και σ θα προσδιοριστούν με αντικατάσταση στην (9) και διαχωρισμό του πραγματικού από το φανταστικό μέρος [49]. Διάφοροι τύποι λύσης υπάρχουν, ανάλογα με το πρόσημο του γινομένου PQ .

Φωτεινό σολιτόνιο – παλμός (*bright soliton*). Για $PQ > 0$ βρίσκουμε τη λύση φωτεινού σολιτονίου: [49]

$$\rho = \rho_0 \operatorname{sech}\left(\frac{\zeta - v\tau}{L}\right), \quad \Theta = \frac{1}{2P} \left[v\zeta - \left(\Omega + \frac{1}{2}v^2 \right) \tau \right], \quad (12)$$

που παριστάνει έναν εντοπισμένο παλμό που ταξιδεύει με ταχύτητα v και ταλαντώνεται με συχνότητα Ω (για $v = 0$)³⁰. Το εύρος του παλμού L είναι αντιστρόφως ανάλογο προς το μέγιστο πλάτος ρ_0 : $L = \sqrt{\frac{2P}{Q}} \frac{1}{\rho_0}$.



Σχήμα 4: Γραφική αναπαράσταση κυματοπακέτων με διαμόρφωση πλάτους από σολιτονικές λύσεις της Μη-γραμμικής Εξίσωσης Schrödinger (9). Πάνω: φωτεινού τύπου διεγέρσεις ($PQ > 0$, παλμοί – βλ. Εξ. (12) – για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων, αυθαίρετα επιλεγμένες). Κάτω: σκοτεινού (αριστερά: βλ. Εξ. (13)) και γκριζου (δεξιά: βλ. Εξ. (14)) τύπου διεγέρσεις ($PQ < 0$, οπές).

Σκοτεινό σολιτόνιο – οπή (*dark soliton*). Για $PQ < 0$, έχουμε τη λύση σκοτεινού σολιτονίου (οπή):

$$\rho = \pm \rho_1 \left[1 - \operatorname{sech}^2\left(\frac{\zeta - v\tau}{L'}\right) \right]^{1/2} = \pm \rho_1 \tanh\left(\frac{\zeta - v\tau}{L'}\right),$$

$$\Theta = \frac{1}{2P} \left[v\zeta - \left(\frac{1}{2}v^2 - 2PQ\rho_1 \right) \tau \right], \quad (13)$$

που παριστάνει μία εντοπισμένη περιοχή κενή από φέρον κύμα, μηδενικού πλάτους (*shock wave*) που ταξιδεύει με ταχύτητα u . Και εδώ, το εύρος του παλμού L αντιστρόφως ανάλογο προς το μέγιστο πλάτος ρ_1 : $L' = \sqrt{2\left|\frac{P}{Q}\right|} \frac{1}{\rho_1}$.

³⁰Θυμηθείτε ότι όλα τα μεγέθη είναι αδιάστατα.

Γκριζο σολιτόνιο – οπή (grey soliton). Για $PQ < 0$, βρίσκουμε επίσης τη λύση:

$$\rho = \pm \rho_2 \left[1 - a^2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\zeta - v\tau}{L''} \right) \right]^{1/2} \quad (14)$$

όπου η μη-γραμμική φάση Θ τώρα δίνεται από μία περίπλοκη έκφραση, η οποία παραλείπεται. Η λύση αυτή παριστάνει μία εντοπισμένη περιοχή κενή από κύμα, παρόμοια ποιοτικά με τη λύση σκοτεινού τύπου, αλλά μη μηδενικού πλάτους. Τόσο το μέγιστο πλάτος ρ_2 όσο και το εύρος $L'' = \sqrt{2|P/Q|} \frac{1}{a\rho_2}$ εξαρτώνται τώρα [48] και από μια ανεξάρτητη παράμετρο a , η οποία παριστάνει το βάθος διαμόρφωσης ($0 < a \leq 1$). Για $a = 1$ βρίσκουμε πάλι το σκοτεινό σολιτόνιο (13).

Συμπερασματικά, οι περιοχές αστάθειας (ευστάθειας) που απεικονίζονται με λευκό (μαύρο) χρώμα στα σχ. 2, 3, δείχνουν επίσης τα ζεύγη τιμών (k, θ) όπου μπορούν να σχηματιστούν και να διαδοθούν φωτεινού (σκοτεινού) τύπου λύσεις δηλ. παλμοί (οπές). Επίσης, τα χαρακτηριστικά αυτών των λύσεων θα εξαρτώνται από τη διασπορά μέσω των P και Q . π.χ. περιοχές με χαμηλότερη τιμή του P (ή ψηλότερη τιμή του Q) θα δέχεται στενότερους παλμούς.

3 ΙΟΝ-ΑΚΟΥΣΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ ΣΚΟΝΗΣ

Τα *Ιοντο-Ακουστικά Κύματα Σκόνης* (ΙΑΚΣ) (Dust Ion Acoustic Waves, DIAW) [2, 50] είναι το φυσικό ανάλογο, με παρουσία σκόνης, του γνωστού ιοντο-ακουστικού ηλεκτροστατικού κύματος (ΙΑΚ) [13, 15, 16]. Πρόκειται για δυναμικές ταλαντώσεις ιόντων μέσα σε ένα περιβάλλον από θερμά ηλεκτρόνια και βαριά, ισχυρά φορτισμένα μικρο-σωμάτια σκόνης. Τα τελευταία επηρεάζουν δραστικά τόσο την ταχύτητα φάσης, που τώρα είναι $v_{th,i} \ll v_{ph} \ll v_{th,e}$, όσο και την συχνότητα (ενδεικτικά, 3 – 5 KHz στο εργαστήριο – βλ. [44]β), που είναι υψηλότερη από τη συχνότητα πλάσματος σκόνης $\omega_{p,d}$. επομένως, στη χρονική κλίμακα που μας ενδιαφέρει, η σκόνη μπορεί να θεωρηθεί στατική και πρακτικά ακίνητη. Πιο συγκεκριμένα, η συχνότητα των ΙΑΚΣ είναι $\omega \approx c_{diaw}k$ (για $\lambda \gg \lambda_{D,e}$) [2], όπου η χαρακτηριστική ταχύτητα c_{diaw} είναι ίση με

$$c_{diaw} = \omega_{p,i} \lambda_{D,e} = \left(\frac{n_{i,0}}{n_{e,0}} \right)^{1/2} \left(\frac{T_e}{m_i} \right)^{1/2}.$$

Ενώ η σχέση αυτή καθαυτή είναι η ίδια την οποία συναντούμε σε ένα κοινό πλάσμα $e - i$ (χωρίς σκόνη) [13, 16], η διαφορά στην απόκριση του πλάσματος βρίσκεται ακριβώς στο λόγο $n_{i,0}/n_{e,0}$, ο οποίος για το πλάσμα ΠΣ είναι πολύ μεγαλύτερος της μονάδας, για αρνητικά φορτισμένη σκόνη: δείτε ότι $n_{i,0}/n_{e,0} \sim 1/(1 - \delta)$ (όπου $0 < \delta \leq 1 - \beta\lambda$. εισαγωγή), οπότε ο λόγος αυτός μπορεί να πάρει μεγάλες τιμές. Τα ΙΑΚΣ επομένως χαρακτηρίζονται από μεγάλη ταχύτητα φάσης και δεν υπόκεινται σε σημαντική απόσβεση Landau [2], όπως τα κοινά ιοντο-ακουστικά κύματα [13, 16] (βλ. υποσημ. 10).

3.1 Το θεωρητικό μοντέλο

Σύμφωνα με τη ρευστοδυναμική περιγραφή του πλάσματος (που χρησιμοποιήσαμε και παραπάνω, για τα ΑΚΣ), μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις για τα μεγέθη (στατιστικές

ροπές της ταχύτητας) που αφορούν το “ρευστό” των ιόντων:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{u}_i) &= 0, \\
\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla \mathbf{u}_i &= -\frac{q_i}{m_i} \nabla \Phi - \frac{1}{m_i n_i} \nabla p_i, \\
\frac{\partial p_i}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla p_i &= -\gamma p_i \nabla \cdot \mathbf{u}_i, \\
\nabla^2 \Phi &= -4\pi \sum q_s n_s = 4\pi (n_e e - q_i n_i - q_d n_d), \tag{15}
\end{aligned}$$

όπου θεωρήσαμε την Εξ. Poisson στο τέλος. Εάν αναπτύξουμε σε δυναμοσειρά κοντά στην κατάσταση ισορροπίας, δηλ. $\Phi \approx 0$, και συνδυάσουμε με τη συνθήκη ουδετερότητας (5), οι εξισώσεις αυτές παίρνουν ακριβώς την (αδιάστατη) μορφή των εξισώσεων (6) (αντικαθιστώντας εκεί με $s = 1$, $\alpha \rightarrow -\tilde{\alpha}$), εφόσον χρησιμοποιήσουμε κατάλληλα χαρακτηριστικά μεγέθη (κλίμακες) [18] για την κανονικοποίηση, δηλ. το μήκος Debye $\lambda_{D,e} = (k_B T_e / 4\pi n_{e,0} e^2)^{1/2}$ και την κλίμακα χρόνου $\lambda_{D,e} / c_s \equiv \omega_{p,e}^{-1} m_i / m_e$, (όπου $\omega_{p,e}$ είναι η συχνότητα πλάσματος $\omega_{p,e} = (4\pi n_{e,0} e^2 / m_e)^{1/2}$). Για την πυκνότητα, μέση ταχύτητα και πίεση των ιόντων παίρνουμε: την πυκνότητα ισορροπίας $n_{i,0}$, την ταχύτητα ήχου $c_s \equiv (k_B T_e / m_i)^{1/2}$ και $p_0 = n_{i,0} k_B T_i$, αντίστοιχα· επίσης $\Phi_0 = k_B T_e / (Z_i e)$ για το δυναμικό Φ . Η παράμετρος σ τώρα δηλώνει το λόγο T_i / T_e .

Οι χαρακτηριστικές (αδιάστατες) παράμετροι στην (6δ) τώρα είναι

$$\tilde{\alpha} = 1/(2Z_i), \quad \alpha' = 1/(6Z_i^2), \quad \beta = Z_i^2 n_{i,0} / n_{e,0} = Z_i / \mu.$$

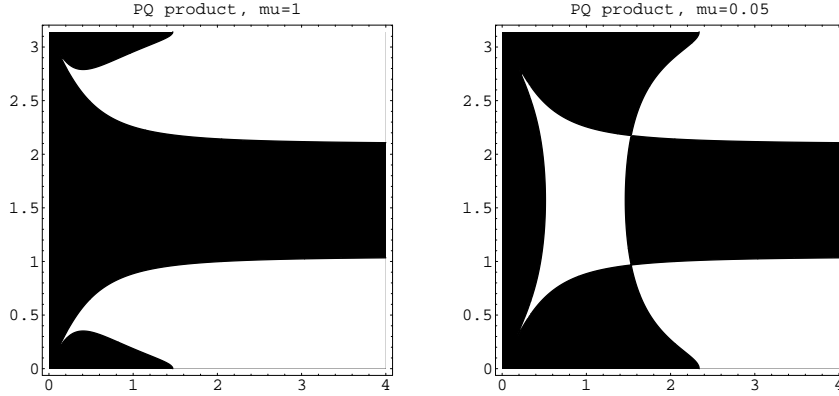
Η σκόνη επομένως δηλώνει την παρουσία της μέσω του $\mu = 1 + s\delta$ ($s = +1/-1$ για $q_d > 0$ ή $q_d < 0$, αντίστοιχα), όπως ορίστηκε προηγουμένως· θυμηθείτε ότι $\mu < 1$ ($\mu > 1$, αντίστοιχα) επομένως αναφέρεται σε αρνητικό (θετικό) φορτίο κόκκων σκόνης. Όπως περιμένει κανείς, ξαναβρίσκουμε παρακάτω κάποια προηγούμενα αποτελέσματα για τα ιοντο-ακουστικά κύματα (χωρίς σκόνη) [51 – 54] θέτοντας $\mu = 1$.

3.2 Μη - γραμμική διαμόρφωση πλάτους

Για να μελετήσουμε τη διαμόρφωση πλάτους και τη γένεση αρμονικών, ακολουθούμε πάλι τη μέθοδο που παρουσιάστηκε παραπάνω. Χωρίς να παραθέσουμε τους ενδιάμεσους υπολογισμούς (βλ. [18, 19]), θα περιοριστούμε να αναφέρουμε ότι προκύπτει μετά από πράξεις η εξ. NLS (9) για το πλάτος του ΙΑ κύματος σκόνης, μαζί με νέες εκφράσεις για τους συντελεστές P και Q , βλ. (10) και (20) – (22), αντίστοιχα.

Όπως και στην περίπτωση του προηγούμενου μέρους § 5, οι προσεγγιστικές εκφράσεις για τα P και Q στο (συνεχές) όριο $k \ll k_D$ προβλέπουν ευστάθεια [55]. Στην περίπτωση διαμόρφωσης παράλληλης προς τη διάδοση του κύματος ($\theta = 0^\circ$), παρατηρείται αστάθεια πάνω από κάποια τιμή κυματαριθμού k_{cr} , όπως ακριβώς και χωρίς σκόνη³¹, και κάτω από μία δεύτερη, έστω k'_{cr} , για μη-μηδενική ιοντική θερμοκρασία T_i , δηλ. $\sigma \neq 0$ (και μόνο: για $T_i = 0$ δηλ. $\sigma = 0$, είναι $k'_{cr} \rightarrow \infty$ · βλ. σχ. 5β)· πρβλ. σχ. 3. Το k'_{cr} ελαττώνεται όταν ανεβαίνει η θερμοκρασία T_i , όπως και χωρίς σκόνη [56], επομένως θερμά ιόντα ευνοούν την ευστάθεια του ΙΑ κύματος (και) με παρουσία σκόνης.

³¹Με ανακούφιση, μετά από τόσο μακροσκελείς υπολογισμούς, βλέπει κανείς να αναδύεται ακριβώς το γνωστό προηγούμενο αριθμητικό αποτέλεσμα $k_{cr} = 1.47 k_D$ (βλ. σχ. 5α για $\theta = 0^\circ$), εάν $\mu = 1$, βλ. [45, 51].



Σχήμα 5: Η καμπύλη μηδενισμού $PQ = 0$ απεικονίζεται συναρτήσει των k και θ (πρβλ. σχ. 2) σε δύο οριακές περιπτώσεις: (α) στο όριο χωρίς σκόνη (πλάσμα $e-i$) δηλ. $\mu = 1$, και (β) με πολύ ισχυρή παρουσία αρνητικής σκόνης, $\mu = 0,05$. Αυτό το γράφημα αφορά τα Ιοντο-Ακουστικά Κύματα Σκόνης (§;), όπου έχουμε θέσει $\sigma = 0$ (ψυχρά ιόντα) και $Z_i = 1$.

Γενικά, η παρουσία αρνητικής (αντίστοιχα θετικής) σκόνης ($\mu < 1$) φαίνεται να οδηγεί σε πιο ασταθή (σταθερά) κύματα: βλ. [18] για λεπτομέρειες.

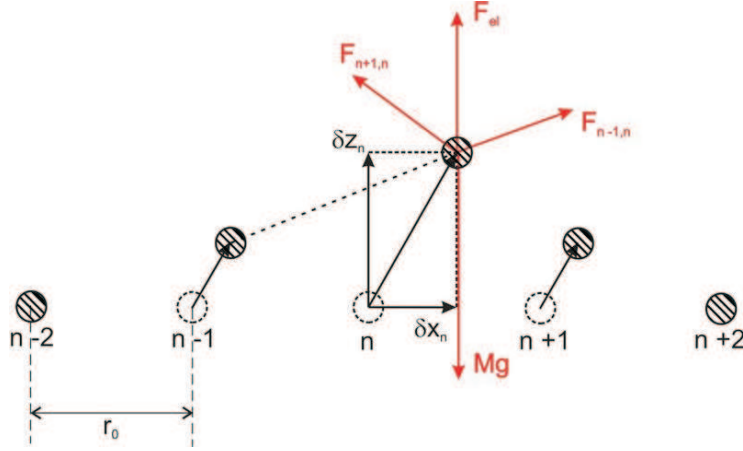
Τέλος, όπως ήταν αναμενόμενο (και από το κοινό πλάσμα $e-i$ [54]), η πλάγια διαμόρφωση μεταβάλλει έντονα την ευστάθεια του κύματος. Η τιμή του k_{cr} (πάνω από την οποία έχουμε αστάθεια) ελαττώνεται με το θ μέχρι κάποια τιμή θ_{cr} , και μετά πηγαίνει στο άπειρο: η ευρυγώνια διαμόρφωση ευνοεί τη σταθερότητα, βλ. σχ. 5α³². Συμπερασματικά, η πλάγια διαμόρφωση μπορεί να αποσταθεροποιήσει ένα ευσταθές κύμα, και αντιστρόφως. Επίσης, μπορεί να επηρεάσει το είδος τού σολιτονίου (δηλ. φωτεινού ή σκοτεινού τύπου, βλ. παραπάνω), εφόσον μεταβάλλει το πρόσημο του γινομένου των συντελεστών PQ (βλ. παραπάνω).

4 ΕΓΚΑΡΣΙΕΣ ΠΛΕΓΜΑΤΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΣΕ ΙΣΧΥΡΑ ΣΥΖΕΥΓΜΕΝΟ ΠΛΑΣΜΑ ΜΕ ΣΚΟΝΗ

Είναι πλέον γνωστό, όπως αναφέραμε στην εισαγωγή, τόσο θεωρητικά όσο και πειραματικά, ότι το πλάσμα με σκόνη (ΠΣ) μπορεί να υπάρξει σε ‘κρυσταλλική’ μορφή (βλ. [8, 21] για μία αναλυτική παρουσίαση του θέματος). Όπως έχει δείχτει θεωρητικά [57, 58] (και επαληθευτεί πειραματικά [59]), τα κρυσταλλικά πλέγματα ΠΣ (dust-lattices, DL), επιτρέπουν τη διάδοση τόσο διαμήκων [57] όσο και εγκάρσιων [58] αρμονικών κυμάτων. Εξαιτίας της αναπόφευκτης μη-γραμμικότητας, είτε α) λόγω του δυναμικού ηλεκτροστατικής (Debye) αλληλεπίδρασης μεταξύ των κόκκων σκόνης, είτε β) λόγω του (εξωτερικού) ηλεκτρικού δυναμικού στο χώρο μεταξύ των ηλεκτροδίων (sheath), σε ένα πείραμα, είτε, τέλος, γ) λόγω της σύζευξης μεταξύ διαφορετικών τρόπων ταλάντωσης, θα περίμενε κανείς αυτές οι ταλαντώσεις να υπόκεινται σε μη-γραμμικούς μηχανισμούς, όπως εξάλλου υπαινίσσονται μία σειρά από φαινόμενα που έχουν παρατηρηθεί σε τέτοια πλέγματα π.χ. αστάθειες, αλλαγές φάσης (‘τήξη’) κ.ά. Γνωστοί από καιρό, πολλοί τέτοιοι μηχανισμοί έχουν αναλυθεί διεξοδικά στη Φυσικής Στερεάς Κατάστασης, αλλά ελάχιστα σε σχέση με ΠΣ [60, 61]. Η αστάθεια διαμόρφωσης, που συζητήσαμε παραπάνω, είναι ένας από αυτούς τους φυσικούς μηχανισμούς: ευθύνεται για τον ενεργειακό εντοπισμό που παρατηρείται

³²εκτός εάν έχουμε πολύ έντονη παρουσία σκόνης, δηλ. για μ κάτω από ≈ 0.1 : βλ. σχ. 5β.

σε μη-γραμμικά πλέγματα [62] και πιστεύεται ότι εξηγεί [63] το πέρασμα από γραμμικές (φωνόνια) σε μη-γραμμικές ταλαντώσεις (“breathers”), που παρατηρούνται σε ατομικές αλυσίδες [64].



Σχήμα 6: Εγκάρσιες μετατοπίσεις σε οριζόντια τοποθετημένο κρύσταλλο από φορτισμένους κόκκους σκόνης (σχηματική απεικόνιση). Οι κατακόρυφες δυνάμεις (ηλεκτρική δύναμη $F_{\eta\lambda} = QE$ και βάρος Mg) εξουδετερώνονται στην ισορροπία. Αγνοώντας την οριζόντια μετατόπιση, παίρνουμε την εξίσωση (κάθετης) κίνησης (16).

Αντλώντας έμπνευση από πειραματικές ενδείξεις για το μη-γραμμικό χαρακτήρα των εγκάρσιων ταλαντώσεων που εκτελούν οι κόκκοι σκόνης σε ένα μονοδιάστατο κρυσταλλικό πλέγμα [65], επιλέξαμε να εξετάσουμε τη μη-γραμμική διαμόρφωση τέτοιων ταλαντώσεων οι οποίες διαδίδονται κατά μήκος μιας αλυσίδας (“κρυστάλλου”) από κόκκους σκόνης. Θεωρούμε εγκάρσια ($\sim \hat{z}$) κύματα σε πλέγμα σκόνης (ΕΚΠΣ) που διαδίδονται σε οριζόντιο ($\sim \hat{x}$) κρύσταλλο ΠΣ (σταθεράς r_0): η εξίσωση κίνησης είναι [58]:

$$M \frac{d^2 \delta z_n}{dt^2} = M \omega_0^2 (2 \delta z_n - \delta z_{n-1} - \delta z_{n+1}) + F_z, \quad (16)$$

όπου $\delta z_n = z_n - z_0$ η μετατόπιση του n -οστού κόκκου (μάζας M , φορτίου q) γύρω από τη θέση ισορροπίας z_0 (θεωρούμε μόνο αλληλεπιδράσεις μεταξύ πρώτων γειτόνων). Η εγκάρσια ιδιοσυχνότητα ω_0 δίνεται από τη σχέση $\omega_0^2 = -\frac{q}{Mr_0} \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \Big|_{x=r_0}$ όπου $\Phi(x)$ είναι το δυναμικό αλληλεπίδρασης μεταξύ των κόκκων σκόνης (σε απόσταση $x = |x_i - x_j|$): π.χ. για ένα δυναμικό τύπου Debye-Hückel (ή Yukawa): $\Phi(x) = (q/x) e^{-x/\lambda_D}$, είναι [2]: $\omega_0^2 = \frac{q^2}{Mr_0^3} (1 + \frac{r_0}{\lambda_D}) e^{-r_0/\lambda_D}$. Η κατακόρυφη ($\sim \hat{z}$) δύναμη $F_z = F_e - Mg$ είναι η συνισταμένη του βάρους και της δύναμης $F_e = qE(z)$ που οφείλεται στο κατακόρυφο ηλεκτρικό πεδίο $E(z) = -\partial V(z)/\partial z$. Το δυναμικό $V(z)$ ³³ αναπτύσσεται απλά σε σειρά γύρω από τη θέση ισορροπίας z_0 δηλ. $V(z) \approx V(z_0) + V_{(1)} \delta z + \frac{1}{2} V_{(2)} (\delta z)^2 + \frac{1}{6} V_{(3)} (\delta z)^3 + \mathcal{O}[(\delta z)^4]$, όπου $V_{(j)} \equiv \frac{\partial^j V(z)}{\partial z^j} \Big|_{z=z_0}$. Η ηλεκτρική δύναμη $F_e(z) = -q \sum_j \frac{1}{j!} V_{(j+1)} (\delta z)^j \equiv \sum_j \gamma_{(j)} (\delta z)^j$ τώρα έχει: ένα μηδενικής τάξης όρο που εξουδετερώνει τη βαρύτητα στο z_0 , ένα γραμμικό όρο (επαναφοράς) $\gamma_{(1)} \delta z$, και υψηλότερης τάξης (μη-γραμμικούς) όρους. Η συχνότητα

³³ Το δυναμικό $V(z)$ μπορεί να περιλαμβάνει το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό, καθώς και το τροποποιημένο δυναμικό “έγερσης” λόγω ροής ιόντων (ion wake potential) στο χώρο μεταξύ των ηλεκτροδίων, σε πειράματα εκκένωσης πλάσματος [66].

αποκοπής (gap) $\omega_g = \omega(k=0)$ βρίσκεται θεωρητικά [58] είτε προσδιορίζεται πειραματικά [65]· είναι της τάξης: $\omega_g/2\pi \approx 20 \text{ Hz}$ σε πειραματικές συνθήκες.

Αν γραμμικοποιήσουμε την εξ. (16), θέτοντας $\delta z_n = A_n \exp[i(knr_0 - \omega t)] + c.c.$ (όπου ω και $k = 2\pi/\lambda$ είναι η συχνότητα και ο κυματαριθμός), παίρνουμε τη σχέση διασποράς [58]

$$\omega^2 = \omega_g^2 - 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{kr_0}{2}. \quad (17)$$

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει εάν κρατήσουμε τους μη-γραμμικούς όρους.

Θα περιοριστούμε, για απλότητα, στο συνεχές όριο, θεωρώντας μεγάλα μήκη κύματος λ σε σχέση με τη σταθερά πλέγματος r_0 (δηλ. $kr_0 \ll 1$). Η επιτάχυνση F_z/M στην Εξ. (16), που τώρα περιγράφει την εξέλιξη μιας συνεχούς συνάρτησης $\delta z = u(x, t)$, είναι ίση με: $F_z/M = -\omega_g^2 u - \alpha u^2 - \beta u^3$ όπου οι συντελεστές α, β σχετίζονται με τη μορφή του δυναμικού: $\alpha = -\gamma_{(2)}/M \equiv qV_{(3)}/(2M)$, $\beta = -\gamma_{(3)}/M \equiv qV_{(4)}/(6M)$.

Θεωρώντας μικρές μετατοπίσεις: $u = \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots$ και χρησιμοποιώντας την αναγωγική θεωρία διαταραχών που περιγράψαμε πιο πριν, παίρνουμε μετά από πράξεις τη λύση:

$$u(x, t) = \epsilon \left[A e^{i(kx - \omega t)} + c.c. \right] + \epsilon^2 \alpha \left[-\frac{2|A|^2}{\omega_g^2} + \frac{A^2}{3\omega_g^2} e^{2i(kx - \omega t)} + c.c. \right] + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (18)$$

όπου ω και k ικανοποιούν τη σχέση:

$$\omega^2 = \omega_g^2 - c_0^2 k^2 \quad (19)$$

($c_0 = \omega_0 r_0$)· πρβλ. (17) στην περιοχή $k \approx 0$. Το πλάτος $A = A(\zeta)$ κινείται με την (αρνητική!) ταχύτητα ομάδας $v_g = d\omega/dk = -c_0^2 k/\omega$ στην αντίθετη κατεύθυνση από την ταχύτητα φάσης· αυτό το ιδιόρρυθμο οπισθοδρομικό κύμα (backward wave) παρατηρήθηκε πρόσφατα και πειραματικά [67]. Το πλάτος A περιγράφεται από την Εξ. NLS (9) όπου οι 'αργές' μεταβλητές $\{\zeta, \tau\}$ τώρα είναι $\{\epsilon(x - v_g t), \epsilon^2 t\}$. Οι συντελεστές P και Q τώρα είναι:

$$P = \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega}{dk^2} = -c_0^2 \omega_g^2 / (2\omega^3), \quad Q = \frac{1}{2\omega} \left(\frac{10\alpha^2}{3\omega_g^2} - 3\beta \right) = \frac{\omega_g^2}{4\omega} \left[\frac{5}{3} \left(\frac{V_3}{V_2} \right)^2 - \frac{V_4}{V_2} \right].$$

Για να προσδιορίσει κανείς τις ακριβείς εκφράσεις των P και Q και να διερευνήσει την ευστάθεια του κύματος, χρειάζεται μία δεδομένη μορφή δυναμικού $V(z)$. Από πειραματικά δεδομένα [65], έχει προκύψει για τη δυναμική ενέργεια $\mathcal{U}(z) = qV(z)$ των κόκκων σκόνης η εμπειρική σχέση³⁴:

$$\mathcal{U}(z) \simeq M\omega_g^2 \left[-0.9 \delta z + \frac{1}{2} (\delta z)^2 - \frac{1}{3} 0.5 (\delta z)^3 + \frac{1}{4} 0.07 (\delta z)^4 + \dots \right].$$

Συγκρίνοντας με τους ορισμούς μας, έχουμε $V_{(3)}/V_{(2)} = -1$, $V_{(4)}/V_{(2)} = 0.42$, επομένως $Q > 0$. Επίσης $P < 0$, κοντά στο $k = 0$ (συνεχές όριο). Επομένως, οι εγκάρσιες ταλαντώσεις που παρατηρήθηκαν στο πείραμα [65] μπορούν να διαδοθούν σαν ευσταθές κύμα, με μεγάλο μήκος κύματος λ . Για μικρότερο όμως μήκος κύματος, στη γενικότερη (διακριτή) περίπτωση, ο συντελεστής $P = \omega''(k)/2$ - όπως προκύπτει από την (17) -

³⁴Βλ. Εξ. (9) στο [65].

αλλάζει πρόσημο σε κάποια τιμή³⁵ του k και το γινόμενο PQ μπορεί να γίνει θετικό· το εγκάρσιο κύμα πλέγματος σκόνης μπορεί επομένως να είναι δυνάμει ασταθές, για σχετικά μικρά μήκη κύματος.

Όπως είδαμε, εφόσον το πλάτος του κύματος περιγράφεται από την Εξ. (9) (με τους παραπάνω όμως συντελεστές, στην περίπτωση μας), μπορούμε να περιμένουμε την ύπαρξη και διάδοση φωτεινών (για $PQ > 0$) είτε σκοτεινών (αν $PQ < 0$) σολιτονίων [48]: αυτά θα δίνονται ακριβώς από τις σχέσεις που είδαμε παραπάνω. Τα πρώτα (παλμοί) θα σχηματίζονται εάν επιλέξουμε αρκετά μικρό μήκος κύματος (ώστε $PQ > 0$). Τα τελευταία (οπές), αν και φαινομενικά ευνοούνται στο συνεχές όριο, δεν είναι μάλλον φυσικά αποδεκτά στο μοντέλο αυτό (αλυσίδα απείρου μήκους), εφόσον εκπροσωπούν άπειρη αποθηκευμένη ενέργεια, χωρίς όμως να αποκλείεται ο σχηματισμός τους σε πλέγμα πεπερασμένων διαστάσεων. Μάλιστα, σε ένα τέτοιο (μικρού μήκους και έντονης διακριτότητας) πλέγμα, περιμένει κανείς την εμφάνιση ενός άλλου τύπου μη-γραμμικής διεγέρσης, τύπου “διακριτής πνοής” (*Discrete Breather*), που έλκει πρόσφατα το ενδιαφέρον των ερευνητών στη Φυσική Στερεάς Κατάστασης [64].

5 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σε αυτή την εργασία εστιάσαμε στη διάδοση ηλεκτροστατικών κυμάτων χαμηλής συχνότητας σε πλάσμα που χαρακτηρίζεται από σημαντική παρουσία ηλεκτρικά φορτισμένης σκόνης (ΠΣ). Αφού περιγράψαμε τρεις κανονικούς τρόπους (ηλεκτροστατικής) ταλάντωσης που διαδίδονται μέσα σε τέτοιο τύπο πλάσματος, διερευνήσαμε τη επίδραση της μη-γραμμικότητας σε κύματα με μη-αμελητέο πλάτος, χρησιμοποιώντας μία κατάλληλη μέθοδο διαταραχών που μελετά την (αργή) μεταβολή του πλάτους στο χώρο και το χρόνο.

Εστιάζοντας σε μη-μαγνητισμένο πλάσμα ΠΣ με ασθενή σύζευξη (δηλ. σε “αέρια” κατά κάποιο τρόπο φάση), το οποίο επιτρέπει τη διάδοση *Ακουστικών Κυμάτων Σκόνης* και *Ιοντο-Ακουστικών Κυμάτων Σκόνης*, είδαμε ότι:

(α) τα ηλεκτροστατικά κύματα που διαδίδονται σε πλάσμα τύπου ΠΣ υπόκεινται σε αστάθεια που συνδέεται με τη διαμόρφωση του πλάτους τους·

(β) επιτρέποντας η διαμόρφωση αυτή να συμβαίνει σε διεύθυνση πλάγια ως προς τη διεύθυνση διάδοσης, μπορούμε να επηρεάσουμε έντονα το χαρακτήρα του κύματος: περιοχές σταθερές σε παράλληλη διαμόρφωση αποσταθεροποιούνται, και αντιστρόφως·

(γ) η ευρυγώνια διαμόρφωση ευνοεί την ευστάθεια, ενώ μικρές γωνίες προκαλούν αστάθεια, κυρίως για μικρά μήκη κύματος·

(δ) το πλάσμα με παρουσία σκόνης επιτρέπει τη διάδοση εντοπισμένων διεγέρσεων της περιβάλλουσας του κύματος (*envelope excitations*): περιοχές τιμών των (k, θ) με ευστάθεια (αστάθεια) δέχονται σκοτεινού (φωτεινού) τύπου τέτοια σολιτόνια, με χαρακτηριστικά που εξαρτώνται από τα k, θ μέσω των συντελεστών της Μη-Γραμμικής Εξίσωσης Schrödinger (9)·

(ε) σε σύγκριση με το κοινό ($e - i$) πλάσμα, η παρουσία θετικά (αρνητικά) φορτισμένης σκόνης ευνοεί (δυσχεραίνει) την ευστάθεια, ευνοώντας τη διάδοση σκοτεινών (φωτεινών) σολιτονίων, δηλ. οπών (παλμών).

Τέλος, σε ότι αφορά ένα πλάσμα τύπου ΠΣ με πολύ ισχυρή σύζευξη, δηλ. σε “κρυσταλλική” φάση, είδαμε ότι είναι πιθανός ο σχηματισμός εντοπισμένων διεγέρσεων σε σχέση

³⁵Στη Φυσική Στερεάς Κατάστασης, αυτή η τιμή του k είναι γνωστή ως σημείο μηδενικής διασποράς (*zero-dispersion point*) της ζώνης Brillouin [68].

με εγκάρσια κύματα πλέγματος με σκόνη. Ανάλογα συμπεράσματα έχουν προκύψει από πρόσφατες μελέτες σε σχέση με τον διαμήκη τρόπο ταλάντωσης του πλέγματος.

Πρέπει να αναφέρουμε – για λόγους πληρότητας – ότι, εστιάζοντας στα ποιοτικά χαρακτηριστικά του μοντέλου, επιλέξαμε να αγνοήσουμε φαινόμενα όπως η απόσβεση λόγω κρούσεων μεταξύ ιόντων και κόκκων σκόνης (ion drag) είτε μεταξύ κόκκων και ουδέτερου περιβάλλοντος (neutral drag), διακυμάνσεων μεγέθους και φορτίου των κόκκων, επίσης η μη-καρτεσιανή, πεπερασμένη γεωμετρία πλάσματος κλπ.

Ελπίζουμε ότι οι παραπάνω προβλέψεις μας σε σχέση με την ευστάθεια των ηλεκτροστατικών κυμάτων και το σχηματισμό μη-γραμμικών κυματομορφών, εφόσον διερευνηθούν (και επαληθευτούν) πειραματικά, μπορούν να συνεισφέρουν στην κατανόηση της συμπεριφοράς κυμάτων που διαδίδονται σε πλάσμα με σκόνη. Απώτερος σκοπός αυτής της προσπάθειας – που εμπεριέχει έντονο το ελκυστικό στοιχείο της πρόκλησης, σε συνδυασμό με αναμφισβήτητη “ομορφιά” στη φυσική περιγραφή αυτού του σχετικά νέου φυσικού συστήματος – είναι η κατανόηση των ιδιοτήτων του πλάσματος ΠΣ (και πιθανώς ο έλεγχός τους από τον άνθρωπο), σε ότι αφορά τόσο τις εργαστηριακές και βιομηχανικές εφαρμογές, τα μηχανολογικά ζητήματα που σχετίζονται με την Ελεγχόμενη Σύντηξη, αλλά και την ερμηνεία φαινομένων που σχετίζονται με πλάσμα ΠΣ στο Διάστημα.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ - ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Το κείμενο αυτό παρουσιάστηκε στο 3ο Σχολείο Φυσικής και Τεχνολογίας Σύντηξης (Βόλος, 29 Μαρτίου - 2 Απριλίου 2004), στους διοργανωτές του οποίου είμαι ευγνώμων για την πρόσκληση και για την φιλοξενία (τόσο τώρα όσο και στο παρελθόν).

Η εργασία αυτή πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια μετα-διδασκαρικής έρευνας, με την υποστήριξη (με τη μορφή υποτροφίας) της Επιτροπής Ευρωπαϊκών Κοινοτήτων (Human Potential Research and Training Network), μέσα από το Πρόγραμμα: “Complex Plasmas: The Science of Laboratory Colloidal Plasmas and Mesospheric Charged Aerosols” (HPRN-CT-2000-00140).

ΣΗΜΕΙΩΣΗ ΤΕΛΕΥΤΑΙΑΣ ΣΤΙΓΜΗΣ

Κατά την παρουσίαση αυτής της εργασίας (άνοιξη 2004), η διεθνής βιβλιογραφία αντιμετώπιζε με κάποια δυσπιστία το ενδεχόμενο δυναμικής εξέλιξης της σκόνης μέσα σε ένα αντιδραστήρα σύντηξης και την δυνατότητα “επιβίωσής” της στην υψηλή θερμοκρασία του περιβαλλοντος πλάσματος. Ανάλογες παρατηρήσεις έγιναν και κατά την παρουσίαση. Είναι αξιοσημείωτο ότι κατά την προετοιμασία της τελευταίας μορφής του κειμένου αυτού (αρχές 2006), μία σειρά από σημαντικές θεωρητικές μελέτες έχουν πλέον καταδείξει αναμφισβήτητο το δυναμικό ρόλο της σκόνης μέσα στο πλάσμα σύντηξης, καταξιώνοντας τη φυσική μελέτη και κατανόηση του πλάσματος με σκόνη μέσα σε περιβάλλον σύντηξης ως μία από τις αναγκαιότητες για το κοντινό μέλλον, σε σχέση με το σχεδιασμό του ITER (βλ. στην εισαγωγή). Μερικές από τις μελέτες αυτές είναι οι παρακάτω:

- S. I. Krasheninnikov *et al.*, Phys. Plasmas **11**, 3141 (2004);
- J.D. Martin *et al.*, Proc. 31st EPS Conf. Plasma Phys. (London), **28G** O-1.07 (2004);
- A. Pigarov *et al.*, Phys. Plasmas **12**, 122508 (2005);
- J.D. Martin *et al.*, J. Nuclear Mat., **337-339**, 114 (2005);
- Proc. UCSD 2005 meeting on fusion dust; online at: <http://maemail.ucsd.edu/~dust>.

References

- [1] F. Verheest, *Waves in Dusty Space Plasmas* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001).
- [2] P. K. Shukla and A. A. Mamun, *Introduction to Dusty Plasma Physics* (Institute of Physics, Bristol, 2002).
- [3] U. de Angelis, Phys. Scr. **45**, 465 (1992).
- [4] M. Horanyi, H. Houpis and D. A. Mendis, Astrophysics Space Sci. **144**, 215 (1988).
- [5] C. Goertz, Rev. Geophysics **27**, 271 (1989).
- [6] I. Mann and H. Kimura, Space Sci. Reviews, **97** 389 (2001).
- [7] N. Ya. Kotsarenko, S. V. Koshevaya and A. N. Kotsarenko, Geof. Internacional **37** (2), 71 (1998);
- [8] Βλ. πλήθος άρθρων στον τόμο: P. K. Shukla, D. A. Mendis & T. Desai (Eds.), *Advances in Dusty Plasmas* (World Scientific, Singapore, 1997)· επίσης βλ. *Dusty Plasmas in the New Millenium*, R. Bharuthram, M. A. Hellberg & F. Verheest (Eds.), AIP (2002).
- [9] A. Bouchoule (Ed.), *Dusty Plasmas: Physics, Chemistry and Technical Impacts* (Wiley, New York, 1999).
- [10] J. Winter, Plasma Phys. Cont. Fusion **40**, 1201 (1998); J. Winter, Phys. Plasmas **7** (10), 3862 (2000).
- [11] P. Bliokh, V. Sinitin & V. Yaroschenko, *Dusty and self-gravitational plasmas in space*, (Kluwer Academic, Dordrecht, 1995).
- [12] P. K. Shukla, Phys. Plasmas **8** (5), 1791 (2001).
- [13] N. A. Krall and A. W. Trivelpiece, *Principles of plasma physics*, McGraw - Hill (New York, 1973).
- [14] R. Balescu, *Transport Processes in Plasmas, Vol. 1: Classical Transport*, North Holland, Amsterdam, 1988.
- [15] Th. Stix, *Waves in Plasmas*, American Institute of Physics (New York, 1992).
- [16] Α. Βλάχος, *Φυσική Πλάσματος*, Εκδόσεις Τζιόλα (Θεσσαλονίκη 2000).
- [17] I. Kourakis and P. K. Shukla, *Oblique amplitude modulation of dust-acoustic plasma waves*, Physica Scripta **69**, in press (2004).
- [18] I. Kourakis and P. K. Shukla, Phys. Plasmas **10** (9), 3459 (2003).
- [19] I. Kourakis and P. K. Shukla, European Physical Journal D **28**, 109 (2004).
- [20] I. Kourakis and P. K. Shukla, <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0402007> (Phys. Plasmas, αναμένεται το Μάιο 2004).
- [21] G. Morfill *et al*, Plasma Phys. Cont. Fusion **44**, B263 (2002).

- [22] R. L. Merlino, A. Barkan, C. Thompson and N.D'Angelo, Plasma Phys. Cont. Fusion **39**, A421 (1997); C. Thompson, A. Barkan, R. L. Merlino and N.D'Angelo, IEEETrans. Plasma Sci. **27**, 146 (1999); F. Melandsø and Åge Bjerkmo, Phys. Plasmas **7** (11), 4368 (2000).
- [23] P.P.J.M. Schram, S. A. Trigger and A. G. Zagorodny, New J. Phys. **5**, 27.1 (2003); βλ. επίσης βιβλ. παραπομπές 6 - 8 εκεί.
- [24] V. N. Tsytovich and U. de Angelis, Phys. Plasmas **11**, 496 (2004); βλ. επίσης βιβλ. παραπομπές 3 - 6 εκεί.
- [25] M. Nambu *et al.*, Phys. Letters A **203**, 40 (1995).
- [26] J.-M. Liu *et al.*, Plasma Phys. Cont. Fusion **41**, A47 (1999); A. Piel and A. Melzer, Plasma Phys. Cont. Fusion **44**, R1 (2002); A. Piel *et al.*, J. Phys. B **36**, 533 (2003).
- [27] H. Ikezi, Phys. Fluids **29** (6), 1764 (1986).
- [28] G. Van Oost and J. P. H. E. Ongena, Trans. Fusion Technology **29** (2T), 9 (1996).
- [29] Βλ. τη συλλογική εξωνυχιστική παρουσίαση των θεμάτων Φυσικής που αφορούν το σχεδιασμό του ITER) (από την διεθνή ομάδα συνεργασίας) στο: Nuclear Fusion **39** (12), 2137 (1999), καθώς και στα άρθρα που ακολουθούν στον ίδιο τόμο (501 σελίδες συνολικά!).
- [30] K. Narihara *et al.*, Nuclear Fusion **37** (8), 1177 (1997).
- [31] A. T. Peacock *et al.*, J. Nuclear Materials **266 - 269**, 423 (1999).
- [32] Ph. Chappuis *et al.*, J. Nuclear Materials **290 - 293**, 245 (2001).
- [33] C. H. Skinner *et al.*, J. Nuclear Materials **290 - 293**, 486 (2001).
- [34] S. Muto *et al.*, J. Nuclear Materials **307 - 311**, 1289 (2002).
- [35] S. J.P. Sharpe *et al.*, J. Nuclear Materials **313 - 316**, 455 (2003).
- [36] A. Sagara *et al.*, J. Nuclear Materials **307 - 311**, 1 (2003).
- [37] G. Federici *et al.*, Nucl. Fusion **41** (12R), 1967 (2001); επίσης, G. Federici *et al.*, J. Nucl. Materials **283 - 287**, 110 (2000).
- [38] M. Rubel *et al.*, Nucl. Fusion **41** (8), 1087 (2001).
- [39] V. N. Tsytovich and J. Winter, Phys. Uspekhi **41** (8), 815 (1998); J. Winter and G. Gebauer, J. Nucl. Materials **266 - 269**, 228 (1999).
- [40] Md. Khairul Islam *et al.*, Nucl. Fusion **43** (8), 914 (2003).
- [41] K. Matyash, *Kinetic Modeling of Multi-Component Edge Plasmas*, διδακτορική διατριβή, Max - Planck - Institut für Plasmaphysik, Univ. Greifswald, Γερμανία (2003); βλ. <http://www.ipp.mpg.de/~knm/thesis.html> .
- [42] P. K. Shukla, Phys. Plasmas **10** (5), 1619 (2003).
- [43] N. N. Rao, P. K. Shukla and M. Y. Yu, Planet. Space Sci. **38**, 543 (1990).

- [44] A. Barkan, R. Merlino and N. D'Angelo, *Phys. Plasmas* **2** (10), 3563 (1995); A. Barkan, N. D'Angelo and R. Merlino, *Planet. Space Sci.* **44**, 239 (1996); επίσης βλ. J. Pieper and J. Goree, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3137 (1996).
- [45] T. Taniuti and N. Yajima, *J. Math. Phys.* **10**, 1369 (1969); N. Asano, T. Taniuti and N. Yajima, *J. Math. Phys.* **10**, 2020 (1969).
- [46] M. Remoissenet, *Waves Called Solitons* (Springer-Verlag, Berlin, 1994).
- [47] A. Hasegawa, *Plasma Instabilities and Nonlinear Effects* (Springer-Verlag, Berlin, 1975); επίσης: *Optical Solitons in Fibers* (Springer-Verlag, 1989).
- [48] R. Fedele *et al.*, *Phys. Scripta T* **98** 18 (2002); also, R. Fedele and H. Schamel, *Eur. Phys. J. B* **27** 313 (2002).
- [49] Εδώ ακολουθούμε το άρθρο [48], προσαρμόζοντας την ονοματολογία εκεί ως εξής: $x \rightarrow \zeta$, $s \rightarrow \tau$, $\rho_m \rightarrow \rho_0^2$, $\alpha \rightarrow 2P$, $q_0 \rightarrow -2PQ$, $\Delta \rightarrow L$, $E \rightarrow \Omega$, $V_0 \rightarrow v$.
- [50] P. K. Shukla and V. P. Silin, *Phys. Scr.* **45**, 508 (1992).
- [51] K. Shimizu and H. Ichikawa, *J. Phys. Soc. Japan* **33**, 789 (1972).
- [52] T. Kakutani and N. Sugimoto, *Phys. Fluids* **17**, 1617 (1974).
- [53] J.-K. Xue, W.-S. Duan and L. He, *Chin. Phys.* **11**, 1184 (2002).
- [54] M. Kako and A. Hasegawa, *Phys. Fluids* **19**, 1967 (1976).
- [55] Για να το δούμε, αντικαθιστούμε στις εκφράσεις των P , Q στο όριο για χαμηλό k (βλ. §5 στο κείμενο) με τις τιμές των παραμέτρων $\{\alpha, \beta, s\}$ που αναφέρονται στην παράγραφο §;;· πρβλ. Εξ. (41) στην [51]: παρατηρείστε ότι ξαναβρίσκουμε τον ίδιο αριθμητικό παράγοντα $1/3$ εδώ, για $\mu = 1$.
- [56] I. Durrani *et al.*, *Phys. Fluids* **22**, 791 (1979).
- [57] F. Melandsø, *Phys. Plasmas* **3**, 3890 (1996); B. Farokhi *et al.*, *Phys. Lett. A* **264**, 318 (1999); *idem*, *Phys. Plasmas* **7**, 814 (2000); D. Tskhakaya and P. K. Shukla, *Phys. Lett. A* **286**, 277 (2001).
- [58] S. V. Vladimirov *et al.*, *Phys. Rev. E* **56**, R74 (1997).
- [59] A. Melzer *et al.*, *Phys. Lett. A* **191**, 301 (1994); Y. Hayashi and K. Tachibana, *Jpn. J. Appl. Phys.* **33**, L84 (1994).
- [60] M. R. Amin, G. E. Morfill and P. K. Shukla, *Phys. Plasmas* **5** (7), 2578 (1998); also: *idem*, *Phys. Scripta* **58**, 628 (1998).
- [61] I. Kourakis, *Proceedings of the 29th EPS meeting on Controlled Fusion and Plasma Physics, European Conference Abstracts (ECA)* Vol. 26B P-4.221 (2002).
- [62] Y. S. Kivshar and M. Peyrard, *Phys. Rev. A* **46**, 3198 (1992).
- [63] I. Daumont *et al.*, *Nonlinearity* **10**, 617 (1997); M. Peyrard, *Physica D* **119**, 184 (1998).

- [64] See several papers in the volume: G. Tsironis and E. N. Economou (Eds.), *Fluctuations, Disorder and Nonlinearity*, Physica D **113**, North-Holland, Amsterdam (1998); T. Bountis *et al.*, Phys. Lett. **268**, 50 (2000).
- [65] A.V.Ivlev *et al.*, Phys. Rev. Lett. **85**, 4060 (2000).
- [66] P. K. Shukla and N. N. Rao, Phys. Plasmas **3**, 1770 (1996).
- [67] T. Misawa *et al.*, Phys. Rev. Lett. **86**, 1219 (2001).
- [68] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics* (John Wiley and Sons, New York, 1996).

Παράρτημα: Ο συντελεστής Q στην Εξ. (9)

Ο συντελεστής μη-γραμμικότητας Q στην εξίσωση (9) εκφράζεται σαν το άθροισμα 5 συνεισφορών, έστω $Q = \sum_{j=0}^4 Q_j$. Συγκεκριμένα, ο όρος $Q_{0/2}$ οφείλεται στη μηδενική/δεύτερης τάξης αρμονική, ενώ ο Q_1 προέρχεται από τον κυβικό όρο στην εξ. (6δ):

$$Q_0 = + \frac{1}{2\omega} \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{(1+k^2)^2} \frac{1}{\beta + \gamma\sigma - v_g^2} \times$$

$$\left\{ \beta k^2 \left[\beta [3 + 6k^2 + 4k^4 + k^6 + 2\alpha\beta(s(2k^2 + 3) + 2\alpha v_g^2)] \right. \right.$$

$$+ \gamma\sigma [(\gamma + 1)(1 + k^2)^3 + 2\alpha\beta(-2\alpha\beta + s\gamma(1 + k^2)^2)]$$

$$+ [\beta(2 + 4k^2 + 3k^4 + k^6 + 2s\alpha\beta) + 2\gamma\sigma(1 + k^2)^2(1 + k^2 + s\alpha\beta)] \cos 2\theta \left. \right]$$

$$+ 2(1 + k^2)^4(\beta + \gamma\sigma)\omega^2 \cos^2 \theta$$

$$+ k(1 + k^2) \left[\beta k^2 + \omega^2(1 + k^2) \right] \frac{v_g}{\omega} \times$$

$$\left. \left[\beta(1 + k^2 + 2s\alpha\beta) + \gamma(\gamma - 1)\sigma(1 + k^2)^2 \right] \cos \theta \right\}, \quad (20)$$

$$Q_1 = \frac{3\alpha'\beta}{2\omega} \frac{k^2}{(1+k^2)^2}, \quad (21)$$

$$Q_2 = - \frac{1}{12\beta^3} \frac{1}{\omega} \frac{1}{k^2(1+k^2)^2} \times$$

$$\left\{ 2\beta k^2 \left[5s\alpha\beta^2(1+k^2)^2 + 2\alpha^2\beta^3 + 2\gamma^2\sigma(1+k^2)^4(1+4k^2) \right. \right.$$

$$+ \beta(1+k^2)^3(3+9k^2+2s\alpha\gamma^2\sigma) \left. \right]$$

$$+ (1+k^2)^3\omega^2 \left[\beta(3+9k^2+6k^4+2s\alpha\beta) + 2\gamma^2\sigma(1+k^2)^2(1+4k^2) \right] \left. \right\}. \quad (22)$$

Δείτε ότι οι Q_1, Q_2 δεν εξαρτώνται από τη γωνία θ . Τέλος, οι όροι $Q_{3,4}$ (παραλείπονται εδώ για συντομία) οφείλονται στο γεγονός ότι λάβαμε υπόψη μας την πίεση p_d (και μηδενίζονται στο 'ψυχρό' μοντέλο, δηλαδή για $\sigma = 0$).