Fakultät für Physik und Astronomie der Ruhr-Universität Bochum

Institut für Theoretische Physik

Manuskript zu der Vorlesung

Einführung in die Theoretische Astrophysik

– basierend auf den Vorlesungen gehalten von H. Fichtner –

Bochum 2021

Einführung in die Theoretische Astrophysik

(Februar 2021)

Vorbemerkung: Dieses Skript basiert auf der Vorlesung „Einführung in die Theoretische Astrophysik“ aus den Wintersemestern 2015/2016 und 2020/2021 an der Ruhr-Universität Bochum, gehalten von PD Dr. Horst Fichtner. Es wurde in der vorliegenden LaTeX-Version von Lennart Baalmann erstellt.

Das vorliegende Skript kann (und soll ☺) kein Lehrbuch ersetzen. Insbesondere ist es nicht so gründlich Korrektur gelesen wie manches Buch. Daher sind wir dankbar für jeden Hinweis auf (wahrscheinlich noch existierende) Fehler.

Inhaltsverzeichnis

1 Inhaltsüberblick **2**

2 Entstehung der Sterne **4**
2.1 Das interstellare Medium (ISM) . . . 4
2.2 Gravitationsinstabilität, Jeans'sches Kriterium . . . 5
2.2.1 Potentielle Energie . . . 5
2.2.2 Thermische Energie . . . 5
Exkurs: Das Viritaltheorem der klassischen Mechanik . . . 6
2.3 Protosternentwicklung . . . 7

3 Aufbau eines Sterns **9**
3.1 Grundgleichungen des Sternaufbaus . . . 9
3.2 Einfache Folgerungen aus den Grundgleichungen . . . 12
3.2.1 Zustand eines Sterns im Zentralbereich . . . 12
3.2.2 Schwingungszeitskala . . . 13
3.2.3 Kontraktionszeitskala $\hat{=}$ Helmholtz-Kelvin-Zeitskala . . . 13
3.2.4 Masse-Leuchtkraft-Beziehung . . . 14
3.2.5 Eddington-Limit . . . 14
3.3 Energieerzeugung im Sterninneren . . . 15
3.3.1 Der Weg zum Konzept der Kernfusion . . . 15
3.3.2 Pinzipielle Atomkernstruktur, Tunneleffekt . . . 15
3.3.3 Nukleare Zeitskala $\hat{\approx}$ Lebensdauer der Sonne . . . 16
3.3.4 Fusionsprozesse . . . 18
3.3.5 Energieerzeugungsraten (ε_{Fusion}) . . . 21
3.4 Ein Standardmodell des Sternaufbaus . . . 22
3.4.1 Umformulierung der Grundgleichungen . . . 22
3.4.2 Randbedingungen und Lösungsverfahren . . . 23
3.4.3 Standardmodell der Sonne . . . 23
3.5 Nicht-Standard-Modelle . . . 25

4 Entwicklung der Sterne **27**
4.1 Das Hertzsprung-Russell-Diagramm (HRD) . . . 27
4.2 Sternentwicklung . . . 29
4.2.1 Grundidee . . . 29
4.2.2 Entwicklung der Sonne . . . 30
4.3 Endpunkt der solaren Entwicklung . . . 30
4.3.1 Der Zustand des C-O-Kerns . . . 31
4.3.2 Der Übergang zum Weißen Zwerg . . . 32
Exkurs: Chandrasekhar-Grenze . . . 32

5 Sternatmosphären **35**
5.1 Grundgleichung des Strahlungstransportes . . . 35
5.2 Die optische Tiefe . . . 36
5.3 Äußere Randbedingungen für Sternmodelle . . . 37

5.4 Die Opazität . . . 38
5.5 Strukturierung der Sonnenatmosphäre . . . 39
5.5.1 Anschluss an Standardmodell (vgl. 3.4.3) . . . 39
5.5.2 Photosphäre, Chromosphäre, Übergangsregion und Korona . . . 40

6 Sonnenwind und Heliosphäre 43
6.1 Der Sonnenwind . . . 43
6.1.1 Gleichgewicht der Sonnenkorona . . . 43
Exkurs: Hydrodynamik . . . 44
6.1.2 Hydrodynamische Beschreibung der Korona . . . 49
6.1.3 Erweiterung des Parker-Modells: Magnetfeld . . . 52
6.2 Die Heliosphäre . . . 52
6.2.1 Struktur der Heliosphäre . . . 53
Exkurs: Stoßwellen . . . 54

7 Die Milchstraße 57
7.1 Großräumige Struktur . . . 57
7.2 Theorie der Spiralarme . . . 57
7.3 Hauptquellen der kosmischen Strahlung in der Milchstraße . . . 63
7.3.1 Diffusive Schockbeschleunigung . . . 64
7.3.2 Beschleunigungszeitskala der diffusiven Schockbeschleunigung . . . 68

8 Transport kosmischer Strahlung 71
8.1 Die Transportprozesse . . . 71
8.1.1 (Räumliche) Diffusion . . . 71
8.1.2 Konvektion . . . 72
8.1.3 Driftbewegung . . . 72
8.1.4 Adiabatische Energieänderung . . . 72
8.1.5 Impulsdiffusion . . . 72
8.1.6 Quellen und Senken . . . 73
8.1.7 Impulsänderungen . . . 73
8.1.8 Fragmentation und radioaktiver Zerfall . . . 73
8.2 Parker-Transportgleichung . . . 73

9 Magnetohydrodynamik 75
9.1 Grundgleichungen . . . 75
9.2 Ideale MHD-Wellen . . . 77
9.3 Kopplung von thermischem Plasma und kosmischer Strahlung . . . 79

1 Inhaltsüberblick

Der Inhalt der Vorlesung sei anhand dieser Fragen verdeutlicht:

(1) Was wird nicht behandelt?

Zu den nachfolgend genannten Themen gibt es die aufgelisteten Spezialvorlesungen:

- Kosmologie → Physik des Universums
- Astronomie → Grundlagen der Astronomie
  → X-Ray Astronomy
  → Interstellar Medium
- Astroteilchen → Plasma Physics of Astroparticles
  → Cosmic Ray Astrophysics

(2) Was ist Gegenstand der Astrophysik?
Was wird in der Vorlesung behandelt?

Ursprüngliche **Definition:**
Astrophysik ≙ Wissenschaft von der physikalischen Beschaffenheit der Himmelskörper

Im Laufe der Zeit erweitert auf:

→ Sterne und Strahlung

- Planeten und kleine Körper (Monde, Planetoiden, Kometen)

→ interplanetares Medium (zirkumstellares Medium)

→ interstellares Medium

→ Milchstraße, Galaxien

- intergalaktisches Medium
- Galaxienhaufen, Superhaufen
- Kosmologie

→ kosmische Strahlung (EM- und Teilchenstrahlung)

(„→“ indiziert in der Vorlesung behandelte Themen)

(3) Welche Grundlagen werden benötigt?

- Theoretische Mechanik (Dynamik, Himmelsmechanik)
- Theoretische Elektrodynamik (Ionisierte Gase, EM-Felder)
- Thermodynamik und Statistik (Sternaufbau, Zustandsgleichung von Gasen)

- Quantenmechanik und -statistik (Energieerzeugung im Sterninneren, Sternentwicklungsendzustände)
- Hydrodynamik/Plasmaphysik (Beschreibung der ionisierten Gase)
- Relativitätstheorie (Kosmologie, kosmische Strahlung)

Diese werden je nach Bedarf in Exkursen behandelt.

Besonderheiten bezüglich der **Überprüfbarkeit astrophysikalischer Modelle**:

- Astrophysikalische Theorien...
  - ... können praktisch nicht in Experimenten überprüft werden
  - ... können nur durch Beobachtung getestet werden:
    - Fernerkundung („remote sensing")
    - „Vor-Ort"-Beobachtung („in situ measurement")
- Astrophysikalische Systeme sind in der Regel einer in-situ-Beobachtung nicht zugänglich
  → Fernerkundung mittels EM- und/oder Teilchenstrahlung
- Ausnahme „Heliosphäre" ≙ vom solaren Plasma dominierte zirkumsolare Region

  → in-situ-Messungen möglich durch Raumsonden
  (allerdings keine 'aktiven' Experimente mit selbstdefinierten Bedingungen)

  → Heliosphäre ≙ „Entwicklungs- und Testlabor für andere astrophysikalische Systeme"

  → Export von „Heliophysik" in die „Astrophysik"

2 Entstehung der Sterne

Grundproblem: Bildung eines Sterns mit mittlerer Massendichte $\bar{\rho}_* \approx 1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ aus „interstellarer" Materie mit $\bar{\rho}_{ISM} \approx 10^{-24}\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} \approx 1\,\frac{m_{p^+}}{\mathrm{cm}^3}$

2.1 Das interstellare Medium (ISM)

- Zusammensetzung (Massenanteil) des ISM:

  ~ 99% (teilweise) ionisiertes Gas
  ~ 1% Staub (Teilchen mit $\varnothing \leq 1\mu\mathrm{m}$)

- Zusammensetzung (relative Häufigkeit) des Gases:

  ~ 90% Wasserstoff
  ~ 10% Helium
  (schwerere Elemente vernachlässigbar)

- Zusammensetzung der Energiedichte ≙ Druck des ISM (in Sonnennähe)

$$P_{ISM} = P_{th} + P_{mag} + P_{CR} \approx 0{,}3\,\frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{cm}^3} + 0{,}2\,\frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{cm}^3} + 0{,}5\,\frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{cm}^3} \approx 1\,\frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{cm}^3}$$

  thermischer Gasdruck: $P_{th} = \alpha nkT,\ \alpha \in [1{,}2]$
  interstellares Magnetfeld: $P_{mag} = \frac{B^2}{2\mu_0}$
  kosmische (Teilchen-) Strahlung: $P_{CR} \approx 0{,}5\,\frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{cm}^3}$

  Da das ISM **nicht** homogen verteilt ist, können diese Werte stark variieren.

	Teilchenzahl-dichte [cm^3]	**Temperatur** [K]	**Ausdehnung** [pc]	**Masse** [$M_\odot$]
Heiße Komponente	$3 \cdot 10^{-3}$	$10^5 - 10^6$	-	-
Diffuses HII-Gas (einfach ionisierter Wasserstoff)	$3 \cdot 10^{-2}$	10^4	-	-
HII-Regionen (um O- und B-Sterne)	$10^2 - 10^3$	10^4	≤ 200	$\sim 10^6$
warmes HI-Gas (neutraler Wasserstoff)	$0{,}1 - 1$	$10^3 - 10^4$	-	-
(Diffuse) HI-Wolken	20	80	$3 - 5$	~ 30
Molekülwolken (molekularer Wasserstoff)	$10^3 - 10^6$	$10 - 50$	$1 - 50$	$10^2 - 10^6$

Tabelle 2.1: **Physikalischer Zustand** des interstellaren Gases.

$$1\,\mathrm{pc} = 3{,}1 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m},\ 1M_\odot = 2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$$

2.2 Gravitationsinstabilität, Jeans'sches Kriterium

Idee: Kollaps einer „interstellaren Wolke", wenn die (Selbst-) Gravitation den (thermischen) Druck überwiegt

Da eine interstellare Wolke ein Vielteilchensystem ist, betrachte die gesamte potentielle bzw. thermische Energie als Maß für die Gravitation bzw. den Druck.

2.2.1 Potentielle Energie

- potentielle Energie Φ eines Teilchens der Masse m_i im Abstand r_i von einer (Punkt-) Masse M:

$$\vec{F}_G = -G\frac{Mm_i}{r_i^2}\vec{e}_r = -\mathrm{grad}\Phi_i = -\vec{\nabla}\Phi_i \Rightarrow \Phi_i = -\frac{GMm_i}{r_i}$$

- potentielle Energie E_{pot} der Wolke ergibt sich aus Summation über alle i und Berücksichtigung von $M = M(r)$:

$$E_{pot} = -\sum_i \Phi_i = -\sum_i \frac{GM(r)m_i}{r_i} \underset{\boxed{\text{sphärisch-symmetrische Massenverteilung} \Rightarrow \text{Masse in Kugelschale mit Radius } r_i\text{:} \quad m_i = 4\pi r_i^2 \Delta r_i \rho(r_i)}}{=} -\sum_i GM(r)4\pi r_i \rho(r_i)\Delta r_i \rightsquigarrow -4\pi G \int_0^{R_W} M(r)\rho(r) r \,\mathrm{d}r$$

Mit der Annahme einer homogenen Kugel:

$$\rho(\vec{r}) = \bar{\rho}_W = \frac{M_W}{V_W} = \frac{M(r)}{V(r)} \Leftrightarrow \frac{M_W}{\frac{4}{3}\pi R_W^3} = \frac{M(r)}{\frac{4}{3}\pi r^3} \Rightarrow M(r)\rho(r) = \bar{\rho}_W^2 \frac{4}{3}\pi r^3$$

folgt $$\boxed{E_{pot} = -4\pi G \tfrac{4}{3}\pi \bar{\rho}_W^2 \int_0^{R_W} r^4 \,\mathrm{d}r = -4\pi G \frac{4}{3}\pi \frac{M_W^2}{\left(\frac{4}{3}\pi R_W^3\right)^2}\frac{1}{5}R_W^5 = -\frac{3}{5}G\frac{M_W^2}{R_W}}$$

2.2.2 Thermische Energie

- Druck $P = \frac{|\vec{F}|}{A} = \frac{|\vec{F}|\Delta s}{A\Delta s} = \frac{E}{V} \mathrel{\hat{=}}$ Energiedichte
- thermischer Druck $P_{th} = \frac{3}{2}nkT$ (3 Freiheitsgrade, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$)
- thermische Energie der Wolke

$$\boxed{E_{th} = P_{th} \cdot V_W = \tfrac{3}{2}n_W kT_W V_W \underset{\boxed{n_W = \frac{\bar{\rho}_W}{\bar{m}} = \frac{\bar{\rho}_W}{\bar{\mu}m_H}}}{=} \frac{3}{2}\frac{\bar{\rho}_W}{\bar{\mu}m_H}kT_W V_W \underset{\boxed{M_W = \bar{\rho}_W V_W}}{=} \frac{3}{2}\frac{M_W}{\bar{\mu}m_H}kT_W}$$

Nach dem **Virialtheorem** der klassischen Mechanik lautet im Falle des Gravitationspotentials die **Gleichgewichtsbedingung** für ein Vielteilchensystem (siehe Exkurs): $-E_{pot} = 2E_{th}$

Damit lautet die **Kollapsbedingung** offenbar: Jeans (1902, 1928)

$$-E_{pot} > 2E_{th} (\mathrel{\hat{=}} \text{„Gravitation} > \text{Druck"})$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{5}G\frac{M_W^2}{R_W} > 3\frac{M_W}{\bar{\mu}m_H}kT_W$$

$$\Rightarrow \boxed{M_W > \frac{5kT_W}{G\bar{\mu}m_H} R_W = 5\sqrt{\frac{15}{4\pi}} \left(\frac{k}{G\bar{\mu}m_H}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{T_W^3}{\bar{\rho}_W}}} \quad \textbf{„Jeansmasse"}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{\rho}_W > \frac{3}{4\pi} \left(\frac{5kT_W}{G\bar{\mu}m_H}\right)^3 \frac{1}{M_W^2} = \rho_J} \quad \textbf{„kritische Dichte"} \triangleq \textbf{„Jeansdichte"}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_W > \sqrt{\frac{15}{4\pi} \frac{kT_W}{G\bar{\mu}m_H\bar{\rho}_W}} = R_J} \quad \textbf{„Jeanslänge"} \triangleq \textbf{„Jeansradius"}$$

Bemerkung: James Hopwood Jeans leitete das Instabilitätskriterium ursprünglich mittels einer Störungsrechnung her – daher findet man gelegentlich geringfügig andere numerische Faktoren in der Literatur (siehe Übung).

Exkurs: Das Virialtheorem der klassischen Mechanik

Motivation: In (nicht-statischen) Teilchensystemen werden ständig potentielle und kinetische Energie ineinander umgewandelt. Daher werden zeitliche Mittelwerte betrachtet:

Ausgangspunkt sind die **dynamischen Grundgleichungen** der Teilchen mit Massen m_i: $\quad m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i \qquad | \cdot \vec{r}_i$

$$\Rightarrow m_i\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i = \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \Leftrightarrow \sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i$$

$$\Leftrightarrow \sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i\right) - \sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i^2 \overset{\boxed{\text{konservative Kräfte}}}{=} -\sum_i \left(\vec{\nabla}_i V_i\right) \cdot \vec{r}_i \qquad | \langle ... \rangle$$

Mit der Mittelwertdefinition $\langle f \rangle = \lim\limits_{\tau\to\infty} \int\limits_0^\tau f(t)\,\mathrm{d}t$ folgt:

(i) $$\left\langle \sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i\right)\right\rangle = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int\limits_0^\tau \left\{\sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i\right)\right\} \mathrm{d}t$$

$$= \sum_i \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \underbrace{\left[m_i\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i\right]_0^\tau}_{\text{beschränkt}} = 0$$

$\boxed{\left|\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i\right| < \infty \triangleq \text{beschränkt}}$

(ii) $$\left\langle \sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i^2 \right\rangle = 2\left\langle \sum_i \frac{1}{2} m_i\dot{\vec{r}}_i^2 \right\rangle = 2\left\langle \sum_i T_i \right\rangle = 2\langle T \rangle$$

Also: $\boxed{2\langle T \rangle = \left\langle \sum_i \left(\vec{\nabla} V_i\right) \cdot \vec{r}_i \right\rangle}$ **Virialsatz** für konservative Kräfte

$\left\langle \sum_i \left(\vec{\nabla} V_i\right) \cdot \vec{r}_i \right\rangle$ bezeichnet man als „Virial" (der Kräfte) nach Clausius von lat. vis, vires $\triangleq$ Kraft, Kräfte

$\Leftrightarrow$ Der zeitliche Mittelwert der kinetischen Gesamtenergie eines Systems ist (bei beschränkter Bewegung der Teilchen) gleich dem (halben) Virial des Systems.

Anwendung des Virialsatzes auf eine interstellare Wolke

Potential eines einzelnen Wolkenteilchens: $V_i = \alpha_i \left|\vec{r}_i\right|^{-1}, \quad \alpha_i = const.$

Damit ergibt sich das „Virial“ zu:

$$\sum_i \left[\left(\vec{\nabla} V_i\right) \vec{r}_i\right] = \sum_i \left[(-1)\alpha_i \left|\vec{r}_i\right|^{-2} \vec{e}_i \cdot \left|\vec{r}_i\right| \vec{e}_i\right] =$$
$$= -\sum_i \alpha_i \left|\vec{r}_i\right|^{-1} = -V \mathrel{\hat{=}} \text{negatives Gesamtpotential der Gaswolke}$$

Daraus folgt: $2\langle T\rangle = -\langle V\rangle$

Der Erwartung entsprechend sind geeignete Kandidaten für gravitationsinstabile Bereiche **kalte und dichte Regionen des ISM**. Betrachte daher gemäß Tabelle 2.1 **diffuse HI-Wolken** sowie **Molekülwolken**.

(1) Diffuse HI-Wolken:

$$\left.\begin{array}{l} M_J \approx 2000 M_\odot > M_W \\ \rho_J \approx 1{,}5 \cdot 10^{-17}\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} \Rightarrow n_J \approx 10^7\,\mathrm{cm}^{-3} > n_W \\ R_J \approx 50\,\mathrm{pc} > R_W \end{array}\right\} \Rightarrow \textbf{Stabilität}$$

(2) Molekülwolken:

$$\left.\begin{array}{l} M_J \approx 200 M_\odot < M_W \\ n_J \approx \left(10^{-2} \text{ - } 10^{-3}\right)\,\mathrm{cm}^{-3} < n_W \\ R_J \approx 0{,}5\,\mathrm{pc} < R_W \end{array}\right\} \Rightarrow \textbf{Instabilität}$$

$\Rightarrow$ **Sternentstehung geschieht in Molekülwolken!**

Bemerkungen

- Komplikationen beim Gravitationskollaps
  - **Drehimpuls** der Wolke
    ↳ verringert durch Drehmoment infolge eines interstellaren Magnetfeldes (kein abgeschlossenes System!)
  - **Magnetfeld**
    ↳ wird unwichtig bei Dichtezunahme (zunehmende Rekombination $\Rightarrow$ geringerer Einfluss der Ionen)
- Begünstigung des Kollaps durch **thermische Instabilität**. Energieverlust ($\sim n_W^2$) der Gasteilchen (H, H_2) durch Stoßanregung anderer (minorer) Teilchen (C,O-Ionen, Moleküle) und nachfolgende Abstrahlung im Infraroten

2.3 Protosternentwicklung

Da Molekülwolken inhomogene Dichteverteilung haben, wird es lokal zur Gravitationsinstabilität, also zum Kollaps kommen $\hat{=}$ **Fragmentierung** von Molekülwolken in kleineren Teilmassen M_{proto} mit $0{,}1 M_\odot < M_{proto} < 100 M_\odot$.

Bei fortschreitendem Kollaps (s. Abb. 2.1) werden die Zentralgebiete der Teilmassen **optisch dick** (d.h. undurchlässig) für ihre thermische Abstrahlung (im Infraroten, s.o.). Ab diesem Zeitpunkt spricht man von **Protosternen** (nahezu kugelförmig, $\bar{\rho} \approx 10^{-12}\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$, $T \approx 20\,\mathrm{K}$).

Infolge der Strahlungsabsorption erfolgt eine Aufheizung, damit eine Druckerhöhung und eine Verlangsamung des Kollaps (**1. quasistatische Phase**). Bei $\bar{\rho} \sim 10^{-8}\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ und $T \gtrsim 10^3\,\mathrm{K}$

Dissoziation von H_2 und ein **2. dynamischer Kollaps** beginnt infolge der mit dem erneuten Energieverlust einhergehenden Druckverringerung. Wenn nur noch atomarer Wasserstoff vorhanden ist ($\bar{\rho} \approx 10^{-3}\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$, $T \approx 10^4\,\mathrm{K}$), setzt die **2. quasistatische Phase** ein, die bis zum Beginn der stabilen Fusion von Wasserstoff zu Helium anhält (≙ „Wasserstoffbrennen"). Ab diesem Zeitpunkt spricht man von einem (**Hauptreihen-**) **Stern**, der für relativ lange Zeit (10^6 - 10^{10} Jahre) stabil bleibt.

Im Falle der Sonne führte der 2. quasistatische Kollaps zu $\bar{\rho} \approx 1{,}4\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ und einer Zentraltemperatur von $T \approx 1{,}6 \cdot 10^7\,\mathrm{K}$. Die „Lebensdauer" dieses Zustandes wird mit etwa 10^{10} Jahren abgeschätzt (von denen $4{,}5 \cdot 10^9$ Jahre bereits vergangen sind).

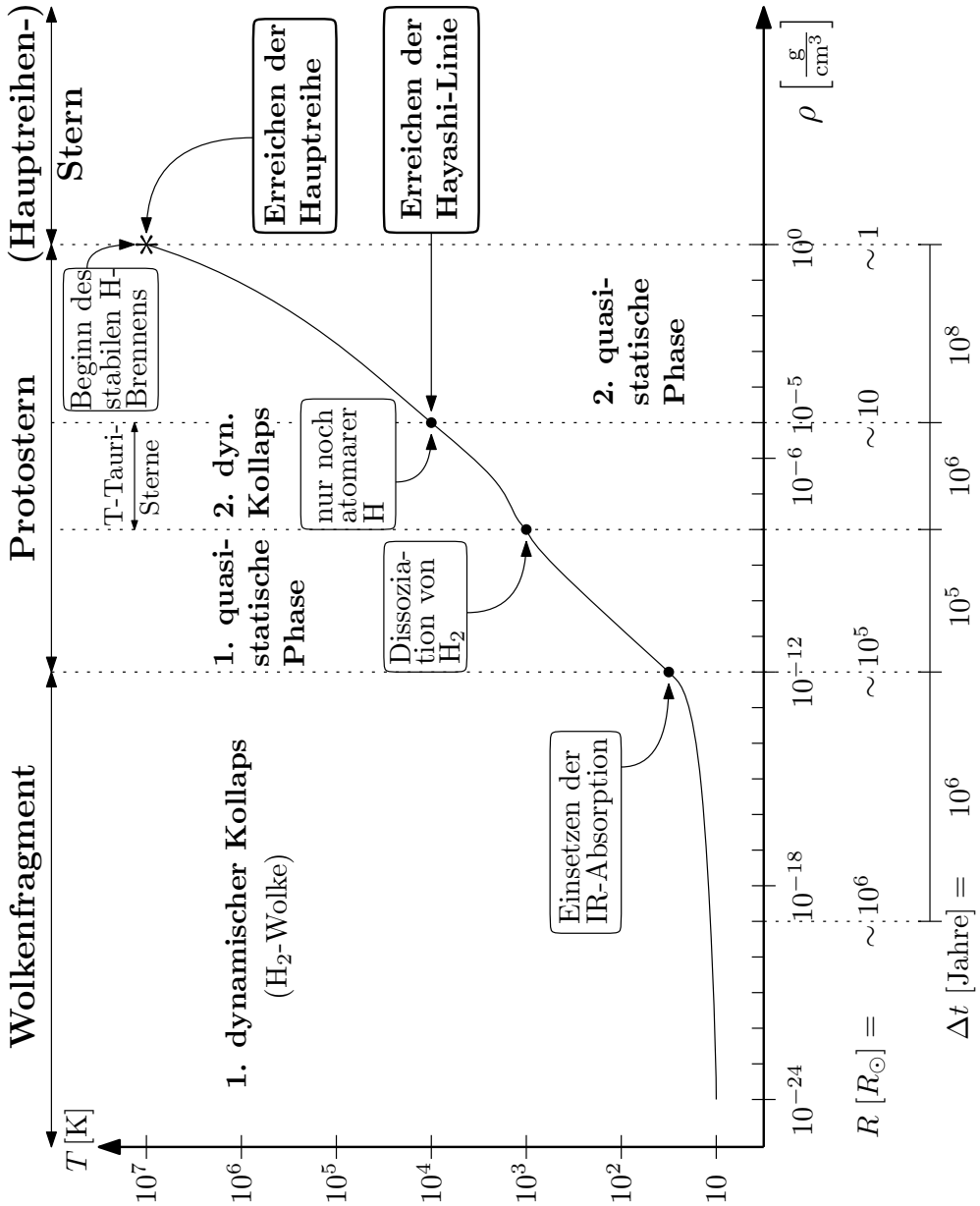

Abbildung 2.1: Die **Entwicklung eines Protosterns** vom Wolkenfragment zum (Hauptreihen-) Stern mit $M_* \approx 1 M_\odot$.

3 Aufbau eines Sterns

3.1 Grundgleichungen des Sternaufbaus

Vorläufige Vereinfachungen: Vernachlässigung von

- Rotation (→ Drehimpuls)
- Schwingungen (→ Astroseismologie)
- Gezeitenkräfte (→ Begleiter, Planeten)
- Magnetfelder (→ Aktivität)
- Massenänderung (→ Sternwind, Akkretion)

⇒ Demnach verbleibt eine sphärisch-symmetrische Gaskugel unter Einfluss ihrer (Selbst-) Gravitation

Überlegung: Für lange Zeit ist ein Stern (scheinbar, d.h. äußerlich) unverändert, also in stabilem Gleichgewicht. Die hydrodynamische Beschreibung geht dann in eine **hydrostatische Beschreibung** über, bei dem die (Selbst-) Gravitation durch den (thermischen und Strahlungs-) Druck im Stern exakt kompensiert wird.

Dann gilt:

$$\vec{F}_G = -\vec{F}_p \underset{\text{sym.}}{\overset{\text{sph.}}{\Longleftrightarrow}} -\frac{GM_r\rho}{r^2} = +\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} \; ; \quad \text{mit } \rho = \rho(r) \text{ und } M_r = M_r(r) = \int_0^r 4\pi\rho r^2 \,\mathrm{d}r$$

und damit

(I) $\boxed{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -\frac{GM_r\rho}{r^2}}$ **Hydrostatische Gleichung** (≙ Kräftegleichgewicht, Impulserhaltung)

(II) $\boxed{\frac{\mathrm{d}M_r}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2\rho}$ **Kontinuitätsgleichung** (≙ Massenerhaltung)

Offenbar ist die Lösung dieses DGL-Systems noch unterbestimmt, da wir nur zwei Gleichungen für die drei Unbekannten $P(r)$, $M_r(r)$ und $\rho(r)$ haben.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, das Gleichungssystem zu schließen:

(A) $P = K\rho^\gamma$, $K = const.$ ≙ Mechanisches Gleichgewicht $\begin{cases} \gamma = 1\colon \text{isotherm} \\ \gamma \text{ allgemein: polytrop} \end{cases}$

(B) $P = \frac{\rho kT}{\bar{\mu} m_H} + \frac{a}{3}T^4$ ≙ Thermisches Gleichgewicht $\begin{cases} \text{Strahlungsgleichgewicht} \\ \text{konvektives Gleichgewicht} \end{cases}$

(A) schließt das System, (B) hingegen erfordert eine weitere Gleichung für die Temperatur. Sie kann über eine Energie(transport)-Gleichung berechnet werden. Man unterscheidet den Energietransport durch **Strahlung** oder **Konvektion**:

- **Energietransport durch Strahlung**

Summiert über alle Raumwinkel gilt für den Energiefluss $\vec{F}_E$ bei vorhandenen Energiequellen Q und Senken S:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_E = Q + S = \varepsilon_N \rho$$

mit:

$\vec{F}_E = \phi_S \vec{e}_r$; ϕ_S = Gesamtstrahlungsstrom $\left(\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m^2 s}}\right)$

$Q = 4\pi\varepsilon$; ε = emittierte Strahlungsenergie pro Volumen- und Zeiteinheit $\left(\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m^3 s}}\right)$

$S = -c\bar{k}U$; S = absorbierte Strahlungsenergie pro Volumen- und Zeiteinheit $\left(\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m^3 s}}\right)$,
c = Lichtgeschwindigkeit, $\bar{k}$ = Opazitätskoeffizient $\left(\frac{1}{\mathrm{m}}\right)$
U = Gesamtstrahlungsdichte $\left(\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m^3}}\right)$

$$\varepsilon_N = \varepsilon_{Fusion} + \varepsilon_{Kontraktion} = \text{ Nettoenergieerzeugung } \left(\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,s}}\right)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_N \rho = \text{ Nettoemission } \left(\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m^3 s}}\right)$$

Also gilt kurz:

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \phi_s\right) = \varepsilon_N \rho} \quad \textbf{Energiegewinn im Sterninneren}$$

Sei L die **Leuchtkraft** eines Sterns, d.h. die gesamte pro Zeiteinheit abgestrahlte Energie, dann gilt:

$$L = \int\limits_{\substack{\text{Stern-}\\ \text{ober-}\\ \text{fläche}}} \vec{F}_E \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 4\pi R_*^2 \phi_S \qquad \left(\text{mit } \vec{F}_E = \phi_S \vec{e}_r \text{ und } \mathrm{d}\vec{A} = R_*^2\, \mathrm{d}\Omega\, \vec{e}_r\right)$$

Für alle anderen $r < R_*$ gilt analog:

$$L_r = 4\pi r^2 \phi_S \qquad \Rightarrow \qquad \text{(III)} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}L_r}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2 \rho \varepsilon_N} \quad \textbf{Energieerhaltung}$$

Die Temperatur T ist implizit über $\varepsilon_N = \varepsilon_N(T)$ in dieser Gleichung enthalten, sodass eine weitere Gleichung benötigt wird. Im thermodynamischen Gleichgewicht gilt im Falle eines „schwarzen Körpers" ($\hat{=}$ „Hohlraumstrahler"):

$$\phi_S = -k_S \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \; ; \quad k_S = \frac{4caT^3}{3\bar{k}}$$

$$\Rightarrow \quad \text{(IV a)} \quad \boxed{\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right)_S = -\frac{\phi_S}{k_S} = -\frac{L_r}{4\pi r^2}\frac{3\bar{k}}{4caT^3} = -\frac{3\bar{k}}{16\pi caT^3}\frac{L_r}{r^2}} \quad \textbf{Energietransport durch Strahlung}$$

Bemerkung: Gelegentlich wird auch der Massenabsorptionskoeffizient $k' = \frac{\bar{k}}{\rho}$ verwendet.

Bemerkung: Wärmeleitung ist vernachlässigbar, denn:

$$\left.\begin{aligned} l_{proton} &\approx \frac{1}{\sqrt{2}\, r\, n} \approx 3 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m} \\ l_{photon} &\approx 1/\bar{k} \approx 10^{-4}\,\mathrm{m} \end{aligned}\right\} \text{„}\textbf{mittlere freie Weglänge}\text{"}$$

$\Rightarrow l_{photon} \gg l_{proton}$

$\Rightarrow$ Wärmeleitung (also Energietransport durch Stöße) ineffektiv (solange kein „entartetes" Gas – wie bei sogenannten Weißen Zwergen – im Sterninneren vorliegt)

- **Energietransport durch Konvektion**

Idee: Flüssigkeitsvolumen ist wärmer als seine Umgebung ⇒ Auftrieb
⇒ Strömung ≙ thermische Konvektion

$$\left|\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right|_{adiab} \approx \left|\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right|_{E} < \left|\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right|_{U} = \left|\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right|_{Str.}$$

E: Wärmeres Flüssigkeitselement
U: Umgebung im Strahlungsgleichgewicht

Wenn Abstrahlung bei Abkühlung des Elements vernachlässigbar

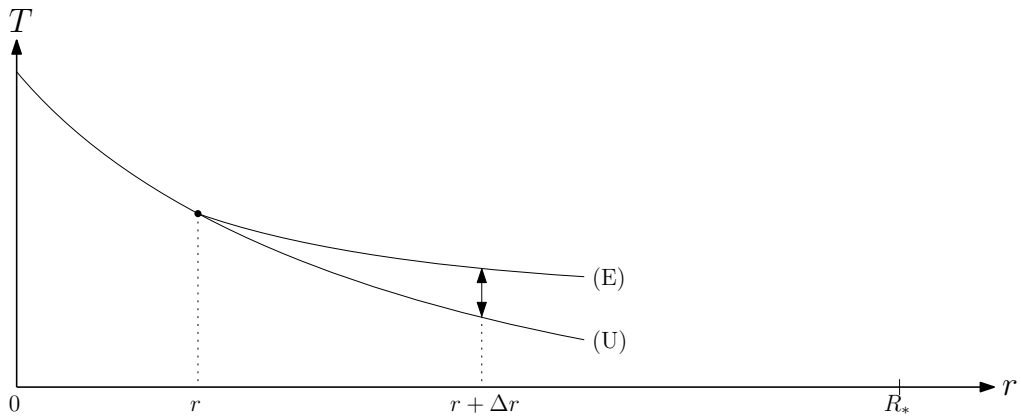

Abbildung 3.1: Temperaturdifferenz zwischen einem aufsteigenden Flüssigkeitsvolumen und dessen Umgebung.

Für die mit ΔT verbundene Wärmemenge (pro Volumenelement) gilt:

$$c_P = \left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}\right)_{P=const.} \Rightarrow \Delta Q = c_P \cdot \Delta T$$

Näherungen: $\Delta T = \left\{\left|\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right|_U - \left|\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right|_E\right\} \Delta r; \quad \Delta r \approx \frac{l}{2};$

l ≙ Mischungsweg ≈̂ mittlerer Durchmesser der Turbulenzelemente (≈ einige 100 km)

Dann gilt für den **konvektiven Wärmestrom** ($\bar{u}_{konv}$: einige km/s):

$$\boxed{\phi_K = \Delta Q \cdot \bar{u}_{konv} = c_P \cdot \Delta T \cdot \bar{u}_{konv} = \frac{l}{2} c_P \bar{u}_{konv} \left\{\left|\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right|_U - \left|\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right|_E\right\}}$$

Also:
Energietransport durch Konvektion, wenn:

$$\left|\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right|_{Str.} > \left|\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right|_{adiab}$$

Benutze dann als Temperaturgradient:

(IV b) $$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right)_{konv} = \left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right)_{adiab} = \left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}P}\right)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{T}{P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}}$$ **Energietransport durch Konvektion**

Die Grundgleichungen des Sternaufbaus lauten also:

$$\text{(I)}\quad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -\frac{GM_r\rho}{r^2} \qquad \text{(Impulserhaltung)}$$

$$\text{(II)}\quad \frac{\mathrm{d}M_r}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2\rho \qquad \text{(Massenerhaltung)}$$

$$\text{(III)}\quad \frac{\mathrm{d}L_r}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2\rho\varepsilon_N(T,P) \qquad \text{(Energieerhaltung)}$$

$$\text{(IV)}\quad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = \begin{cases} -\dfrac{3\bar{k}}{16\pi caT^3}\dfrac{L_r}{r^2} & , \left|\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right|_{Str.} < \left|\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right|_{adiab} \\ \left(1-\dfrac{1}{\gamma}\right)\dfrac{T}{P}\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} & , \left|\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right|_{Str.} > \left|\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right|_{adiab} \end{cases} \qquad \text{(Energietransport)}$$

$$\text{(V)}\quad P = \begin{cases} \dfrac{\rho kT}{\bar{\mu}m_H} + \dfrac{a}{3}T^4 \\ K\rho^\gamma \end{cases} \qquad \text{(Zustandsgleichung)}$$

Die Lösung von (I), (II), (III), (IV) und (V a) sind die Funktionen

$P(r)$, $M_r(r)$, $\rho(r)$, $L_r(r)$, $T(r)$

für gegebene chemische Zusammensetzung ($\Rightarrow \bar{\mu}$) und bekannte Energieerzeugung $\varepsilon_N(T,P)$ und Opazitätskoeffizienten $\bar{k}(T,P)$.

Bemerkung: Polytrope Modelle sind bereits durch (I), (II) und (V b) vollständig beschrieben und liefern $P(r)$, $M_r(r)$ und $\rho(r)$.

3.2 Einfache Folgerungen aus den Grundgleichungen

3.2.1 Zustand eines Sterns im Zentralbereich

Nach Grundgleichung (I) gilt:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -\frac{GM_r\rho}{r^2} \qquad \Big|\int_0^{R_*} \ldots \mathrm{d}r$$

$$\Rightarrow P(R_*) - P(0) \underset{\substack{P(R_*)=0 \\ P(0)=P_0}}{=} -P_0 = -G\int_0^{R_*}\frac{M_r\rho}{r^2}\,\mathrm{d}r \underset{\text{(II)}\Rightarrow \frac{\mathrm{d}M_r}{4\pi r^2\rho}=\mathrm{d}r}{=} -G\int_0^{M_*}\frac{M_r}{4\pi r^4}\,\mathrm{d}M_r \underset{r=\frac{R_*}{2}}{\approx} -\frac{G}{4\pi}\frac{16}{R_*^4}\frac{M_*^2}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_0 \approx \frac{2GM_*^2}{\pi R_*^4}} \quad \textbf{Druck im Sternzentrum}$$

Daraus folgt sofort:

$$P_0 = \frac{\rho_0}{\bar{\mu}m_H}kT_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_0 = \frac{\bar{\mu}m_H}{k}\frac{P_0}{\rho_0}} \quad \textbf{Temperatur im Sternzentrum}$$

Für die **Sonne** findet man:

$$P_{0,\odot} \approx 10^{15}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3} = 10^{15}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = 10^{15}\,\mathrm{Pa} \qquad \left(\begin{array}{l}\textit{Zum Vergleich:}\ \text{Druck an}\\ \text{Erdoberfläche: } \sim 10^5\,\mathrm{Pa}\end{array}\right)$$

$$T_{0,\odot} \underset{\boxed{\rho_0 = x\bar{\rho}_*}}{\approx} \frac{1}{x}\,10^8\,\mathrm{K} \underset{\boxed{x \approx 10}}{\approx} 10^7\,\mathrm{K}$$

Bemerkung: In dieser Rechnung ist der Strahlungsdruck P_S (siehe Grundgleichung (V a)) vernachlässigt. Das ist a posteriori als zulässig erkennbar, denn:

$$P_{S,0,\odot} = \frac{a}{3}T_{0,\odot}^4 \underset{\boxed{a = 7{,}6\cdot 10^{-16}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3\,\mathrm{K}^4}}}{\approx} 2{,}5\cdot 10^{12}\,\mathrm{Pa} \ll P_{0,\odot}$$

Erst für $M_* \gtrsim 4\,M_\odot$ ist $P_{S,0} \gtrsim 0{,}2\,P_\odot$ und damit nicht mehr vernachlässigbar.

Bemerkung: Genauere Rechnungen liefern die Werte

$$P_{0,\odot} \approx 10^{15}\,\mathrm{Pa}; \quad P_{S,0,\odot} \lesssim 0{,}03\,P_{0,\odot}; \quad T_{0,\odot} \approx 1{,}6\cdot 10^7\,\mathrm{K}; \quad \rho_{0,\odot} = 76\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$$

3.2.2 Schwingungszeitskala

Für die **Freifallzeitskala** (oder auch dynamische Zeitskala) τ_F folgt aus

$$\rho\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{GM_r\rho}{r^2} \quad \underset{\text{Werte}}{\overset{\text{char.}}{\Longrightarrow}} \quad \frac{R_*}{\tau_F^2} = \frac{GM_*}{R_*^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_F = \sqrt{\frac{R_*^3}{GM_*}} = \sqrt{\frac{3}{4\pi G\bar{\rho}_*}}}$$

Für die **Sonne** $\left(\bar{\rho}_\odot \approx 1{,}4\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\right)$ gilt: $\tau_F \approx 1{,}4\cdot 10^3\,\mathrm{s} \approx 23\,\mathrm{min}$

Für die **Schallzeitskala** gilt:

$$\boxed{\tau_S = \frac{R_*}{c_S} = \sqrt{\frac{\bar{\mu}m_H}{kT}}R_*} \qquad (c_S\text{: Schallgeschwindigkeit})$$

Für die **Sonne** $\left(\bar{T}_\odot \approx 10^6\,\mathrm{K},\ R_\odot = 7\cdot 10^8\,\mathrm{m}\right)$ gilt: $\tau_S \approx 7\cdot 10^3\,\mathrm{s} \approx 5\cdot\tau_F$

Also: Da τ_F und τ_S in etwa gleich, ist die **Schwingungszeitskala** der Sonne in der gleichen Größenordnung:

$$\boxed{\tau_{Schwingung} = 1 - 2\ \text{Stunden}}$$

Bemerkung: Die vor allem beobachtete **5-Minuten-Oszillationen** sind demnach Oberschwingungen des Sonnenkörpers.

Bemerkung: Die Sonne schwingt nicht als Ganzes, sondern stets lokal. Schwingungen, die den Radius eines Sterns signifikant ändern, heißen **Pulsationen** und die zugehörigen Sterne treten z.B. als **Pulsationsveränderliche** in Erscheinung.

3.2.3 Kontraktionszeitskala ≙ Helmholtz-Kelvin-Zeitskala

Nach dem Virialsatz (vgl. 2.2) gilt:

$$-E_{pot} = 2E_{th} \Leftrightarrow E_{th} = -\frac{E_{pot}}{2}$$

Es wird also (im zeitlichen Mittel) die Hälfte der bei quasistatischer Kontraktion gewonnene potentielle Energie in thermische Energie umgewandelt – die andere Hälfte wird abgestrahlt:

$$E_S = -\frac{E_{pot}}{2} \underset{\boxed{E_{pot} = -\frac{3}{5}G\frac{M_*^2}{R_*}}}{=} \frac{3}{10}G\frac{M_*^2}{R_*}$$

Bei bekannter Leuchtkraft L_* eines Sterns ergibt sich eine (maximale) **Kontraktionszeitskala** τ_{HK} aus

$$\boxed{\tau_{HK} \approx \frac{E_S}{L_*}}$$

Für die **Sonne** $\left(M_\odot = 2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg},\ R_\odot = 7 \cdot 10^8\,\mathrm{m}\ \Rightarrow E_{S,\odot} \approx 10^{41}\,\mathrm{J},\ L_\odot = 4 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}\right)$ findet man $\tau_{HK} \approx 10^7$ Jahre.

Das ist sehr viel kürzer als das nachgewiesene Mindestalter der Sonne $\tau_\odot \approx 4{,}5 \cdot 10^9$ Jahre.

Alternative? — Kernfusion (s.u.)!

3.2.4 Masse-Leuchtkraft-Beziehung

Annahme: Strahlungsgleichgewicht, dann gilt:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{3\bar{k}}{16\pi caT^3}\frac{L_r}{r^2} \quad \text{(IV a)}$$

Näherungsweise gilt: mit $\rho \approx \frac{M_*}{\frac{4\pi}{3}R_*^3}$ weiterhin

$$L_* \approx \frac{T}{R_*}\frac{16\pi caT^3 4\pi R_*^3}{3k' M_* 3}R_*^2 \sim \frac{T^4 R_*^4}{M_*}$$

Mit

$$P = \frac{\rho kT}{\bar{\mu} m_H} \quad \Rightarrow \quad T \sim \frac{P}{\rho}$$

und (siehe 3.2.1)

$$P \sim \frac{M_*^2}{R_*^4} \quad \Rightarrow \quad T \sim \frac{M_*^2}{R_*^4} \cdot \frac{R_*^3}{M_*} \sim \frac{M_*}{R_*}$$

ergibt sich also:

$$\boxed{L_* \sim M_*^3}$$ **Masse-Leuchtkraft-Beziehung**

Bemerkung: Die M-L-Beziehung ist gültig für chemisch homogene Sterne im Strahlungsgleichgewicht.

Bemerkung: Die M-L-Beziehung wird tatsächlich in grober Näherung für Hauptreihensterne beobachtet:

$$L_* \sim M_*^{3^{-0,5}_{+1,0}}$$

3.2.5 Eddington-Limit

Wenn die **Strahlungsbeschleunigung** g_S vergleichbar zur **Gravitationsbeschleunigung** g_G wird, d.h.

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}P_S}{\mathrm{d}r} = g_S = \frac{\bar{k}\phi_S}{\rho c} = \frac{k'}{c}\frac{L_*}{4\pi R_*^2} \overset{!}{\approx} \frac{GM_*}{R_*^2} = g_G$$

gilt, ist die Stabilitätsgrenze eines Sterns erreicht. Dann:

$$\Rightarrow \quad \boxed{L_* = \frac{4\pi G c}{k'} M_* \equiv L_E} \quad \textbf{Eddington-Leuchtkraft}$$

Für $L_* > L_E$ ist der Stern nicht mehr stabil.

Bemerkung: In solaren Einheiten findet man:

$$\frac{L_E}{L_\odot} = 4 \cdot 10^4 \frac{M_*}{M_\odot}$$

Die Leuchtkraft der Sonne $L_\odot$ ist also weitaus geringer als das Eddington-Limit.

Bemerkung: Die Leuchtkraft der hellsten Sterne liegt bei etwa $10^6 L_\odot$. Unter der Annahme, dass sie gerade unterhalb von L_E liegen, ergibt sich als obere Grenze für Sternmassen etwa $\sim 100 M_\odot$, also erneut die bereits angesprochene Größenordnung.

3.3 Energieerzeugung im Sterninneren

Die Energieproduktion in Sternen ist ein schönes Beispiel für die frühzeitige Verzahnung von Astrophysik und Elementarteilchen- bzw. Quantenphysik. In den letzten Jahren hat sich der Begriff **Astroteilchenphysik** durchgesetzt.

3.3.1 Der Weg zum Konzept der Kernfusion

1854: Helmholtz schlägt vor, dass Meteoriteneinfall auf die Sonne deren Strahlung über die 'beobachtete' lange Zeit ermöglichen könnte.

1861/63: Kelvin widerlegt diese Theorie und weist darauf hin, dass auch keine andere, bisher vorgeschlagene Theorie das Problem der Energieerzeugung lösen kann.

1915: Harkins & Wilson schlagen erstmals als Prozess eine „Transmutation" von Elementen in der Sonne vor (ebenso 1920: Eddington und Perrin).

1925: Payne findet erste Evidenz für die Häufigkeit von Wasserstoff und Helium in der Sonnenatmosphäre (bis dahin: Sterne haben erdähnliche chemische Zusammensetzung).

1928: Gamow und Condon & Gurney entdecken und beschreiben den Tunneleffekt am Beispiel des (nuklearen) α-Zerfalls bzw. des umgekehrten Vorgangs.

1929: Russel stellt die Hinweise für die Dominanz von Wasserstoff auf (und in) der Sonne zusammen. Atkinson & Houtermans nehmen an, dass auch Protonen in einen Atomkern eindringen können, wenn das den schweren α-Teilchen schon gelingt: erster Vorschlag der Fusion von Wasserstoff zu Helium.

1932: Eddingtons und Strömgrens Untersuchungen lassen wenig Zweifel übrig, dass die Sonne überwiegend aus Wasserstoff besteht.

1938: Bethe findet – zusammen mit Critchfield – den Proton-Proton-Zyklus.

1939: Bethe und Weizsäcker finden (unabhängig voneinander) den Kohlenstoff-Stickstoff-Sauerstoff-Zyklus.

3.3.2 Pinzipielle Atomkernstruktur, Tunneleffekt

Atomkern $\hat{=}$ Protonen und Neutronen, die der elektromagnetischen und der starken Wechselwirkung unterliegen. Letztere ist stärker als erstere und hält den Kern zusammen.

Das zugehörige **Potential** hat die **prinzipielle Form**:

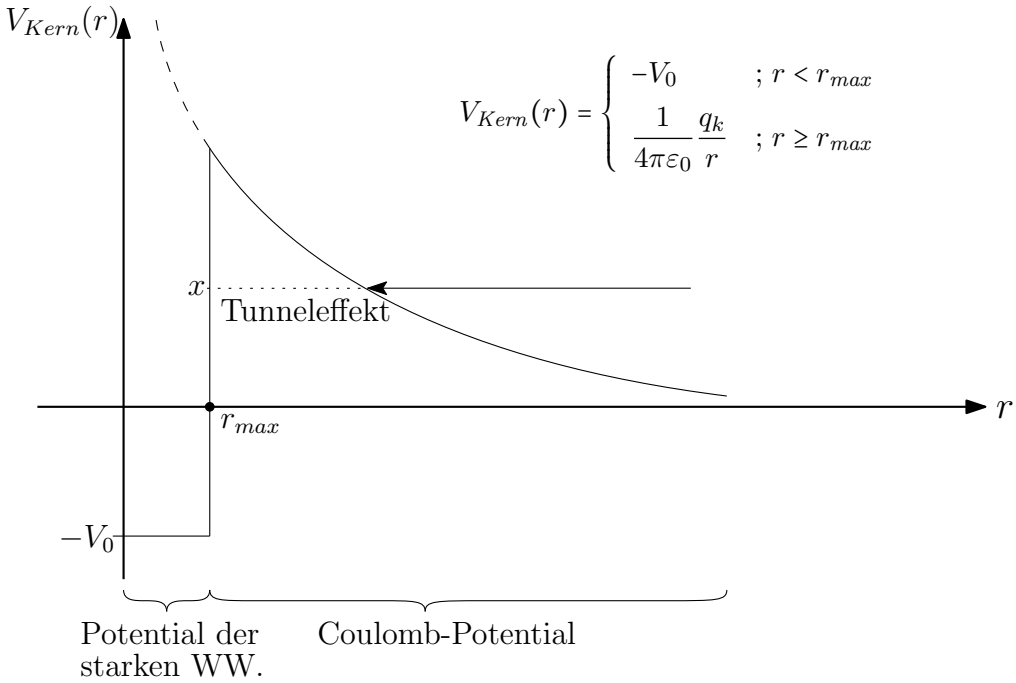

Abbildung 3.2: Prinzipielle Form des Atomkern-Potentials.

Für die potentielle Energie eines Protons (mit Ladung $+e$) in diesem Potential gilt:

$$E_{pot,p}(r) = V_{Kern}(r) \cdot e$$

Insbesondere gilt für $r = r_{max}$

$$E_{pot,p}(r_{max}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_k \cdot e}{r_{max}} \underset{\boxed{\substack{q_k = e \\ r_{max} = 1{,}1 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}}}}{\approx} 2{,}5 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{J} \approx 1{,}5\,\mathrm{MeV}$$

Diese Energie ist zu vergleichen mit der mittleren kinetischen Protonenenergie $E_{kin} = \frac{3}{2}kT$.

In Anwendung auf den Zentralbereich der Sonne findet man:

$$E_{kin} = \frac{3}{2}kT_{0,\odot} \underset{\boxed{T_{0,\odot} = 10^7\,\mathrm{K}}}{\approx} 1{,}5 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{J} \approx 1000\,\mathrm{eV} = 1\,\mathrm{keV}$$

Es ist also (trotz Maxwellverteilung) für Protonen klassisch praktisch unmöglich in den Kern zu gelangen. Die Quantenmechanik lässt aber den Prozess zu; man spricht von **Tunneleffekt** (vom „Durchtunneln" der Potentialbarriere).

3.3.3 Nukleare Zeitskala $\hat{\approx}$ Lebensdauer der Sonne

Masse eines H-Atoms:	$1{,}0075\,m_u$
Masse von 4 H-Atomen:	$4{,}0300\,m_u$
Masse eines He-Atoms:	$4{,}0013\,m_u$

(mit atomarer Masseneinheit $m_u \approx 1{,}661 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} = \frac{1}{12}m_{^{12}\mathrm{C}}$)

Bei der Fusion von 4 H-Kernen zu einem He-Kern kommt es also zu einem „Massendefekt" $\Delta m = 0{,}0287\,m_u$. Damit ist ein Gewinn von (Bindungs-) Energie von

$$\Delta E = \Delta m c^2 \approx 27\,\mathrm{MeV}$$

pro 4H → He verbunden.

Dann gilt:

$$M_\odot = 2 \cdot 10^{30}\,\text{kg} \mathrel{\hat{=}} 10^{57}\ \text{H-Atome}$$

⇒ max. Produktion von $2{,}5 \cdot 10^{56}$ He-Atomen, also $(\Delta E)_{ges} \approx 10^{45}$ J.

Bei einer Leuchtkraft $L_\odot = 3{,}86 \cdot 10^{26}\,\frac{\text{J}}{\text{s}}$ folgt:

$$\boxed{\tau_{\odot,max} = \frac{(\Delta E)_{ges}}{L_\odot} \approx 3 \cdot 10^{18}\,\text{s} \approx 10^{11}\ \text{Jahre}}$$

Bei einem geschätzten Alter von $4{,}5 \cdot 10^9$ Jahren hat die Sonne also bisher etwa 5% ihres Wasserstoffvorrats verbraucht.

Bemerkung: Obige Betrachtung von Atommassen statt Atom**kern**massen ist erlaubt, da bei der Umwandlung von $4\,{}^1\text{H}$ in $1\,{}^4\text{He}$ auch 2 Elektronen zerstrahlen:

$$4\,{}^1\text{H} + 2\text{e}^- \rightarrow {}^4\text{He} \qquad \text{(tatsächlicher Prozess, s.u.)}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{4\,{}^1\text{H} + 4\text{e}^-}_{\text{4 H-Atome}} \rightarrow \underbrace{{}^4\text{He} + 2\text{e}^-}_{\text{1 He-Atom}} \ \text{(Bilanz in Atomen)}$$

3.3.4 Fusionsprozesse

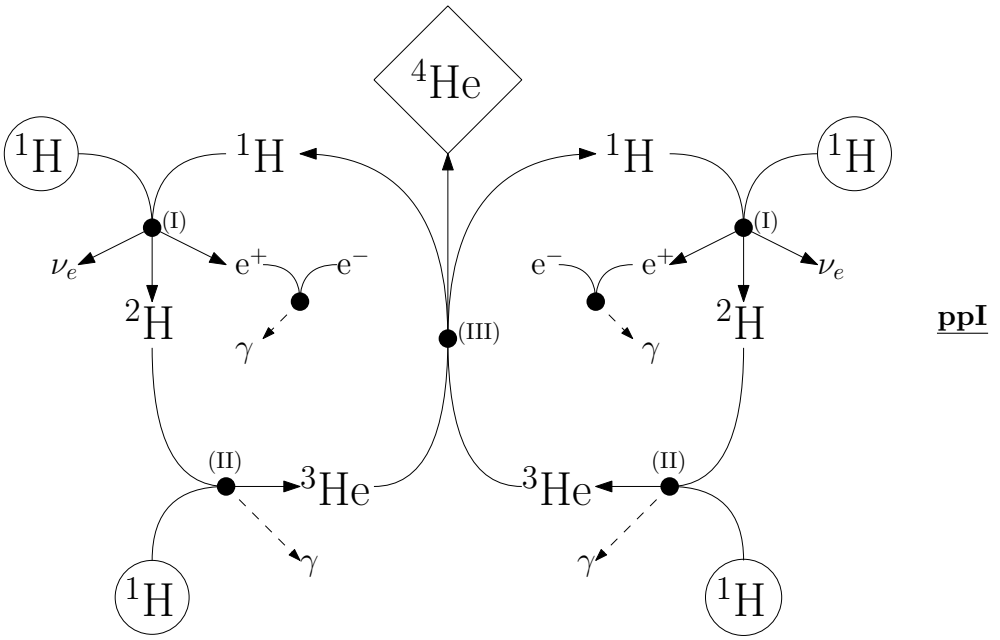

Abbildung 3.3: Veranschaulichung des ppI-Zweiges des Proton-Proton-Zyklus (≙ Bethe-Critchfield-Zyklus).

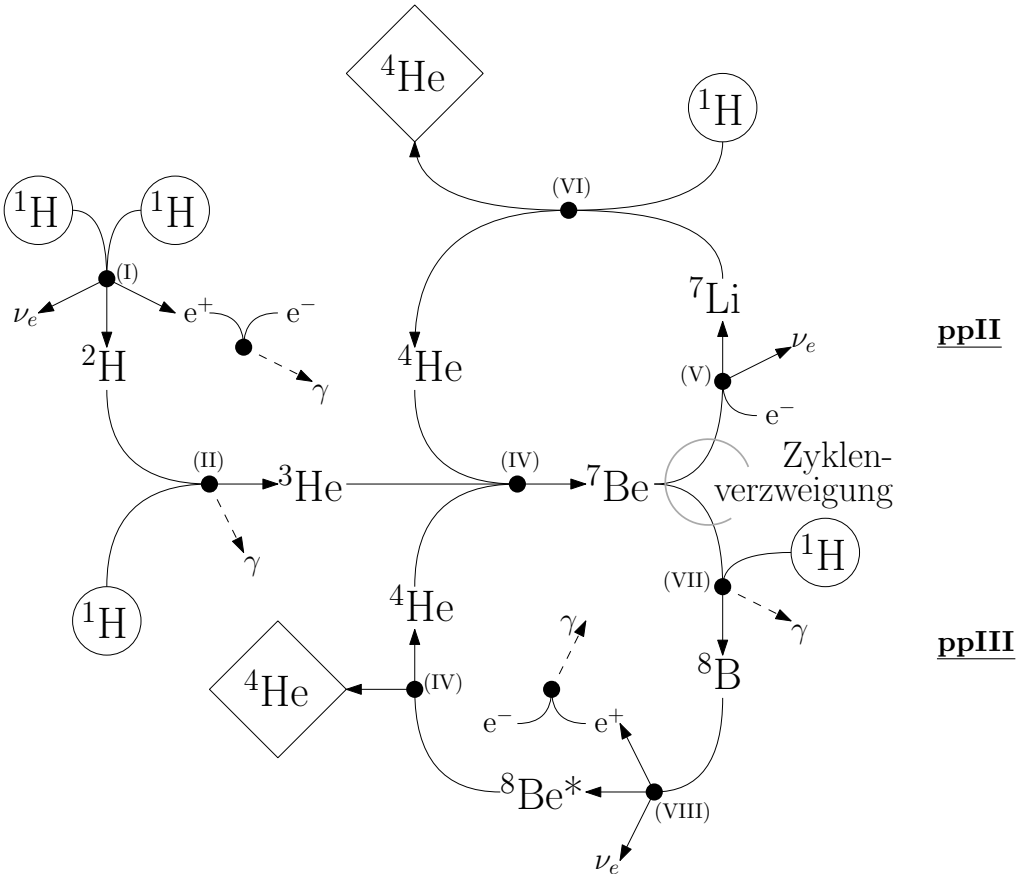

Abbildung 3.4: Veranschaulichung des ppII- und ppIII-Zweiges des Proton-Proton-Zyklus (≙ Bethe-Critchfield-Zyklus).

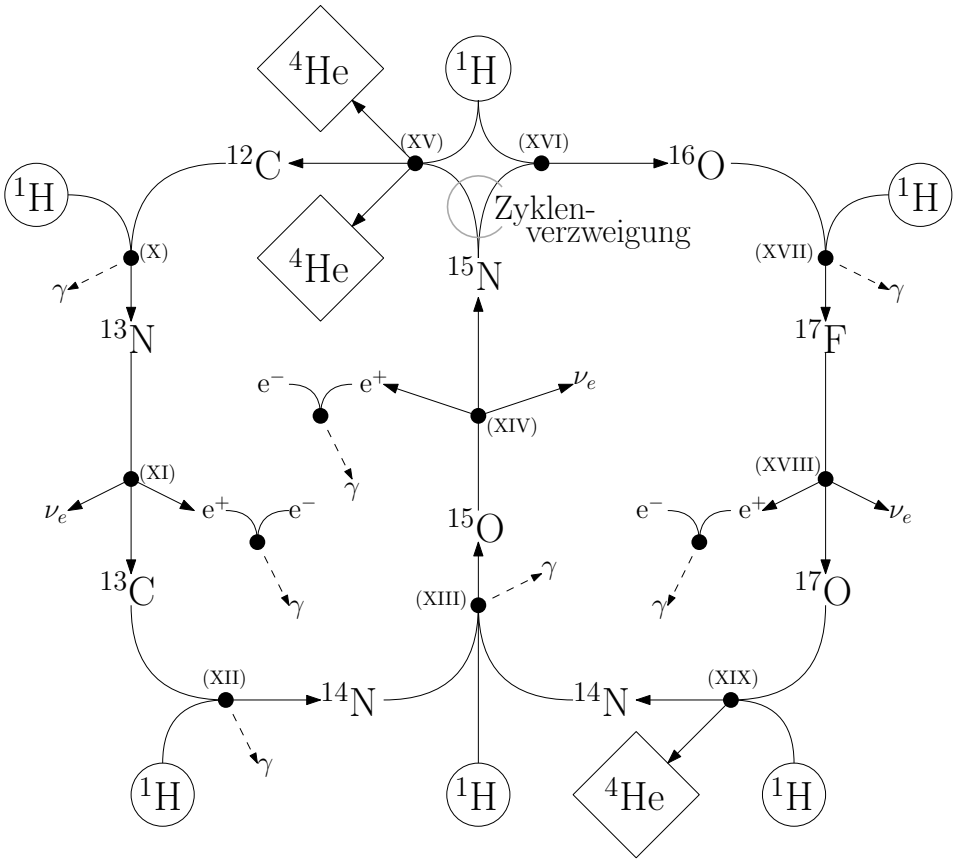

Abbildung 3.5: Veranschaulichung des CNO-Zyklus (≙ Bethe-Weizsäcker-Zyklus).

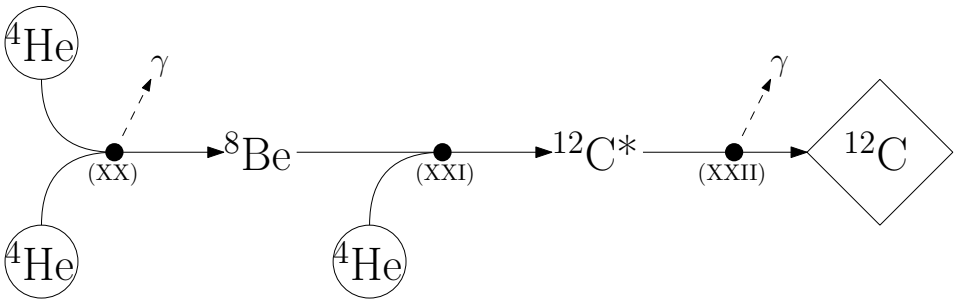

Abbildung 3.6: Veranschaulichung des 3α-Prozesses.

Bemerkung: In den obigen Schemata bezeichnen die bei den • stehenden römischen Zahlen den Prozess gemäß der nachfolgenden Tabelle.

Bemerkung: Wenn hinreichend viel ^{12}C produziert ist, führt $^{12}\mathrm{C} + {}^4\mathrm{He} \rightarrow {}^{16}\mathrm{O}$ zu Sauerstoffbildung.

Bez.	Reaktion ($A+B \to C+...$)	Verfügbare Energie Q_{AB}[MeV]	ν-Energie [MeV]	Mittlere Reaktionsdauer	Temp. [K]	Zyklus Prozess
(I)	${}^1\mathrm{H} + {}^1\mathrm{H} \to {}^2\mathrm{H} + \mathrm{e}^+ + \nu_e$	0,16	0,26	$14 \cdot 10^9$ a		pp
(II)	${}^2\mathrm{H} + {}^1\mathrm{H} \to {}^3\mathrm{He} + \gamma$	5,49		6 s		pp
(III)	${}^3\mathrm{He} + {}^3\mathrm{He} \to {}^4\mathrm{He} + {}^1\mathrm{H} + {}^1\mathrm{H}$	12,86		10^6 a		ppI
(IV)	${}^3\mathrm{He} + {}^4\mathrm{He} \to {}^7\mathrm{Be} + \gamma$	1,59			$> 14 \cdot 10^6$	ppII
(V)	${}^7\mathrm{Be} + \mathrm{e}^- \to {}^7\mathrm{Li} + \nu_e$	0,06	0,80		$> 14 \cdot 10^6$	ppII
(VI)	${}^7\mathrm{Li} + {}^1\mathrm{H} \to {}^4\mathrm{He} + {}^4\mathrm{He}$	17,35			$> 14 \cdot 10^6$	ppII
(VII)	${}^7\mathrm{Be} + {}^1\mathrm{H} \to {}^8\mathrm{B} + \gamma$	0,13			$> 23 \cdot 10^6$	ppIII
(VIII)	${}^8\mathrm{B} \to {}^8\mathrm{Be}^* + \mathrm{e}^+ + \nu_e$	10,78	7,20		$> 23 \cdot 10^6$	ppIII
(IX)	${}^8\mathrm{Be}^* \to {}^4\mathrm{He} + {}^4\mathrm{He}$	0,095			$> 23 \cdot 10^6$	ppIII
(X)	${}^{12}\mathrm{C} + {}^1\mathrm{H} \to {}^{13}\mathrm{N} + \gamma$	1,94		$1{,}3 \cdot 10^7$ a		CNO
(XI)	${}^{13}\mathrm{N} \to {}^{13}\mathrm{C} + \mathrm{e}^+ + \nu_e$	1,51	0,71	7 min		CNO
(XII)	${}^{13}\mathrm{C} + {}^1\mathrm{H} \to {}^{14}\mathrm{N} + \gamma$	7,55		$2{,}7 \cdot 10^6$ a		CNO
(XIII)	${}^{14}\mathrm{N} + {}^1\mathrm{H} \to {}^{15}\mathrm{O} + \gamma$	7,29		$3{,}2 \cdot 10^8$ a	$> 10 \cdot 10^6$	CNO
(XIV)	${}^{15}\mathrm{O} \to {}^{15}\mathrm{N} + \mathrm{e}^+ + \nu_e$	1,76	1,00	82 s	$> 10 \cdot 10^6$	CNO
(XV)	${}^{15}\mathrm{N} + {}^1\mathrm{H} \to {}^{12}\mathrm{C} + {}^4\mathrm{He}$	4,96		$1{,}1 \cdot 10^5$ a	$> 10 \cdot 10^6$	CNO
(XVI)	${}^{15}\mathrm{N} + {}^1\mathrm{H} \to {}^{16}\mathrm{O} + \gamma$	12,13			$> 17 \cdot 10^6$	CNO
(XVII)	${}^{16}\mathrm{O} + {}^1\mathrm{H} \to {}^{17}\mathrm{F} + \gamma$	0,60			$> 17 \cdot 10^6$	CNO
(XVIII)	${}^{17}\mathrm{F} \to {}^{17}\mathrm{O} + \mathrm{e}^+ + \nu_e$	0,80	0,94		$> 17 \cdot 10^6$	CNO
(XIX)	${}^{17}\mathrm{O} + {}^1\mathrm{H} \to {}^{14}\mathrm{N} + {}^4\mathrm{He}$	1,19			$> 17 \cdot 10^6$	CNO
(XX)	${}^4\mathrm{He} + {}^4\mathrm{He} \to {}^8\mathrm{Be} + \gamma$	−0,095			$> 100 \cdot 10^6$	3α
(XXI)	${}^8\mathrm{Be} + {}^4\mathrm{He} \to {}^{12}\mathrm{C}^* + \gamma$				$> 100 \cdot 10^6$	3α
(XXII)	${}^{12}\mathrm{Be}^* \to {}^{12}\mathrm{C} + \gamma$	7,37			$> 100 \cdot 10^6$	3α
	$\mathrm{e}^+ + \mathrm{e}^- \to \gamma$	1,02			—	P.-V.

Tabelle 3.2: Übersicht über Zyklen, Prozesse und Reaktionen.

Bemerkung: Verschiedene Isotope eines Elements sind in dieser Notation nicht unterschieden (z.B. in (VIII): ${}^8_5\mathrm{B} \to {}^8_4\mathrm{Be}^* + \mathrm{e}^+ + \nu_e$).

Reaktion (XX) ist endotherm (verbraucht also Energie) und ist die umgekehrte Reaktion (IX).

Bemerkung: Eine untere Grenze für die Dauer eines Zyklus ist natürlich durch die längste mittlere Reaktionsdauer gegeben; beim ppI-Zyklus also $14 \cdot 10^9$ Jahre. Dass der Prozess überhaupt im Innern der Sonne stattfindet, liegt an der hohen Dichte dort, die die Energieerzeugungsraten (siehe 3.3.5) mitbestimmen.

Bemerkung: Die Neutrinoenergie ist in der Bilanz vernachlässigbar, d.h. die freiwerdende Bindungsenergie ist fast gänzlich für die Abstrahlung verfügbar. Lediglich für Zyklus ppIII trägt das Neutrino eine signifikante Energie. Für die Sonne aber gilt für die relativen Häufigkeiten: $ppI : (ppII + ppIII) = 87 : 13$ und auch $ppII : ppIII = 13 : 0{,}015$, d.h. ppIII ist (zur Zeit) unbedeutend.

Bemerkung: Auch wenn die Neutrinos energetisch unbedeutend sind, ist ihr Nachweis ein wesentlicher Test für die Realität der postulierten (!) Zyklen bzw. Reaktionen. Die fast nicht mit Materie wechselwirkenden Elektron-Neutrinos ν_e werden tatsächlich beobachtet – der Fluss beträgt aber nur ca. $\frac{1}{3}$ des theoretisch erwarteten. Eine Lösung dieses **solaren**

Neutrinoproblems liegt in sogenannten **Neutrinooszillationen**, d.h. der Umwandlung von Elektronneutrinos (ν_e) in Myon- oder Tauneutrinos (ν_μ, ν_τ). Möglich ist dies bei nichtverschwindender Ruhemasse von Neutrinos, für die es seit einiger Zeit starke Hinweise gibt. (Die ν_τ können von den $\nu_e\nu_\mu$-Detektoren nicht gesehen werden.) Für den experimentellen Nachweis der Neutrinooszillationen wurde 2015 der Physik-Nobelpreis an T. Kajita und A. McDonald verliehen.

Die Fusion von Kernen ist bis zur Bildung von ^{56}Fe exotherm, d.h. Bindungsenergie wird frei. Die Verschmelzung schwererer Kerne verbraucht Energie, ist also energetisch ungünstig.

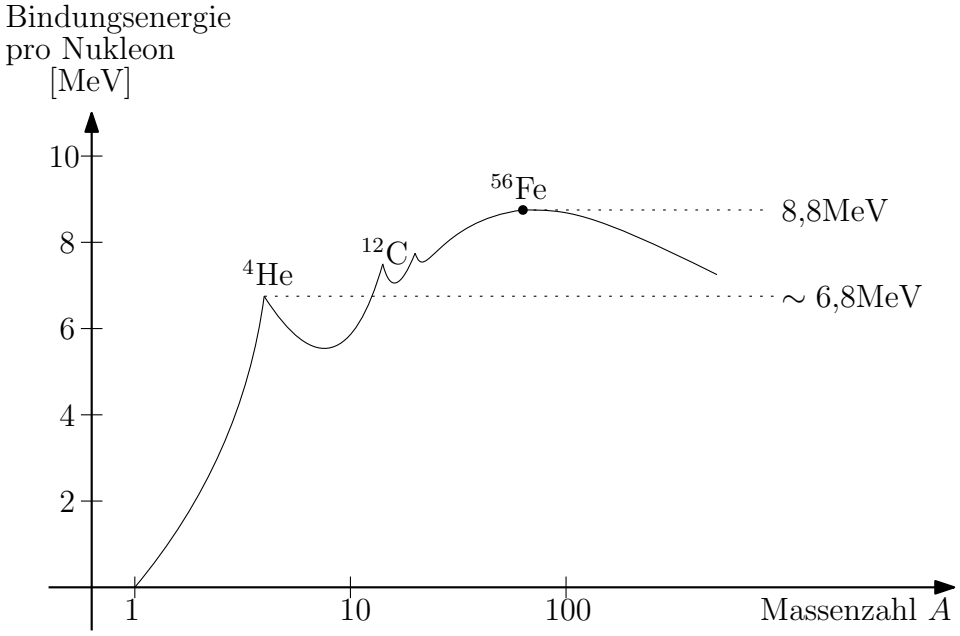

Abbildung 3.7: Bindungsenergie pro Nukleon über Massenzahl A

Die höchste Effizienz, also den höchsten Energiegewinn, liefert die Fusion von Wasserstoff zu Helium.

3.3.5 Energieerzeugungsraten (ε_{Fusion})

Allgemein gilt:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{Fusion} &= \frac{\text{verfügbare Energie}}{\text{Massen- und Zeiteinheit}} = \frac{\text{verfügbare Energie}}{\text{Volumen- und Zeiteinheit}} \times \frac{\text{Volumeneinheit}}{\text{Masseneinheit}} \\
&= \sum_{Reaktionen} \frac{\text{verfügbare Energie}}{\text{Reaktion}} \times \frac{\text{Reaktionen}}{\text{Volumen- und Zeiteinheit}} \times \frac{\text{Volumeneinheit}}{\text{Masseneinheit}} \\
&= \sum_{Reaktionen} Q_{AB} \cdot \Gamma_{AB} \cdot \frac{1}{\rho}
\end{aligned}$$

Für Q_{AB} siehe Tabelle; für Γ_{AB} gilt:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{AB} &= \frac{\text{Zahl der Stöße}}{\text{Volumen- und Zeiteinheit}} \times (\text{W'keit für Durchtunnelung}) \times \frac{\text{Fusions-W'keit}}{\text{Durchtunnelung}} \\
&\sim (X_A\,\rho)(X_B\,\rho) \cdot F_{AB}(T)\ ; \quad X_{A,B} \mathrel{\hat{=}} \text{ relat. Massenanteil von A bzw. B}
\end{aligned}$$

Mit der Definition von $F_{AB}(T) = T^\nu f_{AB}(T)$ folgt:

$$\boxed{\varepsilon_{Fusion} = \varepsilon_0 \, X_A \, X_B \, \rho \, T^\nu \, f_{AB}(T)} \quad \textbf{Energieerzeugungsrate}$$

Man findet für $T = (1 - 4) \cdot 10^7\,\mathrm{K}$:

- p-p-Zyklus: $\nu \approx (5 - 4)$
- CNO-Zyklus: $\nu \approx (23 - 14)$

Genauer:

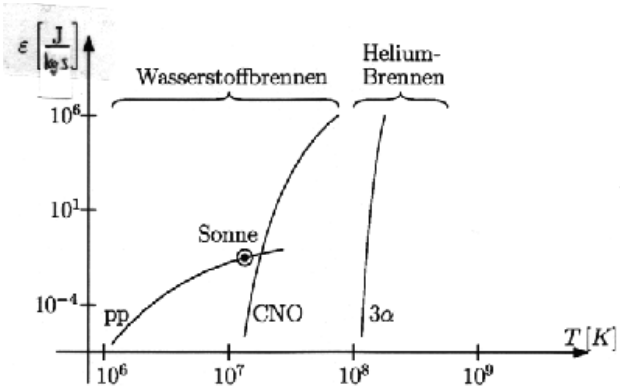

Abbildung 3.8: Energieerzeugungsrate über Temperatur für verschiedene Fusionsprozesse.

Bemerkung: Das System der Grundgleichungen (3.1) ist also hinsichtlich der T-Abhängigkeit von ε_N **hochgradig nichtlinear**.

3.4 Ein Standardmodell des Sternaufbaus

3.4.1 Umformulierung der Grundgleichungen

Motivation: Es ist zweckmäßig, statt der Radialkoordinate r die in einer Kugel mit Radius r befindliche Masse M_r als unabhängige Variable zu wählen, weil:

(i) dann im Gegensatz zu r die äußere Grenze bekannt ist, da im Unterschied zu R_* die Gesamtmasse M_* bekannt und für lange Zeiten unveränderlich ist (anders für R_*, siehe Kapitel 4).

(ii) die Gleichungen sich (geringfügig) vereinfachen.

Offenbar gilt mit Grundgleichung (II): $\mathrm{d}r = \dfrac{\mathrm{d}M_r}{4\pi\, r^2\, \rho}$ und damit:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}M_r} \cdot 4\pi r^2 \rho = -\frac{G M_r \rho}{r^2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}M_r} = -\frac{G}{4\pi}\frac{M_r}{r^4}} \qquad \text{(I)}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}M_r} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}} \qquad \text{(II)}$$

$$\frac{\mathrm{d}L_r}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}L_r}{\mathrm{d}M_r} \cdot 4\pi r^2 \rho = 4\pi r^2 \rho \varepsilon_N \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}L_r}{\mathrm{d}M_r} = \varepsilon_N} \qquad \text{(III)}$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}M_r} \cdot 4\pi r^2 \rho = \begin{cases} -\dfrac{3\bar{k}/3}{16\pi c a T^3}\dfrac{L_r}{r^2} & ; \left|\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right|_S < \left|\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right|_{adiab} \\ \left(1 - \dfrac{1}{\gamma}\right)\dfrac{T}{P}\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}M_r} & ; \left|\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right|_S > \left|\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right|_{adiab} \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}M_r} = \begin{cases} -\dfrac{\bar{k}}{64\pi^2 caT^3}\dfrac{L_r}{r^4} & ; \left|\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}M_r}\right|_S < \left|\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}M_r}\right|_{adiab} \\ \left(1-\dfrac{1}{\gamma}\right)\dfrac{T}{P}\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}M_r} & ; \left|\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}M_r}\right|_S > \left|\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}M_r}\right|_{adiab} \end{cases}} \qquad \text{(IV)}$$

$$\text{und} \qquad \boxed{P = \begin{cases} \dfrac{\rho kT}{\bar{\mu} m_H} + \dfrac{a}{3}T^4 \\ K\rho^\gamma \end{cases}}$$

Die Lösung dieses Systems vier gewöhnlicher (nichtlinearer) Differentialgleichungen erster Ordnung für die Funktionen $P(M_r)$, $r(M_r)$, $L_r(M_r)$, $T(M_r)$ erfordert vier Randbedingungen.

3.4.2 Randbedingungen und Lösungsverfahren

Randbedingungen sind offenbar:

Sternzentrum: $M_r\,|_{r=0} = 0$; $L_r\,|_{r=0} = 0$
Sternoberfläche: $P\,|_{r=R_*} = 0$; $T\,|_{r=R_*} = 0$

bzw. mit M_r als unabhängige Variable:

Sternzentrum: $r\,|_{M_r=0} = 0$; $L_r\,|_{M_r=0} = 0$
Sternoberfläche: $P\,|_{M_r=M_*} = 0$; $T\,|_{M_r=M_*} = 0$

Das sind zwar vier **bekannte** Randbedingungen, aber da nicht alle für dasselbe r bzw. M_r gegeben sind, ist ein **iteratives Lösungsverfahren** erforderlich:

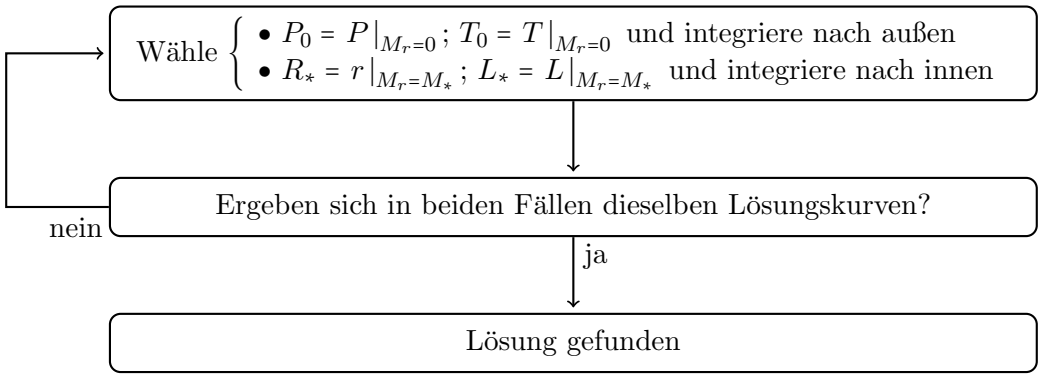

Abbildung 3.9: Iteratives Lösungsverfahren für das Sternaufbau-Gleichungssystem.

Bemerkung: Verbesserte äußere Randbedingungen erhält man durch Anpassung an eine Sternatmosphäre (s. Kap. 5.3).

Bemerkung: Im Falle mechanischen Gleichgewichts, also für polytrope Gaskugeln, lassen sich die beiden Differentialgleichungen erster Ordnung zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung (Lane-Emden-Gleichung) reduzieren. Die Integration ist in diesem vereinfachten Fall wesentlich leichter (und nicht iterativ), siehe Übungen.

3.4.3 Standardmodell der Sonne

Eine numerische Lösung der in 3.4.1 beschriebenen Grundgleichungen mit den Randbedingungen aus 3.4.2 liefert für die Sonne:

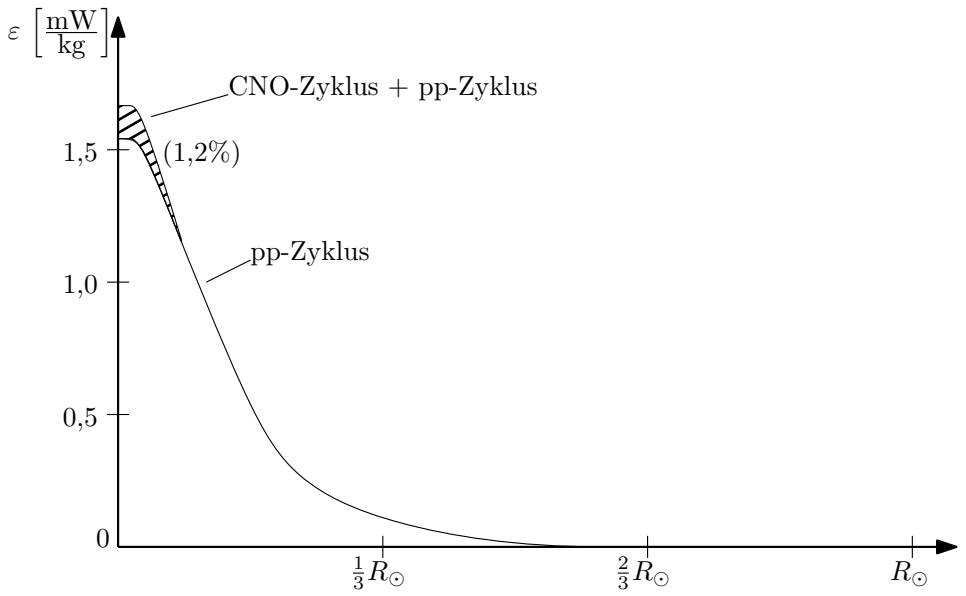

Abbildung 3.10: Verteilung der **Energieproduktion** innerhalb der Sonne.

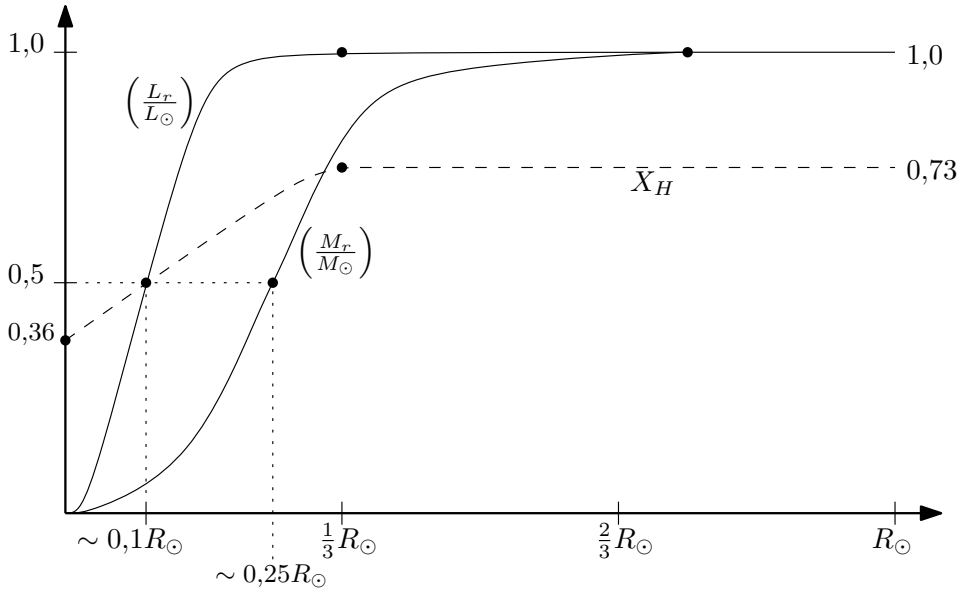

Abbildung 3.11: **Leuchtkraft-** und **Massenverteilung** (& **Massenanteil von Wasserstoff**) in der Sonne.

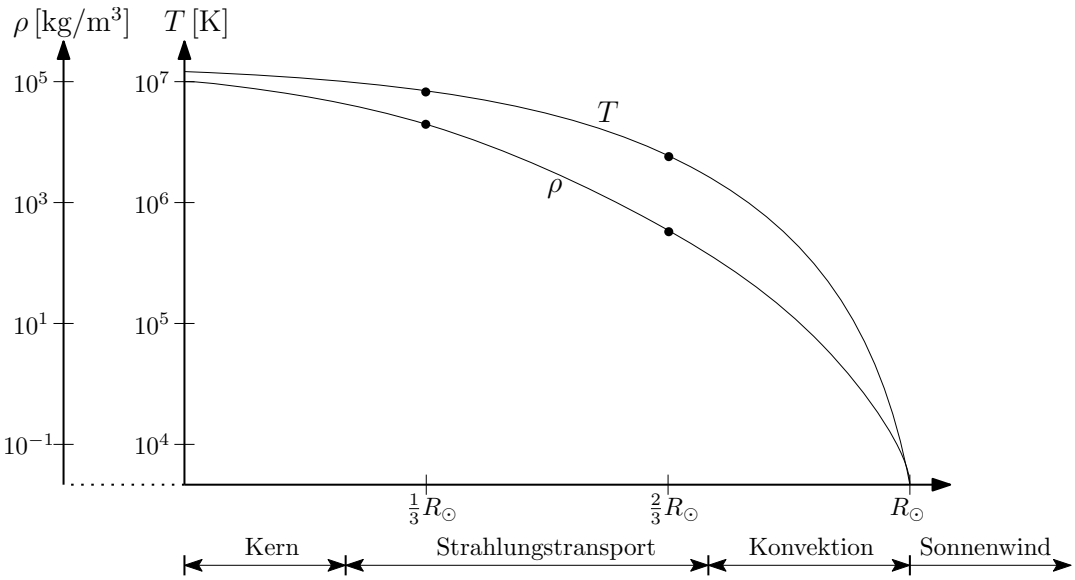

Abbildung 3.12: **Temperatur-** und **Dichteverteilung** in der Sonne.

3.5 Nicht-Standard-Modelle

Zur Lösung des **Neutrinoproblems**[1] sind Modelle mit wesentlichen Abweichungen vom Standardmodell vorgeschlagen worden. So werden z.B. diskutiert:

(1) geringerer Heliumanteil ⇒ weniger Neutrinos aus ppII und ppIII

Probleme:

- nicht in Übereinstimmung mit „primordialer" Heliumhäufigkeit (direkt nach Urknall)
- resultierende solare Oszillationsfrequenzen weniger gut in Übereinstimmung mit Beobachtung als Standardmodell

(2) schnell rotierender Kern ⇒ zur Stabilität notwendiger thermischer Druck kann geringer sein (Zentrifugalkraft!) ⇒ geringere Temperatur ⇒ weniger Neutrinos aus ppII und ppIII

Problem:

- benötigte Rotationsfrequenz sehr hoch ⇒ Abplattung des Kerns ⇒ Quadrupolmoment des Gravitationsfeldes ⇒ zusätzliche Abplattung des gesamten Sonnenkörpers: nicht beobachtet

(3) starkes inneres Magnetfeld (Konsequenz aus (2)) ⇒ magnetischer Druck ⇒ geringerere Temperatur (wie (2)) ⇒ weniger Neutrinos aus ppII und ppIII

Problem:

- kleinskaliges ($\sim 0{,}2R_\odot$) Magnetfeld kann im gut leitenden Sonneninneren nicht bestehen: „Zerfallszeit" viel kürzer als Sonnenalter

⇒ **„Standard-Modell" bisher das beste!**

[1] $\sim \frac{1}{3}$ der erwarteten ν_e werden gemessen

4 Entwicklung der Sterne

Zum Studium der Entwicklung der Sterne – und natürlich auch der Sonne als Hauptbeispiel – hat sich eine aus der Beobachtung abgeleitete Darstellung der stellaren Zustandsgrößen wie Leuchtkraft, Oberflächentemperatur, Radius und Masse (bzw. deren Kombinationen) als besonders zweckmäßig erwiesen. Diese Darstellung ist:

4.1 Das Hertzsprung-Russell-Diagramm (HRD)

Hertzsprung (1905), Russell (1910): Verteilung von Leuchtkräften und Spektraltypen (s.u.) der Sterne nicht uniform.

Russell (1913): erstes Hertzsprung-Russell-Diagramm

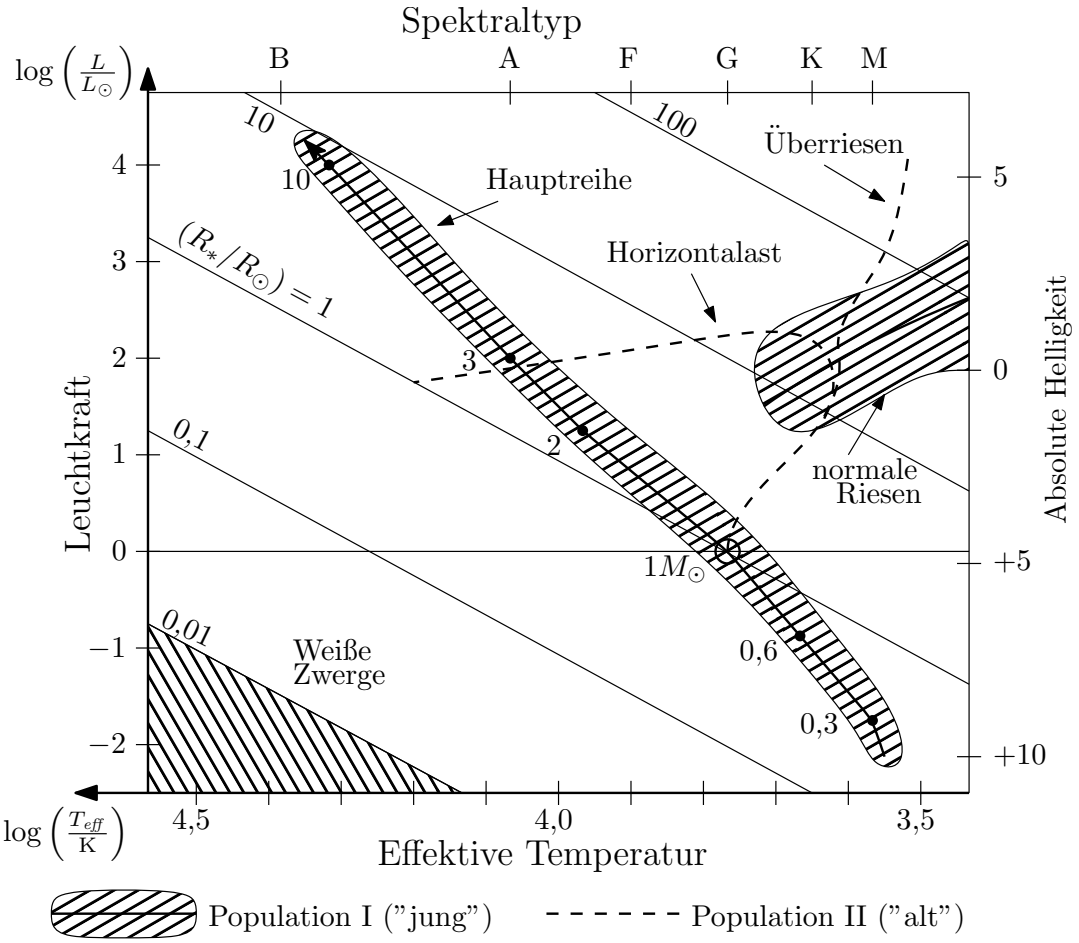

Abbildung 4.1: Prinzipielle Struktur des Hertzsprung-Russel-Diagramms.

Erläuterungen zum HRD:

(1) Die Linien gleichen Radius ergeben sich aus der Überlegung, dass an der Sternoberfläche

gilt:

$$L_* = 4\pi\, R_*^2\, \phi_S$$

Unter der Annahme von Schwarzkörperstrahlung (Planck-Formel!) gilt das **Stefan-Boltzmann-Gesetz**, d.h.:

$$\phi_S = \sigma \cdot T_{eff}^4 \;; \quad \sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\, \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K^4}}$$

Dabei ist T_{eff} die **effektive Temperatur** an der Sternoberfläche (≙ die Photosphäre im Falle der Sonne, s.u.). Damit folgt:

$$L_* = 4\pi\, R_*^2\, \sigma\, T_{eff}^4 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{L_*}{L_\odot}\right) = \left(\frac{R_*}{R_\odot}\right)^2 \cdot \left(\frac{T_{eff}}{T_{eff,\odot}}\right)^4$$

bzw.

$$\log\left(\frac{L_*}{L_\odot}\right) = 2\,\log\left(\frac{R_*}{R_\odot}\right) + 4\,\log\left(\frac{T_{eff}}{T_{eff,\odot}}\right)$$

⇒ **Sterne mit gleichen Radien liegen auf Geraden im HRD.**

(2) Die Einteilung in **Spektraltypen** Sp geht auf eine historische Klassifikation von Sternspektren (nach der Stärke bestimmter Spektrallinien wie z.B. der Balmer-Serie für H) zurück, die erst später als (effektive) Temperaturskala erkannt wurde. Es gilt in etwa:

Sp	O	B	A	F	G	K	M
T_{eff} [1000 K]	50-30	30-10	10-7	7-6	6-5	5-4	4-3

Die **Sonne ist vom Spektraltyp G** (genauer: G2V) und hat $T_{eff} = 5770\,\mathrm{K}$.

Ursprünglich sah man diese Ordnung als Entwicklungssequenz; daher bezeichnet man O- und B-Sterne als **frühe** und K- und M-Sterne als **späte Typen**, obwohl dies nicht mehr auf eine zeitliche Entwicklung hinweist.

(3) Mit **Population II** bezeichnet man Sterne, die in der Frühphase des Kollaps der **„prägalaktischen" Wolke** entstanden sind. Sie sind demzufolge **„metallarm"**, d.h. enthalten ursprünglich einen nur geringen Anteil von Elementen schwerer als Wasserstoff. Sie sind zudem fast sphärisch im **galaktischen Halo** verteilt. Typische Vertreter sind Mitglieder von **Kugelsternhaufen**.
Die jüngere **Population I** wurde später aus dem dann mit „Metallen" angereicherten interstellaren Medium gebildet. Ihre Entstehung zu einer Zeit fortgeschrittenen Kollaps spiegelt sich auch in ihrer räumlichen Verteilung wieder: man findet sie zur **galaktischen (Haupt-) Ebene** hin. Schematisch gilt also:

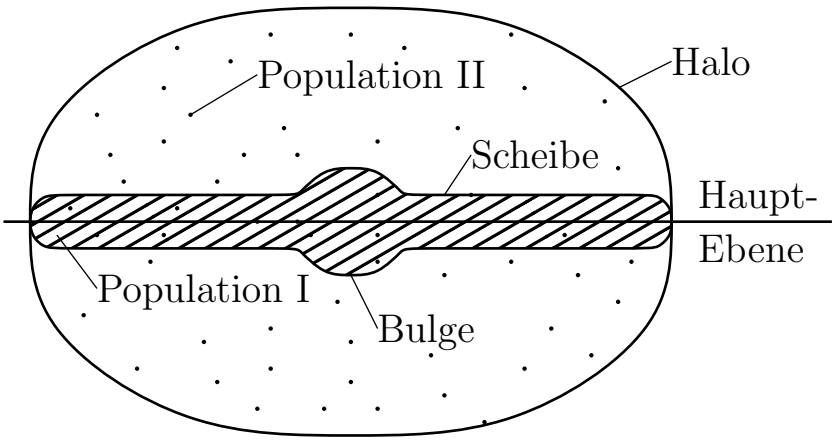

Abbildung 4.2: Schematischer Aufbau der Milchstraße.

(4) Das HRD ist ein **Zustandsdiagramm**, d.h. kein Entwicklungsdiagramm. Eine lokal erhöhte „Sterndichte" im HRD zeigt an, dass Sterne vergleichsweise lange durch die entsprechenden Zustandsgrößen charakterisiert sind – es ist also wahrscheinlich, Sterne in diesen Zuständen zu finden. Umgekehrt weisen die „leeren" Bereiche des HRD auf rasche Änderung der Sternzustände hin – nicht aber darauf, dass diese Kombinationen unmöglich sind!

Bemerkung: Es gibt auch so genannte **Population III - Sterne**, mit denen man die (bisher unbeobachtete) erste Generation von Sternen im Universum bezeichnet. Der älteste bisher (2015) bekannte Stern ist 13,6 Milliarden Jahre alt und Pop-II-Mitglied[1].

4.2 Sternentwicklung

4.2.1 Grundidee

Die zeitliche Entwicklung eines Sterns kann als **Sequenz (quasi-) stationärer Zustände** berechnet werden, d.h. die zeitliche Änderung (im Wesentlichen der chemischen Zusammensetzung infolge der Kernfusion) erfolgt so langsam, dass der Zustand einer Sterns zu einem gegebenen Zeitpunkt in der Regel (mit der dann vorliegenden chemischen Zusammensetzung) gemäß der (statischen) Grundgleichungen (I) - (V) gegeben ist.

Entwicklungssequenzen erhält man demnach durch die Berechnung von relativen Elementhäufigkeiten X_i als Funktion von t und r (oder M_r) bzw. den zeitlichen Änderungen $\dot{X}_i(t,r)$. Für das Wasserstoffbrennen gilt z.B.:

$$\dot{X}_H = -\frac{4\,m_H}{Q_{H,He}}\,\varepsilon_{F,pp}(X_H,X_{He},r) = -\dot{X}_{He}$$

Es gibt nun Entwicklungsphasen, bei denen die zeitliche Änderung von ε_N (siehe Gleichung (II)) nicht nur durch $\varepsilon_{Fusion} =: \varepsilon_F$, sondern auch durch $\varepsilon_{Kontraktion} =: \varepsilon_K$ signifikant beeinflusst wird. Es gilt allgemein:

$$\varepsilon_K = -\frac{\mathrm{d}\hat{Q}}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{\mathrm{d}\hat{U}}{\mathrm{d}t} + P\frac{\mathrm{d}\hat{V}}{\mathrm{d}t}\right) = -T\frac{\mathrm{d}\hat{S}}{\mathrm{d}t}$$

mit $\hat{Q}$: Wärmemenge pro Masseneinheit, $\hat{U}$: Innere Energie pro Masseneinheit, $\hat{V}$: Arbeit zur Volumenänderung pro Masseneinheit, $\hat{S}$: Entropie pro Masseneinheit

Wegen

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}\hat{U} = \hat{c}_V\,\mathrm{d}T \\ &P\,\mathrm{d}\hat{V} = (\hat{c}_P - \hat{c}_V)\,\mathrm{d}T - \hat{V}\,\mathrm{d}P \\ &\hat{V} = \frac{1}{\rho} \end{aligned} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \hat{c}_{P,V} \mathrel{\hat{=}} & \text{spez. Wärmekapazität pro} \\ & \text{Masseneinheit bei konstantem} \\ & \text{Druck bzw. Volumen} \end{array} \right\}$$

folgt weiterhin:

$$\boxed{\varepsilon_N = \varepsilon_F + \varepsilon_K = \varepsilon_F - \hat{c}_P\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}\right) = \varepsilon_F - T\frac{\mathrm{d}\hat{S}}{\mathrm{d}t}}$$

Nettoenergieerzeugung (mit Kontraktion)

Damit lautet die Grundgleichung (III) (vgl. 3.4.1):

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}M_r} = \varepsilon_F - \hat{c}_P\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}\right)$$

[1] S.C. Keller u.a. (2014). „A single low-energy, iron-poor supernova as the source of metal in the star SMSS J031300.36-670839.3". In: *Nature* 506, 463–466

Während im statischen Fall $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(...) = 0$, müssen für Entwicklungssequenzen ggf. die beiden Zusatzterme berücksichtigt werden.

Bemerkung: In der Praxis werden die Zeitableitungen diskretisiert:

$$\dot{X}_i \approx \frac{\Delta X_i}{\Delta t} \Rightarrow X_i(t+\Delta t) = X_i(t) + \Delta X_i(t) = X_i(t) + \frac{4\,m_H}{Q_{H,He}}\,\varepsilon_F\,\Delta t$$

und

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}M_r} \approx \varepsilon_F - \hat{c}_P \frac{T-\tilde{T}}{\Delta t} + \frac{1}{\rho}\frac{P-\tilde{P}}{\Delta t}$$

wo $\tilde{T}$, $\tilde{P}$ die Ergebnisse des vorangegangenen (quasi-statischen) Modells sind.

4.2.2 Entwicklung der Sonne

Berechnet man die zeitliche Entwicklung der Sonne gemäß der beschriebenen Modellvorstellungen, so ergibt sich folgender „Weg" im HRD:

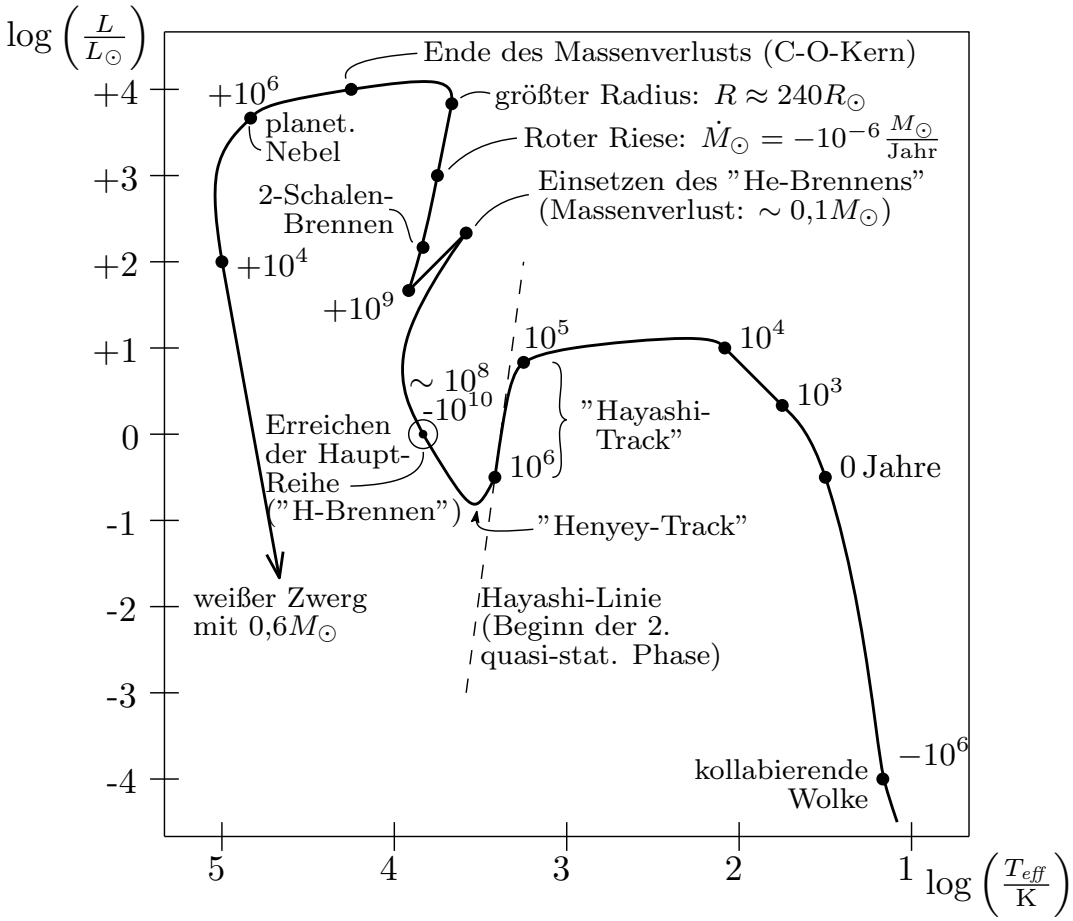

Abbildung 4.3: Entwicklungspfad der Sonne im HRD.

Bemerkung: Rechts von der Hayashi-Linie ist kein hydrostatisches Gleichgewicht möglich.

Bemerkung: Es kommt nicht zu einem C-Brennen, da Zentraltemperatur zu niedrig.

4.3 Endpunkt der solaren Entwicklung

Modellrechnungen sagen, dass für $0{,}5 \lesssim \frac{M_*}{M_\odot} \lesssim 4$ die thermonukleare Entwicklung mit dem He-Brennen endet, d.h. es bleibt im Kerngebiet ein C-O-Gemisch, welches aufgrund der zu

niedrigen Temperatur nicht fusioniert (Rote-Riesen-Phase). Die noch Wasserstoff-reiche Hülle wird als Sternwind abgegeben, und es bleibt ein **C-O-Kern** zurück (≙ Zentralstern in einem planetarischen Nebel). Der C-O-Kern entwickelt sich zu einem sogenannten **Weißen Zwerg**.

4.3.1 Der Zustand des C-O-Kerns

Ein C-O-Kern ist charakterisiert durch $\rho_{CO} \gtrsim 10^7 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ($\approx 100\rho_{0,\odot}$). Bei derart hoher Dichte verliert die Zustandsgleichung des idealen Gases ihre Gültigkeit, weil die Impulse bzw. Energien der Gasteilchen gemäß der Quantentheorie nicht beliebig klein sein können, sondern einen minimalen Wert haben, den **Fermi-Impuls** p_F bzw. die **Fermi-Energie** E_F:

Es gilt das **Pauli-Prinzip**:

> In jedem Volumenelement h^3 ($h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Js ≙ Plancksches Wirkungsquantum) des aus Orts- und Impulsraumkoordinaten gebildeten Phasenraums $(\vec{r},\vec{p})$ kann es nur zwei Fermionen (= Spin-1/2-Teilchen: z.B. Elektronen, Protonen, Neutronen) verschiedenen Spins (±1/2) geben.

Ein Zustand mit der maximalen Phasenraumdichte $\dfrac{2}{h^3}$ heißt **vollständig entartet**.

Das von einer im Orts- und Impulsraum jeweils sphärischen Phasenraumverteilung von N Teilchen eingenommene Phasenraumvolumen V_{ph} ist:

$$V_{ph} = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{4}{3}\pi p_{max}^3$$

und es muss gelten

$$\frac{N}{V_{ph}} \leq \frac{2}{h^3} \quad \Leftrightarrow \quad V_{ph} \geq \frac{Nh^3}{2} = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{4\pi}{3} p_F^3 = V \cdot \frac{4\pi}{3} p_F^3$$

Der Teilchenimpuls p_{max} ist also – bei festem Ortsraumvolumen – nach unten begrenzt:

$$p_{max} \geq p_F = h \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/3} n^{1/3}, \quad n = \frac{N}{V}$$

Es gibt dann eine zugehörige kinetische **Fermi-Energie** der Teilchen (mit Masse m):

$$E_F = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{p_F^2}{2m} \\ p_F c \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{h^2}{2m}\left(\dfrac{3}{8\pi}\right)^{2/3} n^{2/3} & v \ll c & \text{(nicht-rel.)} \\ hc\left(\dfrac{3}{8\pi}\right)^{1/3} n^{1/3} & v \lesssim c & \text{(relativ.)} \end{array} \right.$$

Entartung liegt vor, wenn die Fermi-Energie gegenüber der thermischen Energie nicht mehr vernachlässigbar ist.

Beispiel: (a) heutiger Sonnenkern: $E_{th} = kT \approx 1\,\text{keV}$

$n_e = n_p \approx \dfrac{\rho_{0,\odot}}{m_p} \approx 10^{32}\,\text{m}^{-3}$

$\Rightarrow E_{F,p} \approx 0{,}3\,\text{eV} \Rightarrow$ nicht entartet

$\Rightarrow E_{F,e} \approx 0{,}5\,\text{keV} \Rightarrow$ „schwach“ entartet im Kern, sonst nicht

(b) zukünftiger C-O-Kern:

$R_{CO} \lesssim 0{,}1 R_\odot$ (siehe 4.2.2)

$\Rightarrow n_{e,p}(\text{C-O-Kern}) \gtrsim 10^3 n_{e,p}(\text{heute})$

$\Rightarrow E_{F,p} \approx 30\,\text{eV} \Rightarrow$ nicht entartet

$\Rightarrow E_{F,e} \approx 50\,\text{keV} \Rightarrow$ entartet!

$\Rightarrow$ **Elektronengas im C-O-Kern ist (fast vollständig) entartet.**

4.3.2 Der Übergang zum Weißen Zwerg

Ein stabiler Endzustand ergibt sich, wenn die Gesamtenergie eines Sterns $E_{ges} = U + E_G$ (U = innere Energie, E_G = Gravitationsenergie $\hat{=}$ potentielle Energie) für einen bestimmten Zustand minimal wird. Im Falle der Entartung (die ja beim C-O-Kern bereits vorliegt) ist U im Wesentlichen durch die Fermi-Energie der Elektronen gegeben (d.h. thermische Energie von Elektronen und Ionen sind vernachlässigbar $\hat{=}\, T \approx 0$).

Also $\left(N_e = \dfrac{M_*}{\mu_e m_p}\ ; \quad n = \dfrac{N_e}{\frac{4}{3}\pi R_*^3}\right)$:

$$U = N_e\, E_F = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{M_*}{\mu_e m_p} \cdot \dfrac{h^2}{2m_e}\left(\dfrac{3}{8\pi}\right)^{2/3}\left(\dfrac{3M_*/\mu_e m_p}{4\pi R_*^3}\right)^{2/3} \\ \dfrac{M_*}{\mu_e m_p} \cdot hc\left(\dfrac{3}{8\pi}\right)^{1/3}\left(\dfrac{3M_*/\mu_e m_p}{4\pi R_*^3}\right)^{1/3} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} C_{NR} M_*^{5/3} R_*^{-2} \\ C_R M_*^{4/3} R_*^{-1} \end{array} \right.$$

Mit $E_G = -\dfrac{3}{5}\dfrac{GM_*^2}{R_*}$ (siehe z.B. 3.2.3) folgt:

$$E_{ges} = \left\{ \begin{array}{l} C_{NR}\, M_*^{5/3}\, R_*^{-2} - \dfrac{3}{5} GM_*^2\, R_*^{-1} \\ C_R\, M_*^{4/3}\, R_*^{-1} - \dfrac{3}{5} GM_*^2\, R_*^{-1} \end{array} \right.$$

Mit der Bedingung:

$$\frac{\mathrm{d}E_{ges}}{\mathrm{d}R_*} = \left\{ \begin{array}{l} -2C_{NR}\, M_*^{5/3}\, R_*^{-3} + \dfrac{3}{5} GM_*^2\, R_*^{-2} \\ -2C_R\, M_*^{4/3}\, R_*^{-2} + \dfrac{3}{5} GM_*^2\, R_*^{-2} \end{array} \right\} \underset{(\lessgtr)}{=} 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R_* \overset{(\lessgtr)}{=} \dfrac{10}{3}\dfrac{C_{NR}}{GM_*^{1/3}} \\ M_* \underset{(\lessgtr)}{=} \left(\dfrac{5}{3}\dfrac{C_R}{G}\right)^{3/2} = M_{Ch} \end{array} \right.$$

Bedingung für Minimum in E_{ges}

Im nicht-relativistischen Fall ergibt sich also für einen bestimmten Sternradius ein stabiler Zustand. Für die Sonne findet man $R_* \approx 10^{-2} R_\odot$. **Die Sonne wird also zu einem stabilen weißen Zwerg werden.**

Bemerkung: Im relativistischen Fall gibt es nur dann ein Gleichgewicht, wenn $M_* \lesssim 1{,}44 M_\odot$ ist. Sterne mit Massen größer als diese **Chandrasekhar-Grenzmasse** M_{Ch} kontrahieren weiter und entwickeln sich schließlich zu **Neutronensternen** ($M \lesssim 3M_\odot$) oder **Schwarzen Löchern** ($M \gtrsim 3M_\odot$).

Exkurs: Chandrasekhar-Grenze

Offenkundig gibt es für den relativistischen Fall keinen ausgezeichneten Radiuswert; stattdessen erhält man formal eine Grenzmasse $M_{Ch} = \left(\dfrac{5}{3}\dfrac{C_R}{G}\right)^{3/2}$, für die gilt:

$E_{ges}(M_* \lesseqgtr M_{Ch}) \lesseqgtr 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ Innere Energie $U \lesseqgtr$ Gravitations-Energie E_G

Diese Betrachtung gilt allerdings nur näherungsweise, da die Fermi-Energie E_F lediglich für die Grenzfälle $v \ll c$ und $v \lesssim c$ bestimmt wurde und nicht für den Übergangsbereich zwischen nicht-relativistischer und relativistischer Beschreibung. Eine exaktere Berechnung (siehe Scheffler & Elsässer VI 3.6) liefert:

$$E_0 = \frac{M_* m_e c^2}{\mu_e m_p}$$

$$R_0 = \left(\frac{243\pi}{256}\right)^{1/3} \frac{h M_*^{1/3}}{2\pi m_e c m_p^{1/3} \mu_e^{1/3}}$$

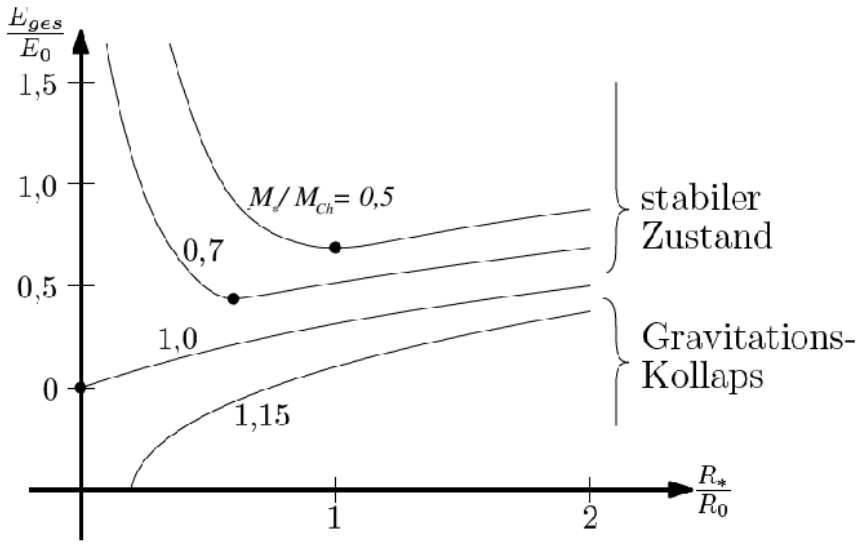

Abbildung 4.4: Energie-Radius-Beziehung für verschiedene Sternmassen.

Im Parameterbereich des Gravitations-Kollaps verliert die Bestimmung der Grenzmasse nach Chandrasekhar ihre Gültigkeit, da dann die Atomkerne zu dissoziieren beginnen. Das entstehende „Neutronengas" kann ähnlich wie das Elektronengas behandelt werden $\Rightarrow$ Neutronenstern oder Schwarzes Loch.

5 Sternatmosphären

Zur genaueren Beschreibung von Sternatmosphären ist eine Theorie des Strahlungstransportes erforderlich. Eine entsprechende Beschreibung erlaubt auch eine verbesserte Formulierung der in 3.4.2 behandelten Randbedingungen von Sternmodellen.

5.1 Grundgleichung des Strahlungstransportes

Für den Fall kugelsymmetrisch verteilter Sternmaterie gilt:

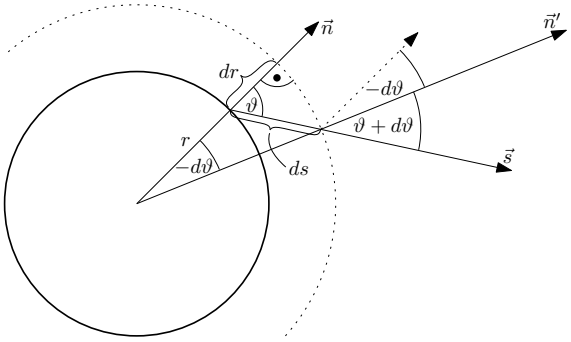

Abbildung 5.1: Schematische Darstellung der Sonnenatmosphäre.

Sei $I_\nu(r,\vartheta)$ die monochromatische Strahlungsintensität beim Sternmittelpunktsabstand r in Richtung $\vec{s}$ (geneigt um den Winkel ϑ gegen die lokale Normale $\vec{n}$).
Dann gilt für die Änderung der Intensität pro Wellenlänge ds:

$$\frac{\mathrm{d}I_\nu}{\mathrm{d}s} = -k_\nu\, I_\nu + \varepsilon_\nu$$

mit k_ν: Absorptionskoeffizient $\left[\frac{1}{\mathrm{m}}\right]$ bei Frequenz ν

ε_ν: Emission pro Längeneinheit bei Frequenz ν

Aus den Überlegungen

$$\mathrm{d}I_\nu = \left(\frac{\partial I_\nu}{\partial r}\right)\mathrm{d}r + \left(\frac{\partial I_\nu}{\partial \vartheta}\right)\mathrm{d}\vartheta \;; \quad \mathrm{d}r = \cos\vartheta\;\mathrm{d}s \;; \quad r\,\mathrm{d}\vartheta = -\sin\vartheta\;\mathrm{d}s$$

folgt:

$$\boxed{\cos\vartheta\,\frac{\partial I_\nu}{\partial r} - \frac{\sin\vartheta}{r}\frac{\partial I_\nu}{\partial \vartheta} = -k_\nu\, I_\nu + \varepsilon_\nu}$$ **Strahlungstransportgleichung**

(i) Mit den Definitionen

$$I = \int_0^\infty I_\nu\;\mathrm{d}\nu \qquad \text{„Gesamtstrahlungsintensität"}$$

$$\bar{k} = \frac{\int_0^\infty k_\nu\, I_\nu\;\mathrm{d}\nu}{\int_0^\infty I_\nu\;\mathrm{d}\nu} \qquad \text{„Opazitätskoeffizient"}$$

$$\varepsilon = \int_0^\infty \varepsilon_\nu\;\mathrm{d}\nu \qquad \text{„Nettoemission"}$$

ergibt sich die (integrale) Form:

$$\cos\vartheta\,\frac{\partial I}{\partial r} - \frac{\sin\vartheta}{r}\frac{\partial I}{\partial \vartheta} = -\bar{k}\, I + \varepsilon$$

(ii) Da die Sternatmosphäre dünn im Vergleich zu ihrem Abstand vom Sternmittelpunkt ist, gilt weiterhin ($r \to \infty$, $\partial\vartheta \to 0$)

$$\frac{\sin\vartheta}{r}\frac{\partial I}{\partial\vartheta} \ll \cos\vartheta\,\frac{\partial I}{\partial r} \quad \hat{=} \text{ **„planparallele Schichtung“**}$$

sodass es genügt zu betrachten

$$\boxed{\cos\vartheta\,\frac{\partial I}{\partial r} = -\bar{k}\,I + \varepsilon}$$ **Transportgleichung für die Gesamtstrahlungsintensität in einer planparallelen Schicht**

Im Falle des thermodynamischen Gleichgewichts gilt:

$$\text{„Abstrahlung“} = \text{„Absorption“} \quad \hat{=} \quad \varepsilon = \bar{k}\,I \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial I}{\partial r} = 0$$

Dann gilt:

$$I = \frac{\varepsilon}{\bar{k}} = \int_0^\infty I_\nu\,\mathrm{d}\nu = \int_0^\infty B_\nu(T)\,\mathrm{d}\nu = \frac{\sigma}{\pi}T^4 = B$$

mit:

$$B_\nu(T) = \frac{2\,h\,\nu^3}{c^2}\left[\exp\left(\frac{h\,\nu}{k\,T}\right) - 1\right]^{-1} \quad \text{**„Kirchhoff-Planck-Funktion“**}$$

Im Allgemeinen ist $\varepsilon \neq \bar{k}\,I$ und man setzt an:

$$\boxed{\cos\vartheta\,\frac{\partial I}{\partial r} = -\bar{k}\,I + \bar{k}\,B = -\bar{k}\,(I - B)}$$ **Strahlungstransportgleichung** (ST)

5.2 Die optische Tiefe

Da eine Sternatmosphäre **geometrisch dünn** ist und nur wenig Masse (im Vergleich zur Sternmasse) enthält, sind weder r noch M_r geeignete unabhängige Variablen zu ihrer Behandlung. Man definiert daher

$$\boxed{\tau(r) = \int_r^\infty \bar{k}\,\mathrm{d}r' \underset{\boxed{\bar{k} = k'\rho}}{=} \int_r^\infty k'\rho\,\mathrm{d}r'}$$ **Optische Tiefe**

Aufgrund der stark variierenden Dichte in der Sternatmosphäre variiert auch τ hinreichend stark und ist somit eine geeignete unabhängige Variable.

Bemerkung: Es wird auch

$$\tau(t) = \int_{-\infty}^t \bar{k}\,\mathrm{d}t' \;; \quad t = t_0 - r \;; \quad \mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}r$$

mit der geometrischen Tiefe t verwendet.

In diesem Zusammenhang bezeichnet man τ als **optische Dicke** (der oberhalb t liegenden Schicht).

Die Strahlungstransportgleichung (ST) kann wegen $\mathrm{d}\tau = -\bar{k}\,\mathrm{d}r$ dann geschrieben werden als:

$$\boxed{\cos\vartheta\,\frac{\partial I}{\partial\tau} = I - B}$$ Benutzt wird auch die Notation: $$\boxed{\cos\vartheta\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\tau} = I - B}$$ (ST')

Für einige Betrachtungen ist es zweckmäßig, die folgenden Momente (gebildet als Integrale über den Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega$) zu verwenden:

$$J = \frac{1}{4\pi}\int I(\tau,\vartheta)\,\mathrm{d}\Omega \qquad \hat{=}\ \text{gemittelte Strahlungsintensität} \qquad \text{„0. Moment"}$$

$$\phi_S = \int I\cos\vartheta\,\mathrm{d}\Omega \qquad \hat{=}\ \text{Energiefluss } (= const.) \qquad \text{„1. Moment"}$$

$$k = \frac{1}{4\pi}\int I\cos^2\vartheta\,\mathrm{d}\Omega \qquad \text{„2. Moment"}$$

mit denen aus (ST') folgt:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\phi_S}{\mathrm{d}\tau} &= 4\pi\,(J-B) \approx 0 \\ \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{1}{4\pi}\phi_S \end{aligned}} \qquad (\text{ST"})$$

5.3 Äußere Randbedingungen für Sternmodelle

Ausgehend von der **Eddington-Näherung**

$$I(\tau,\vartheta) = I_0(\tau) + \cos\vartheta\, I_1(\tau)$$

folgt für die in 5.2 definierten Momente:

$$J = \frac{1}{4\pi}\int I_0\,\mathrm{d}\Omega + \underbrace{\frac{1}{4\pi}\int I_1\cos\vartheta\,\mathrm{d}\Omega}_{=0} = I_0$$

$$\phi_S = \underbrace{\int I_0\cos\vartheta\,\mathrm{d}\Omega}_{=0} + \int I_1\cos^2\vartheta\,\mathrm{d}\Omega = \frac{4\pi}{3}I_1 = const.$$

$$k = \frac{1}{4\pi}\int I_0\cos^2\vartheta\,\mathrm{d}\Omega + \frac{1}{4\pi}\underbrace{\int I_1\cos^3\vartheta\,\mathrm{d}\Omega}_{=0} = \frac{1}{3}I_0$$

Damit ergibt sich aus (ST"):

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\phi_S}{4\pi} \qquad \Big|\int \ldots\,\mathrm{d}\tau$$

$$\Rightarrow k(\tau) = \frac{\phi_S}{4\pi}\tau + \tilde{c} = \frac{I_0}{3} \quad \Rightarrow\ I_0(\tau) = \frac{3\,\phi_S}{4\pi}\tau + c$$

und

$$J = B \ \Leftrightarrow\ I_0 \approx \frac{\sigma}{\pi}T^4$$

Bei $\tau = 0$ sei die Abstrahlung ausschließlich nach außen (obere Halbebene) gerichtet, d.h.

$$\phi_S = 2\pi I_0 \ \Rightarrow\ c = \frac{\phi_S}{2\pi}$$

Damit und mit $\phi_S = \frac{L_*}{4\pi R_*^2}$ folgt

$$\frac{\sigma}{\pi}T^4 = \frac{3\phi_S}{4\pi}\tau + \frac{\phi_S}{2\pi} \quad \Rightarrow\ T^4 = \frac{L_*}{4\pi R_*^2\,\sigma}\left(\frac{3}{4}\tau + \frac{1}{2}\right)$$

Durch Vergleich mit

$$\boxed{T_{eff}^4 = \frac{L_*^2}{4\pi\,\sigma\,R_*^2}}$$

ergibt sich, dass die „Sternoberfläche" bei

$$\frac{3}{4}\tau + \frac{1}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{2}{3}$$

liegt. Die Gleichung für T_{eff} soll durch eine verbesserte Randbedingung für den Druck an der Sternoberfläche ergänzt werden.

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -\frac{G\,M_r\,\rho}{r^2} \underset{\boxed{\mathrm{d}r = -\frac{\mathrm{d}\tau}{\bar{k}}}}{\Leftrightarrow} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau} = \frac{G\,M_r\,\rho}{\bar{k}\,r^2} \underset{\boxed{\bar{k} = k'\rho}}{=} \frac{G\,M_r}{k'\,r^2}$$

An der Sternoberfläche gilt:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau} \approx \frac{G\,M_r}{k'\,R_*^2} \qquad \Big|\int_0^{2/3} \ldots\,\mathrm{d}\tau$$

womit folgt:

$$p\left(\frac{2}{3}\right) - p(0) \underset{\boxed{p(0)\approx 0}}{\approx} \boxed{p\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{G\,M_*}{R_*^2}\int_0^{2/3}\frac{1}{\bar{k}}\,\mathrm{d}\tau = \frac{G\,M_*}{R_*^2}\int_0^{2/3}\frac{\rho}{\bar{k}}\,\mathrm{d}\tau}$$

Offenkundig ist also die Kenntnis der Opazität für die Bestimmung der Druckrandbedingung notwendig.

5.4 Die Opazität

Die Opazität kann über

$$\boxed{\frac{1}{\bar{k}} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{k_\nu}\frac{\mathrm{d}B_\nu}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\nu}{\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}B_\nu}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\nu}}$$

Rosselands mittleren Absorptionskoeffizienten

bestimmt werden.

Mit B_ν aus 5.1 und einer Analyse von Absorptions- (σ_j) und Streuquerschnitten (σ_S) für Photonen an Atomen (mit Anzahldichte n_j) und Elektronen (n_e) erhält man $\left(u = \frac{h\nu}{kT}\right)$:

$$\bar{k} = \left[\int_0^\infty \frac{15\,u^4\,\exp(u)/4\pi(\exp(u)-1)^2}{(1-\exp(u))\sum_j \sigma_j n_j + \sigma_S n_e}\,\mathrm{d}u\right]^{-1}$$

Die Opazität ist z.B. in der „Astrophysical Opacity Library" tabelliert, ursprünglich aber nur für $T \geq 1\,\mathrm{eV}$, also $T \gtrsim 11600\,\mathrm{K}$, also **nicht** für die solare Atmosphäre.

Die Lücke hat Kurucz geschlossen, der Berechnungen für $T = (5500 - 50000)\,\mathrm{K}$ vorlegte.

5.5 Strukturierung der Sonnenatmosphäre

Ähnlich wie bei der Erdatmosphäre kann das Temperaturprofil zur begrifflichen Strukturierung verwendet werden:

5.5.1 Anschluss an Standardmodell (vgl. 3.4.3)

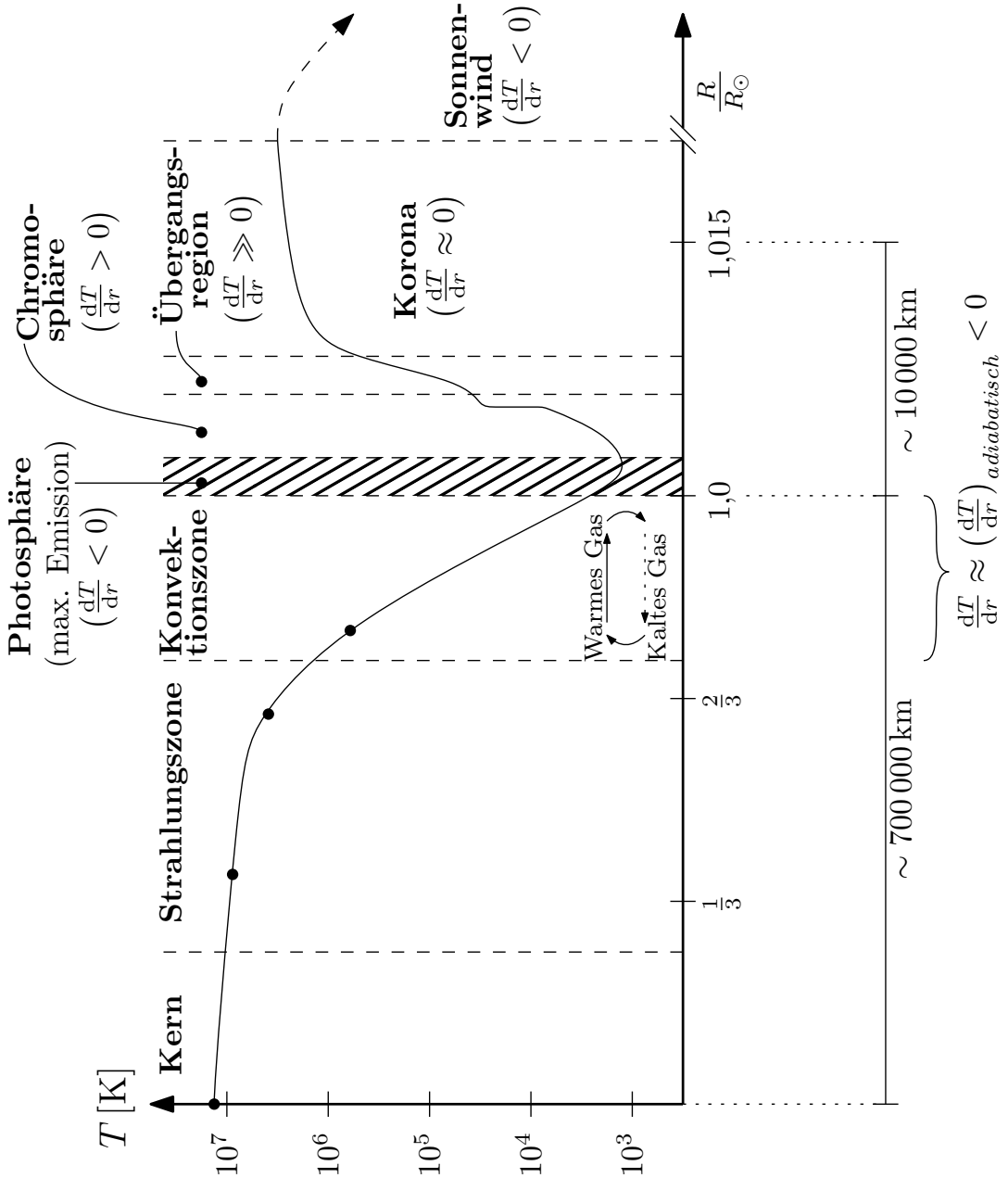

Abbildung 5.2: Temperaturprofil der Sonnenatmosphäre.

5.5.2 Photosphäre, Chromosphäre, Übergangsregion und Korona

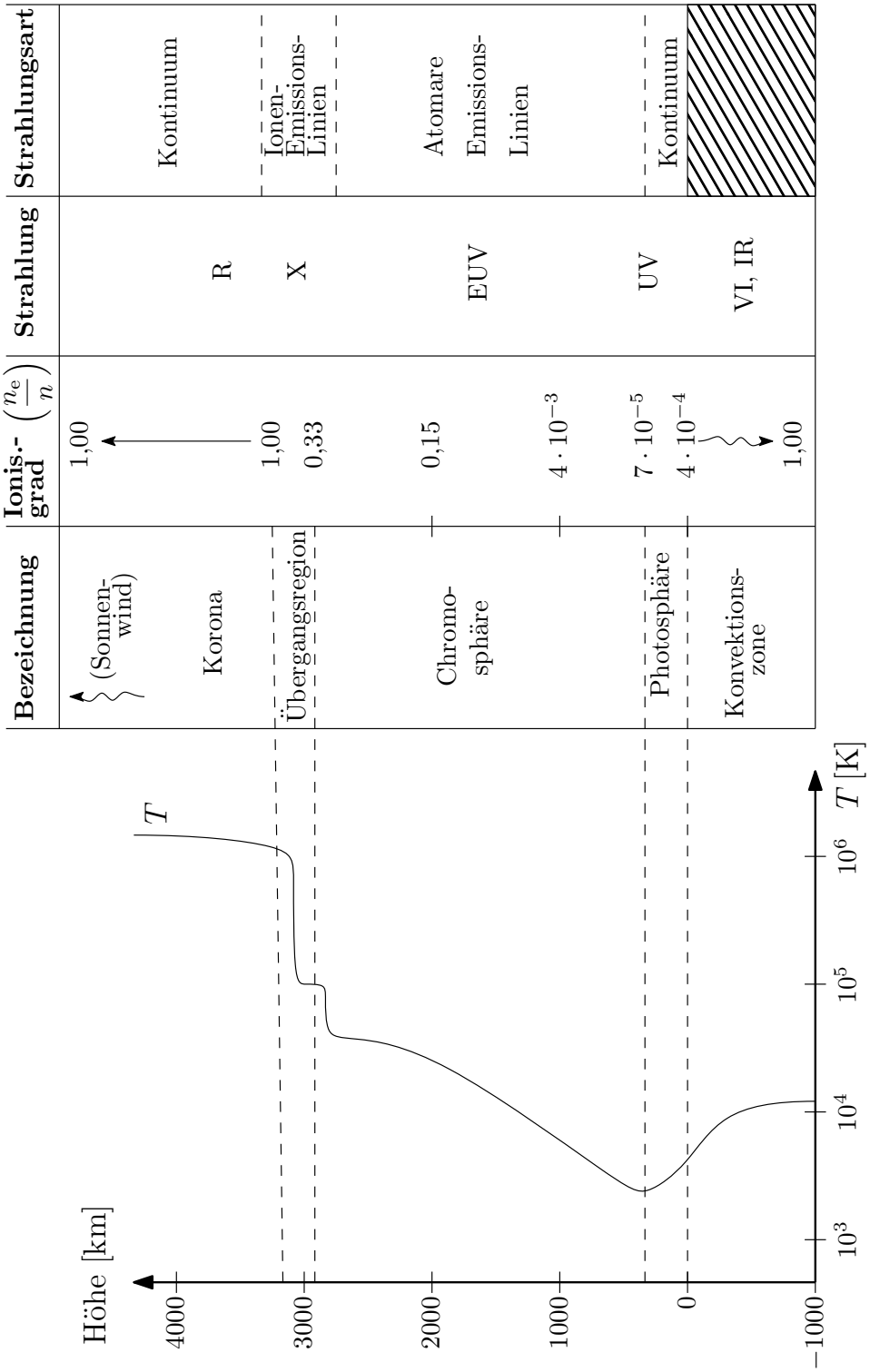

Abbildung 5.3: Strahlungsprofil der Sonnenatmosphäre.

Bemerkung: Die Energie der Sonnenstrahlung wird durch Kernfusion im Kernbereich der Sonne ($R \lesssim 0{,}2\,R_\odot$) erzeugt. Diese ursprünglich im γ-Bereich liegende Strahlung (vgl. 3.3.4) wird aufgrund der hohen Dichten im Sonneninneren und der dadurch bedingten kleinen mittleren freien Weglänge der Photonen ($\bar{l}_{Photon} \approx 10^{-3}\,\mathrm{m}$) ständig gestreut, also absorbiert und (stufenweise) re-emittiert. Daraus ergibt sich

(1): Vergrößerung der Photonenzahl

(2): Verringerung der Frequenz, bzw. Verlängerung der Wellenlänge

Kern:	$E_{Photon} \approx 1\,\mathrm{MeV}$,	$\lambda \approx 10^{-12}\,\mathrm{m}$	(γ)
Atm.:	$E_{Photon} \approx 1\,\mathrm{eV}$,	$\lambda \approx 10^{-7}\,\mathrm{m}$	(optisch)

Bemerkung: Bei streuungsfreier Abstrahlung würde die γ-Strahlung der Kerns direkt abstrahlen und vom Kern zur Oberfläche nur etwa $t \approx \frac{R_\odot}{c} \approx \frac{700000\,\mathrm{km}}{300000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}} \approx 2{,}3\,\mathrm{s}$ benötigen. Tatsächlich, also mit Streuung, die näherungsweise als Diffusionsprozess beschrieben werden kann, gilt:

$$D_{Photon} \approx \frac{1}{3}\,\bar{l}_{ph}\,c$$

$$\Rightarrow\ t = \frac{R_\odot^2}{D_{Photon}} = \frac{R_\odot^2}{\frac{1}{3}\,\bar{l}_{Ph}\,c} \approx 5 \cdot 10^{12}\,\mathrm{s} \approx 1{,}6 \cdot 10^5 \text{ Jahre}$$

Die beobachtete Strahlungsenergie ist also relativ „alt"...

6 Sonnenwind und Heliosphäre

6.1 Der Sonnenwind

Aufgrund von Kometenbeobachtungen (Schweifausrichtungen) und erdmagnetischen Störungen wurde zunächst eine sporadische, dann eine kontinuierliche **Korpuskularstrahlung** der Sonne vermutet. In Verbindung mit der Einsicht, dass die Korona nicht im (hydro-) statischen Gleichgewicht sein kann, entstand daraus das Konzept einer (hydro-) dynamischen Beschreibung, also des Sonnenwindes.

6.1.1 Gleichgewicht der Sonnenkorona

Wie in 5.5.2 gesehen ist die Korona (fast) vollständig ionisiert. Die somit vorhandene Vielzahl freier Elektronen führt zu einer hohen thermischen Leitfähigkeit, die gemäß der Plasmaphysik $K_{th} \sim T^{5/2}$ mit $[K_{th}] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s\,m^2\,K}}$, und zu einem Energiefluss $\vec{F}_{th} = -K_{th}\,\vec{\nabla}T$ führt. Wegen der Energieerhaltung gilt dann:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_{th} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\,T^{5/2}\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) = 0$$

Mit den Randbedingungen im Vergleich zur Koronatemperatur ($T_k \geq 10^6\,\mathrm{K}$, vgl. 5.5) sehr kleiner Photosphären- und interstellaren Temperaturen ($T(R_\odot)$,$T_{ISM} \ll T_k \;\Rightarrow T(R_\odot) \approx T_{ISM} \approx 0$) folgt:

$$T(r) = \begin{cases} T_k\left[\left(\frac{r_k}{r}\right)\left(\frac{r-R_\odot}{r_k-R_\odot}\right)\right]^{2/7} & ;\; r \leq r_k \\ T_k\left(\frac{r}{r_k}\right)^{-2/7} & ;\; r > r_k \end{cases}$$

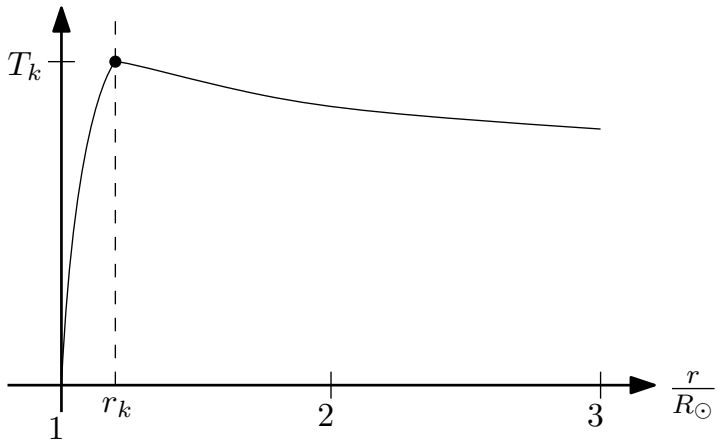

Abbildung 6.1: Schematischer Temperaturverlauf in der Sonnenkorona.

Verwendet man dieses Temperaturprofil zusammen mit der Annahme idealen Gases $P = \frac{\rho}{m_p}kT$

in der Bedingung für das hydrostatische Gleichgewicht:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -\frac{GM_\odot \rho}{r^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -\frac{GM_\odot m_p}{kTr^2}$$

sodass:

$$P(r) = P(R_\odot)\exp\left(-\int_{R_\odot}^{r} \frac{GM_\odot m_p}{kT(r')^2}\,\mathrm{d}r'\right)$$

Da das zuvor bestimmte Temperaturprofil **nicht** stärker als $\frac{1}{r}$ abnimmt, ist $\lim_{r\to\infty} P(r) > 0$, woraus folgt, dass die **Korona nicht im hydrostatischen Gleichgewicht** sein kann. Diese Erkenntnis führte zur **Aufstellung eines hydrodynamischen Modells** der Korona und damit zum Konzept des Sonnenwindes.

Exkurs: Hydrodynamik

Ausgangspunkt: Boltzmann-Gleichung (Vlasov-Gleichung, wenn $\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_{\text{Stöße}} = 0$)

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}_r f + \frac{\vec{F}}{m}\cdot\vec{\nabla}_v f = \left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_{\text{Stöße}}}$$

Bemerkung: Die Vlasov-Gleichung kann aus dem **Liouville-Theorem** hergeleitet werden:

> Die Dichte D der Systempunkte in der Nachbarschaft eines gegebenen Systempunktes im Phasenraum ist zeitlich konstant.

Es gilt die **Liouville-Gleichung**:

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \{D,H\} = 0$$

(mit der Poisson-Klammer $\{...\}$) und folgender Hierarchie von Verteilungsfunktionen:

$$f_N = \frac{D}{\int D\,\mathrm{d}q\,\mathrm{d}p} = \frac{D}{const.} \qquad \hat{=}\ N\text{-Teilchenverteilungsfunktion}$$

$$f_1 = \int f_N\,\mathrm{d}q_2\,\mathrm{d}p_2 \ldots \mathrm{d}q_N\,\mathrm{d}p_N \qquad \hat{=}\ \text{1-Teilchenverteilungsfunktion}$$

$$f = Nf_1 \qquad N \hat{=}\ \text{Teilchenzahl im Gas}$$

Damit folgt:

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \text{(Vlasov-Gleichung)}$$

Allgemein gilt:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}}_{=\vec{v}\cdot\vec{\nabla}_r f} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}}_{=\frac{\vec{F}}{m}\cdot\vec{\nabla}_v f} = \left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_{\text{Stöße}}$$

also die oben angegebene **Boltzmann-Gleichung**.

Die Verteilungsfunktion $f(\vec{r},\vec{v},t)$ kann wie folgt interpretiert werden:

$$f\ \mathrm{d}^3r\ \mathrm{d}^3v \quad \hat{=} \quad \text{Zahl der Teilchen mit Ortskoordinaten in } [\vec{r}, \vec{r} + \mathrm{d}\vec{r}] \text{ und Geschwindigkeit in } [\vec{v}, \vec{v} + \mathrm{d}\vec{v}]$$

Dann gilt (ganz anschaulich):

$$N = \iint f(\vec{r},\vec{v},t)\ \mathrm{d}^3r\ \mathrm{d}^3v \quad \hat{=} \quad \text{Gesamtzahl der Teilchen}$$

$$n(\vec{r},t) = \int f(\vec{r},\vec{v},t)\ \mathrm{d}^3v \quad \hat{=} \quad \text{Teilchenzahldichte} \qquad \text{(0. Moment)}$$

$$\vec{u}(\vec{r},t) = \frac{1}{n}\int \vec{v}\, f(\vec{r},\vec{v},t)\ \mathrm{d}^3v \quad \hat{=} \quad \text{Strömungsgeschwindigkeit} \qquad \text{(1. Moment)}$$

Die Temperatur ergibt sich aus der kinetischen Energie der Teilchen im mit der Strömungsgeschwindigkeit bewegten System

$$\frac{3}{2}k\,T(\vec{r},t) = \frac{1}{n}\int \frac{1}{2}\,m\,(\vec{v}-\vec{u})^2\, f(\vec{r},\vec{v},t)\,\mathrm{d}^3v \qquad \text{(2. Moment)}$$

$$\Rightarrow \quad T(\vec{r},t) = \frac{m}{3k}\frac{1}{n}\int (\vec{v}-\vec{u})^2\, f(\vec{r},\vec{v},t)\ \mathrm{d}^3v$$

Dabei bezeichnet $\vec{c} = \vec{v}-\vec{u}$ die Eigen- bzw. Pekuliargeschwindigkeit der Gasteilchen.

Schließlich verallgemeinert man noch auf

$$\overleftrightarrow{P}(\vec{r},t) = m\int (\vec{v}-\vec{u})\otimes(\vec{v}-\vec{u})\, f(\vec{r},\vec{v},t)\ \mathrm{d}^3v \quad \hat{=} \quad \text{Drucktensor} \qquad \text{(2. Moment)}$$

was im Falle anisotroper Strömungen von Bedeutung ist.

Bemerkung: Es lassen sich weitere Geschwindigkeitsmomente bilden (z.B. ist der Wärmestrom das dritte); diese sind aber für eine einführende Formulierung der Hydrodynamik nicht erforderlich.

Die bekannteste Verteilungsfunktion ist die Maxwellsche, die sich im Falle verschwindender Stöße (Vlasov-Gleichung) in der Gleichgewichtssituation ergibt, d.h. wenn $\frac{\delta f}{\delta t} = 0$. Sie trägt ihren Namen, weil sie erstmals von Maxwell (lange bevor die Vlasov-Gleichung formuliert wurde) hergeleitet wurde.

Bevor diese Herleitung betrachtet wird, sei noch die (naheliegende) Definition der **Geschwindigkeitsverteilung** (im Unterschied zur **Phasenraumverteilung**) gemacht:

$$g(\vec{r},\vec{v},t) = \frac{f(\vec{r},\vec{v},t)}{n(\vec{r},t)}$$

Es gilt offenkundig

$$\int g(\vec{r},\vec{v},t)\ \mathrm{d}^3v \ = \ \frac{1}{n}\int f(\vec{r},\vec{v},t)\ \mathrm{d}^3v = \frac{n}{n} = 1$$

Bemerkung: Im Falle des Gleichgewichts gilt natürlich $\frac{\delta f}{\delta t} = \frac{\delta g}{\delta t} = 0$, sodass

$$g(\vec{r},\vec{v}) = \frac{f(\vec{r},\vec{v})}{n(\vec{r})}$$

Zur weiteren Illustration ist es interessant, Maxwells ursprüngliche Herleitung (1859/60) nachzuvollziehen.

Maxwell setzte an:

Sei N die Gesamtzahl der Teilchen und v_x, v_y, v_z die Geschwindigkeitskomponenten in orthogonale (*const.*) beliebige Richtungen, also

$$\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z$$

und sei

$$\left.\begin{array}{l} N\,g(v_x)\,\mathrm{d}v_x \\ N\,g(v_y)\,\mathrm{d}v_y \\ N\,g(v_z)\,\mathrm{d}v_z \end{array}\right\} \text{ Zahl der Teilchen mit } \left\{\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right\}\text{-Komp. der Geschw. in } \left\{\begin{array}{l} [v_x,v_x+\mathrm{d}v_x] \\ [v_y,v_y+\mathrm{d}v_y] \\ [v_z,v_z+\mathrm{d}v_z] \end{array}\right.$$

Dann gilt:

$$\underbrace{N\,g(v_x)\,g(v_y)\,g(v_z)}_{\substack{\text{Zahl der Teilchen pro}\\ \text{Einheitsvolumen}}}\ \underbrace{\mathrm{d}v_x\,\mathrm{d}v_y\,\mathrm{d}v_z}_{\substack{\text{infinitesimales}\\ \text{Volumen im}\\ \text{Geschwindig-}\\ \text{keitsraum}}} = \text{ Zahl der Teilchen mit Geschwindigkeit in } [\vec{v},\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v}]$$

Da die Koordinatenrichtungen willkürlich gewählt werden können, kann diese Zahl nur vom Abstand zum Ursprung abhängen, d.h.:

$$N\,g(v_x)\,g(v_y)\,g(v_z) = N\,\phi(v_x^2+v_y^2+v_z^2) = N\,\phi(v)\ ; \quad v = \sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$

Maxwell: "Solving this functional equation, we find:"

$$\boxed{g(v_i) = C\,\exp(Av_i^2)\ ; \quad \phi(v) = C^3\,\exp(Av^2)}$$

$$\text{mit } v^2 = \sum_i v_i^2\ ; \quad i \in \{x,y,z\}$$

Bemerkung: Bei Maxwell findet sich keine explizite Herleitung der exp-Funktion als Lösung. Möglicherweise hat er diese einem Buch von Sir John Herschel, Sohn von William Herschel, dem Uranus-Entdecker, entnommen.

Aus dieser Geschwindigkeitsverteilung $g(\vec{v}) = g(v_x)\,g(v_y)\,g(v_z)$ ergibt sich die **Maxwell-Verteilung** ($\hat{=}$ Phasenraumverteilung) zu:

$$\boxed{f(\vec{r},\vec{v}) = n(\vec{r})\,g(\vec{v}) = n(\vec{r})\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)} \quad (\text{Hier: } T \neq T(\vec{r}))$$

Eine verallgemeinerte Darstellung ergibt sich wie folgt. Auch hier gilt natürlich:

$$n(\vec{r},t) = \int f(\vec{r},\vec{v},t)\,\mathrm{d}^3v \qquad \hat{=} \text{ Teilchenzahldichte} \quad (0.\ \text{Moment})$$

$$\vec{u}(\vec{r},t) = \frac{1}{n}\int \vec{v}\,f(\vec{r},\vec{v},t)\,\mathrm{d}^3v \qquad \hat{=} \text{ Strömungsgeschw.} \quad (1.\ \text{Moment})$$

$$T(\vec{r},t) = \frac{m}{3\,k}\frac{1}{n}\int (\vec{v}-\vec{u})^2\,f(\vec{r},\vec{v},t)\,\mathrm{d}^3v \qquad \hat{=} \text{ Temperatur} \quad (2.\ \text{Moment})$$

$$\overleftrightarrow{P}(\vec{r},t) = m\int (\vec{v}-\vec{u})\otimes(\vec{v}-\vec{u})\,f(\vec{r},\vec{v},t)\,\mathrm{d}^3v \qquad \hat{=} \text{ Drucktensor} \quad (2.\ \text{Moment})$$

Offenbar gilt also für die Maxwell-Verteilung:

$$n(\vec{r}) = \int f(\vec{v},\vec{r})\,\mathrm{d}^3v = n(\vec{r})\int g(\vec{v})\,\mathrm{d}^3v \quad \Rightarrow \quad \int g(\vec{v})\,\mathrm{d}^3v = 1$$

Und damit:

$$4\pi \int_0^\infty g(\vec{v})\, v^2 \, \mathrm{d}v = \int_0^\infty h(v) \, \mathrm{d}v = 1 \; ; \quad h(v) = 4\pi \, g(\vec{v}) \, v^2$$

wobei $h(v)$ als **Häufigkeitsverteilung der Geschwindigkeitsbeträge** interpretiert wird:

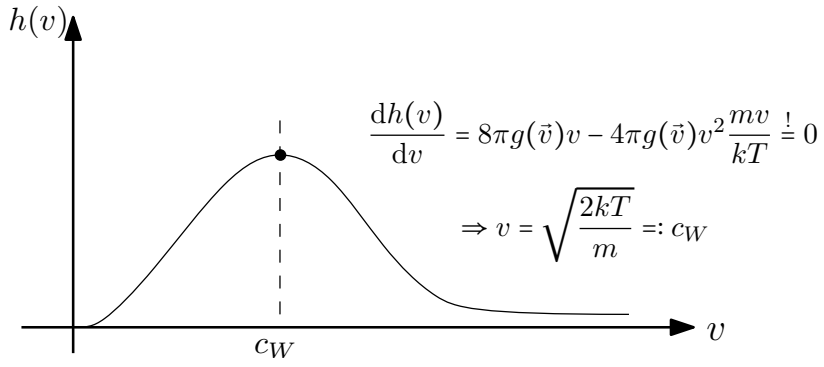

Abbildung 6.2: Schematische Häufigkeitsverteilung der Geschwindigkeitsbeträge.

$$\Rightarrow \quad \boxed{f_M(\vec{r},\vec{v}) = \frac{n(\vec{r})}{\pi^{\frac{3}{2}} c_W^3} \exp\left(-\frac{(\vec{v}-\vec{u})^2}{c_W^2}\right) \; ; \quad c_W = \sqrt{\frac{2kT}{m}}} \qquad \textbf{Maxwellverteilung}$$

Mit den bisher zusammengestellten Begriffen ist es nun möglich, die Grundgleichungen der Hydrodynamik herzuleiten, nämlich als Geschwindigkeitsmomente der Boltzmann- (bzw. Vlasov-) Gleichung ($\alpha \in \mathbb{N}_0$):

$$\int (...)\, \vec{v}^\alpha \, \mathrm{d}^3v \quad \text{oder auch} \quad \int (...)\, (\vec{v}-\vec{u})^\alpha \, \mathrm{d}^3v$$

Wir betrachten zwei Gleichungen explizit:

(I) 0. Moment → Kontinuitätsgleichung ≙ Massenbilanz

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla}_r)\, f + \left(\frac{\vec{F}}{m}\cdot\vec{\nabla}_v\right) f = \left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_{\text{Stöße}} \qquad \Big| \int (...)\, \mathrm{d}^3v \quad (\vec{v}^0 = 1)$$

$$n = \int f(\vec{r},\vec{v},t)\, \mathrm{d}^3v \;\Rightarrow\; \frac{\partial n}{\partial t} + \int (\vec{v}\cdot\vec{\nabla}_r)\, f \, \mathrm{d}^3v + \frac{\vec{F}}{m}\int \vec{\nabla}_v f \, \mathrm{d}^3v = \underbrace{\int \left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_{\text{Stöße}} \mathrm{d}^3v}_{=:P-L \text{ (production, loss)}}$$

Für die beiden Integrale auf der linken Seite findet man:

$$\int (\vec{v}\cdot\vec{\nabla}_r)\, f \, \mathrm{d}^3v \overset{\boxed{\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\phi) = \phi\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\phi}}{=} \int \Big[\vec{\nabla}_r(\vec{v}\cdot f) - f\underbrace{(\vec{\nabla}_r\cdot v)}_{\substack{=0 \\ \boxed{\vec{v},\vec{r}\text{ unabhängig}}}}\Big] \, \mathrm{d}^3v \overset{\boxed{\vec{v},\vec{r}\text{ unabhängig}}}{=} \vec{\nabla}_r \int \vec{v}\, f \, \mathrm{d}^3v \overset{\boxed{\vec{u} = \frac{1}{n}\int f(\vec{r},\vec{u},t)\,\vec{v}\,\mathrm{d}^3v}}{=} \vec{\nabla}_r(n\vec{u})$$

$$\int \vec{\nabla}_v f \, \mathrm{d}^3v = \int \frac{\partial f}{\partial v_i} \, \mathrm{d}^3v = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial v_i} \, \mathrm{d}v_i \, \mathrm{d}v_j \, \mathrm{d}v_k = \iint_{-\infty}^{+\infty} [f]_{-\infty}^{+\infty} \, \mathrm{d}v_j \, \mathrm{d}v_k \underset{\boxed{\lim_{v_i \to \pm\infty} f(v_i) = 0}}{=} 0$$

Damit insgesamt:

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n\vec{u}) = P - L} \qquad \textbf{Kontinuitätsgleichung}$$

(II): 1. Moment → Impulsbilanzgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_r f + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \vec{\nabla}_v f = \left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_{\text{Stöße}} \qquad \Big| \int \vec{v} \, (\ldots) \, \mathrm{d}^3v$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(n\vec{u}) + \int \vec{v} \, (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_r) f \, \mathrm{d}^3v + \int \vec{v} \left(\frac{\vec{F}}{m} \cdot \vec{\nabla}_v\right) f \, \mathrm{d}^3v = \underbrace{\int \vec{v} \left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_{\text{Stöße}} \mathrm{d}^3v}_{=:\ \text{Transferintegral } \vec{I}_T}$$

In Komponentenschreibweise hat man:

$$\frac{\partial}{\partial t}(nu_i) + \int v_i \, (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_r) f \, \mathrm{d}^3v + \int v_i \left(\frac{\vec{F}}{m} \cdot \vec{\nabla}_v\right) f \, \mathrm{d}^3v = (\vec{I}_T)_i$$

Für die Integrale gilt hier:

$$\int v_i \, (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_r) f \, \mathrm{d}^3v \underset{\boxed{\vec{v}, \vec{r} \text{ unabhängig}}}{=} \int (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_r)(v_i f) \, \mathrm{d}^3v = \int \left[\vec{\nabla}_r \cdot (\vec{v} \, v_i f) - v_i f \underbrace{(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{v})}_{=0}\right] \mathrm{d}^3v$$

$$= \vec{\nabla}_r \int v_i \, \vec{v} \, f \, \mathrm{d}^3v \overset{\boxed{\vec{c} = \vec{v} - \vec{u}}}{=} \vec{\nabla}_r \int (c_i + u_i)(\vec{c} + \vec{u}) f \, \mathrm{d}^3v$$

$$= \vec{\nabla}_r \left[\int c_i \, \vec{c} \, f \, \mathrm{d}^3v + u_i \underbrace{\int \vec{c} \, f \, \mathrm{d}^3v}_{=0} + \vec{u} \underbrace{\int c_i \, f \, \mathrm{d}^3v}_{=0} + u_i \, \vec{u} \, n\right]$$

$$\overset{\boxed{\text{s.o.}}}{=} \left[\vec{\nabla}_r \cdot \left(\frac{\overleftrightarrow{P}}{m}\right)\right]_i + \vec{\nabla}_r (u_i \, \vec{u} \, n)$$

$$\int v_i \left(\frac{\vec{F}}{m} \cdot \vec{\nabla}_v\right) f \, \mathrm{d}^3v = \underbrace{\int \vec{\nabla}_v \cdot \left(\frac{\vec{F}}{m} v_i \, f\right) \mathrm{d}^3v}_{=0,\ \text{da} \lim_{|\vec{v}| \to \infty} f = 0} - \underbrace{\int f \, \vec{\nabla}_v \cdot \left(\frac{\vec{F}}{m} v_i\right) \mathrm{d}^3v}_{= \int f \frac{F_i}{m} \mathrm{d}^3v} = -\frac{F_i}{m} n$$

Also:

$$u_i \frac{\partial n}{\partial t} + n \frac{\partial u_i}{\partial t} + \left[\vec{\nabla}_r \cdot \left(\frac{\overleftrightarrow{P}}{m}\right)\right]_i + u_i \, \vec{\nabla}_r \cdot (n\vec{u}) + n \, (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}_r) \, u_i - \frac{F_i}{m} n = (\vec{I}_T)_i$$

$$\overset{\text{Massen-}}{\underset{\text{bilanz}}{\Longleftrightarrow}} \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{-u_i \vec{\nabla}_r \cdot (n\vec{u})} + u_i (P - L) + n \frac{\partial u_i}{\partial t} + (\ldots)_i + \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{u_i \vec{\nabla}_r \cdot (n\vec{u})} + n \, (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}_r) u_i - \frac{F_i}{m} n = (\vec{I}_T)_i \qquad |: n$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\left(\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{P}\right) + \frac{\vec{F}}{m} + \frac{\vec{I}_T}{n} + \frac{\vec{u}}{n}(P-L)}$$

Bildet man in analoger Weise das 2. Moment, ergeben sich insgesamt folgende **hydrodynamische Grundgleichungen** (oft wird $\rho = nm$ verwendet)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\,\vec{u}) = (P-L)\,m =: q_m$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\,\vec{u}) + \vec{\nabla}\cdot((\rho\,\vec{u})\vec{u}) = \vec{f} + \vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{p} + \vec{q}_I$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\,\varepsilon) + \vec{\nabla}\cdot(\rho\,\varepsilon\,\vec{u}) = \vec{u}\cdot\vec{f} + \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{u}\cdot\overleftrightarrow{P}\right) + \vec{\nabla}\left(k\,\vec{\nabla}T\right) + q_E$$

die die Massen-, Impuls- und Energiebilanz quantifizieren.

Hierbei bedeuten:

$\vec{f}$	$\hat{=}$	Kraftdichte
ε	$\hat{=}$	Energiedichte
q_m	$\hat{=}$	Massenquellen/-senken
$\vec{q}_I$	$\hat{=}$	Impulsquellen/-senken
q_E	$\hat{=}$	Energiequellen/-senken

Zum Abschluss des obigen Systems wird noch eine Zustandsgleichung $P = P(\rho,T)$ benötigt.

Bemerkung: Die Lösung dieser Gleichung ist erschwert durch ihre **Nichtlinearität**.

6.1.2 Hydrodynamische Beschreibung der Korona

Parker's (zu dieser Zeit (1958) völlig neuartiger) Ausgangspunkt:

Beschreibung der solaren Korona als **hydrodynamische Strömung**. Daher lauten die **Grundgleichungen**:

$$\begin{aligned}
\text{Massenbilanz:}\quad & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) = 0 \\
\text{Impulsbilanz:}\quad & \rho\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho\,(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = -\vec{\nabla}P - \frac{G\,M\,\rho}{r^2}\vec{e}_r \\
\text{statt Energiebilanz:}\quad & T = const. \\
\text{Zustandsgleichung:}\quad & P = 2nkT \qquad (\text{„2" da Plasma!})
\end{aligned}$$

Mit den Annahmen $\rho = nm$, sphärische Symmetrie und Stationärität $\left(\frac{\partial}{\partial t}(\ldots) = 0\right)$ gilt dann:

$$\left|\begin{array}{l} \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2 nu) = 0 \\ nmu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = -\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} - \frac{GMmn}{r^2} \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r} = -\frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} - \frac{2}{r} \\ n\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = -\frac{2kT}{m}\frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r} - \frac{GM}{r^2} \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \end{array}$$

Einsetzen von (I) in (II) liefert:

$$u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = \frac{2kT}{m}\frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} + \frac{4kT}{mr} - \frac{GM}{r^2} \Leftrightarrow \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\left(u^2 - \frac{2kT}{m}\right) = \frac{4kT}{mr} - \frac{GM}{r^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = \frac{Z(r)}{N(u)}}\ , \text{ mit } Z(r) = \frac{4kT}{mr} - \frac{GM}{r^2};\ \ N(u) = u^2 - \frac{2kT}{m} = u^2 - c^2$$

Bemerkung: Schallgeschwindigkeit c ausgezeichnet.

Bemerkung: Gleichung gilt auch für $u \mapsto -u$ ($\hat{=}$ „Akkretion")

Bemerkung: Gleichung nur sinnvoll lösbar für $N(u) \neq 0$ oder $N(u) = 0 \wedge Z(r) = 0$

Wegen:

$$Z(r_c) \overset{!}{=} 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{4kT}{mr_c} - \frac{GM}{r_c^2} = 0 \ \Rightarrow\ \boxed{r_c = \frac{GMm}{4kT}}\ \textbf{„kritischer Punkt"}$$

$$N(u_c) \overset{!}{=} 0 \ \Leftrightarrow\ u_c^2 - \frac{2kT}{m} = 0 \ \Rightarrow\ \boxed{u_c = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = c}\ \textbf{„kritische Geschwindigkeit"}$$

und $\quad \lim\limits_{r\to\infty} Z(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{r\to\infty}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right) = 0 \quad u(r\to\infty) = const.$

ergibt sich folgende **prinzipielle Lösungstopologie**:

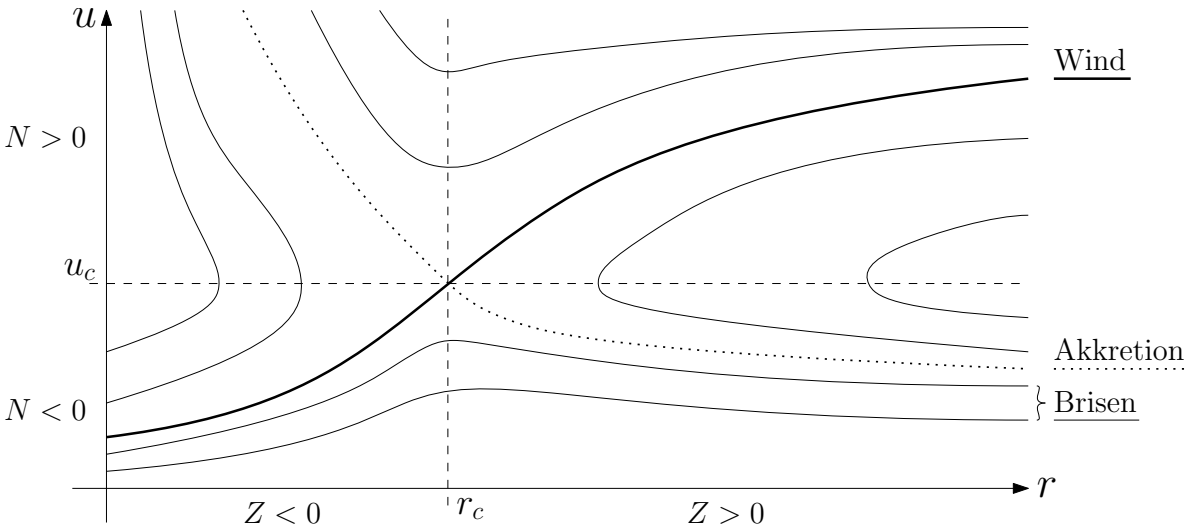

Abbildung 6.3: prinzipielle Lösungstopologie der Strömungsgeschwindigkeit des Sonnenwindes.

Steigung(en) der kontinuierlichen Lösungen in (r_c, u_c):

Idee: L'Hospital

$$\frac{1}{u}\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right|_{r_c} = \left.\frac{(\mathrm{d}Z/\mathrm{d}r)}{(\mathrm{d}N/\mathrm{d}r)}\right|_{r_c} = \frac{-\frac{4kT}{mr_c^2} + \frac{2GM}{r_c^3}}{2u\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right|_{r_c}}$$

$$\Rightarrow \left.\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right)^2\right|_{r_c} = \frac{GM}{r_c^3} - \frac{2kT}{mr_c} = \frac{(4kT)^3}{G^2M^2m^3} - \frac{2kT\,(4kT)^2}{G^2M^2m^3} = \frac{32k^3T^3}{G^2M^2m^3} > 0$$

$$\Rightarrow \left.\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right)\right|_{r_c} = \pm\sqrt{\frac{4}{G^2M^2}\left(\frac{2kT}{m}\right)^3} = \pm\frac{2u_c^3}{GM} = \pm\frac{u_c}{r_c}$$

Bemerkung: „±" für Wind-/Akkretionslösung

Bemerkung: Die Differentialgleichung erlaubt auch, das Vorzeichen von $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}$ in vier Bereichen eindeutig festzulegen:

Aus

	$r < r_c$	$r > r_c$
$u < c$	$Z < 0, N < 0$	$Z > 0, N < 0$
$u > c$	$Z < 0, N > 0$	$Z > 0, N > 0$

folgt

	$r < r_c$	$r > r_c$
$u < c$	$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} > 0$	$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} < 0$
$u > c$	$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} < 0$	$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} > 0$

Damit liegt die grundsätzliche Lösungstopologie fest, vgl. obige Abbildung.

Bemerkung: Die Existenz des Sonnenwindes wurde ansatzweise zuerst durch die sowjetische Sonde Lunik 2 (1959) und endgültig durch die amerikanische Sonde Mariner 2 (1962) nachgewiesen.

Mit dem Parker-Modell (und dessen moderneren, erweiterten Versionen) findet man die durch Messungen bestätigten **typischen Werte am Erdorbit**:

$$n(1\,\mathrm{AE}) \approx (5\text{ - }10)\,\mathrm{cm}^{-3}$$
$$u(1\,\mathrm{AE}) \approx (400\text{ - }600)\,\mathrm{km/s}$$
$$T(1\,\mathrm{AE}) \approx (50\text{ - }100)\cdot 10^3\,\mathrm{K}$$

Daraus ergibt sich ein **kontinuierlicher Massenverlust der Sonne** von:

$$\dot{M} \approx -(2\text{ - }3)\cdot 10^{-14}\,\frac{M_\odot}{\mathrm{Jahr}} \quad (\approx 10^9\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}})$$

Der durch Fusion und Abstrahlung bedingte Massenverlust ist allerdings etwa dreimal höher:

$$\frac{L_\odot}{c^2} \approx 6{,}7\cdot 10^{-14}\,\frac{M_\odot}{\mathrm{Jahr}}$$

Die Beschreibung anderer Sterne erfordert Erweiterungen des Parker-Modells, wie z.B. die Erweiterung der Impulsgleichung um den Strahlungsdruck (siehe z.B. das Buch von Prialnik (2000)):

$$u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} - \frac{GM}{r^2}\left(1 - \frac{\bar{k}\,\phi_S\,r^2}{c\,GM}\right)$$

Mit solchen und ähnlichen Modellen lassen sich **typische Massenverlustraten** abschätzen:

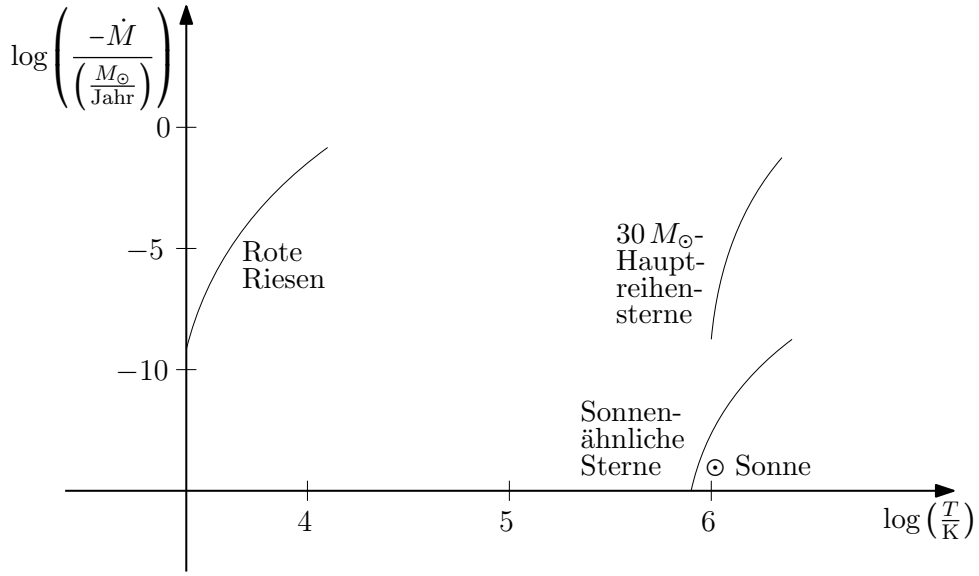

Abbildung 6.4: Typische Massenverlustraten in Abhängigkeit der Temperatur verschiedener Sterne.

6.1.3 Erweiterung des Parker-Modells: Magnetfeld

Dessen Berücksichtigung hat verschiedene Konsequenzen:

(1) **„Dipolfeld" der Sonne wird deformiert:**

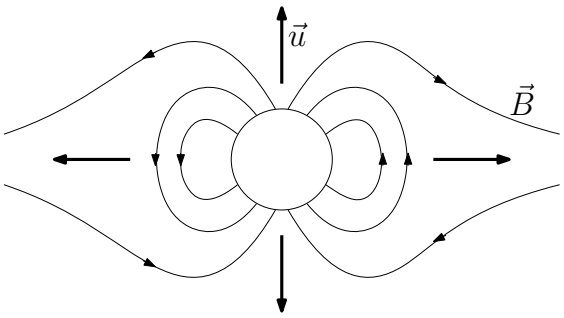

Abbildung 6.5: Dipolfeld der Sonne.

- Nahe der Sonne:
  - Plasmaeinschluss
- Wenn kin. Energiedichte des Sonnenwindes größer als mag. Energiedichte:
  - Feld wird mitgenommen („eingefroren")
  - Solares wird zu heliosphärischem Magnetfeld

(2) **Rotation bewirkt großräumige Spiralstruktur:**

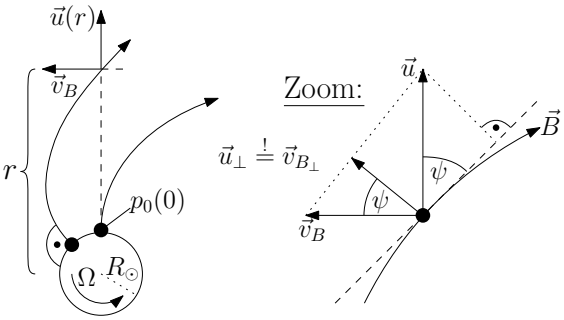

Abbildung 6.6: Spiralstruktur des solaren Magnetfeldes.

- Raumfestes Bezugssystem
  - radiale Windexpansion
  - Rotation des Magnetfeldes
- Mitrotierendes Bezugssystem
  - Strömung und Magnetfeld spiralförmig
  - „Eingefrorenheitsbedingung": keine Relativbewegung von Strömung und Magnetfeld

Eingefrorenheitsbedingung $\Rightarrow \vec{u}_\perp \stackrel{!}{=} \vec{v}_{B_\perp} \quad \Leftrightarrow \quad v_B \cos\psi = u \sin\psi$

$$\Rightarrow \tan\psi = \frac{v_B}{u} = \frac{\Omega(r - R_\odot)}{u}$$

Beobachtung bei $P_0(0)$ hat $v = \Omega R_\odot$

Zusammen mit der Divergenzfreiheit führt das auf das **interplanetare** oder **heliosphärische Magnetfeld** (Parker 1958):

$$\vec{B} = B_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \left(\vec{e}_r - \tan\psi\, \vec{e}_\phi\right)$$

(3) **Zusätzliche „kritische" Punkte (Flächen):**
... bei u = Geschwindigkeit der langsamen und schnellen Magnetoakustischen Wellen und der (Scher-) Alfvén-Welle (s. Kap. 9.2). Dies führte zum Weber & Davis (1967)-Modell.

6.2 Die Heliosphäre

Aufgrund der Existenz des Sonnenwindes stellt sich die Frage nach dessen **Anpassung an das umgebende interstellare Medium** (ISM).

Die Behandlung dieses Problems erfolgt praktischerweise im **Ruhesystem der Sonne**. In diesem bläst aufgrund der Relativbewegung der Sonne und des lokalen ISM ein sogenannter **interstellarer Wind**. Aufgrund der **Wechselwirkung** der beiden Plasmaströmungen

„Sonnenwind“ und „Interstellarer Wind“ füllt ersterer eine in etwa tropfenförmige, in Strömungsrichtung des interstellaren Windes elongierte Blase, die **Heliosphäre**. Letzere ist ein **Beispiel für Astrosphären**, also entsprechende Plasmablasen im ISM um andere Sterne, die heute indirekt auch beobachtet werden.

Die Heliosphäre ist berandet durch die sogenannte **Heliopause**, die den Rand derjenigen Region bezeichnet, die von der Sonne (bzw. ihrem Plasma) dominiert wird. In gewisser Weise **endet die Sonnenatmosphäre** erst dort.

Bemerkung: Es ist eine **„Interstellar Probe”** geplant, die noch in der ersten Hälfte diesen Jahrhunderts die Heliosphäre „lebend”, d.h. daten-übermittelnd, verlassen soll. Sie wird also die **erste „echte” astrophysikalische Sonde** sein.

6.2.1 Struktur der Heliosphäre

Wie schon früher in der Vorlesung beschrieben, ist die **Heliosphäre** derjenige Bereich des zirkumsolaren Raumes, der vom Sonnenwindplasma dominiert wird. Die globale Struktur der Heliosphäre ist bestimmt durch:

- den Sonnenwind (SW)
- das (lokale) interstellare Medium (LISM)
- die Relativbewegung zwischen Sonne und LISM

Im Ruhesystem der Sonne gilt schematisch:

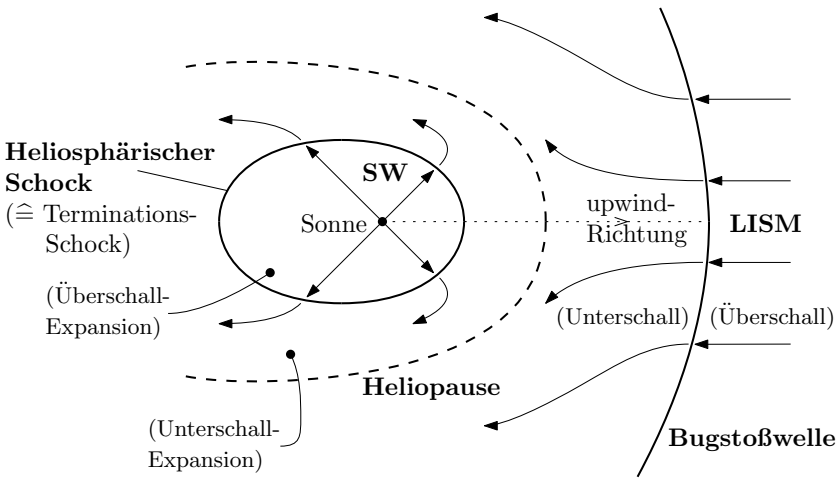

Abbildung 6.7: Schematische Struktur der Heliosphäre.

Typische Skalen in „upwind”-Richtung (siehe Skizze):

• Terminations-Schock	bei	$r \approx$	90	-	100	AE
• Heliopause	bei	$r \approx$	150	-	200	AE
• Bugstoßwelle	bei	$r \approx$	200	-	400	AE

Bemerkung: Die Strömung in den subsonischen Regionen der Heliosphäre lassen sich nach einer Idee von Parker wiefolgt beschreiben:

(I) Sonne ≙ Punktquelle einer Plasmaströmung
(II) LISM ≙ Homogene Plasmaströmung
(III) Strömungen im subsonischen Bereich inkompressibel und wirbelfrei

Dann gilt:

$$\vec{\nabla}(\rho\vec{u}) = 0 \overset{\text{(III)}}{\Leftrightarrow} \rho\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) = 0 \;\Rightarrow\; \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \ \vec{u} = -\vec{\nabla}\phi$$

Mit dem **Geschwindigkeitspotential**:

$$\phi(\vec{r}) \overset{\text{Zyl.-}}{\underset{\text{Koord.}}{=}} \phi(\rho,z) = \underbrace{\frac{K\,u_{LISM}}{\sqrt{\rho^2 + z^+}}}_{\text{Punktquelle}} + \underbrace{u_{LISM}\,z}_{\substack{\text{Homogene}\\ \text{Strömung}}}$$

$$\Rightarrow \vec{u}(\rho,z) - \vec{\nabla}\phi = \frac{K\,\rho\,u_{LISM}}{r^3}\vec{e}_\rho + \frac{u_{LISM}}{r^3}\left(Kz - r^3\right)\vec{e}_z$$

Dieser Ansatz beschreibt das in Abb. 6.8 gezeigte Strömungsfeld:

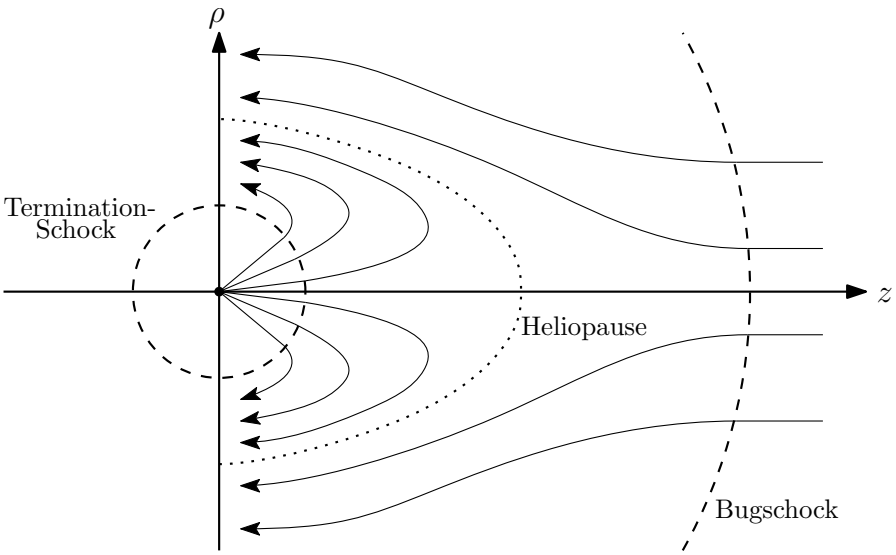

Abbildung 6.8: Schematische Schockstruktur der Heliosphäre

Exkurs: Stoßwellen (= Schockwellen = Schocks)

≙ Orte „sprunghafter" Änderungen der Zustandsgrößen eines Gases bzw. Plasmas mit Massendurchfluss

Betrachte 1-D, stationäre Gasströmung in x-Richtung ohne Quellen und Senken ($\vec{u} = u\,\vec{e}_x$)

Region 1	|	Region 2
$\lvert\vec{u}_1\rvert$	>	$\lvert\vec{u}_2\rvert$
ρ_1	<	ρ_2
T_1	<	T_2
P_1	<	P_2

Stoßwelle

Anschaulich: Infolge der Abbremsung erfolgt eine Verdichtung (Massenerhaltung) und Erwärmung (Energieerhaltung) des Plasmas und insgesamt damit auch eine Druckerhöhung (Zustandsgleichung).

Also:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad \overset{\rho = nm}{\Leftrightarrow} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(nm) = 0 \qquad \text{(K)}$$

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{u} = -\vec{\nabla} p - \underbrace{\frac{G\,M\,\rho}{r^2}}_{\ll |\vec{\nabla} p|} \vec{e}_r \quad \Rightarrow nmu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \qquad \text{(I)}$$

$$\text{Energiebilanz:} \quad \Rightarrow \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\mathrm{d}(pu)}{\mathrm{d}x} = u \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \qquad \text{(E)}$$

Integration liefert:

$$\text{(K)} \quad \int_{(nu)_2}^{(nu)_1} \left(\frac{\mathrm{d}(nu)}{\mathrm{d}x} \right) \mathrm{d}x = n_2 u_2 - n_1 u_1 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{n_2 u_2 = n_1 u_1}$$

$$\text{(I)} \quad nmu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \underbrace{mu \frac{\mathrm{d}(nu)}{\mathrm{d}x}}_{\text{„geschickte Null"}} + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0 \Leftrightarrow \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(mnu^2 + p) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{mn_1 u_1^2 + p_1 = mn_2 u_2^2 + p_2}$$

$$\text{(E)} \quad \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\mathrm{d}(pu)}{\mathrm{d}x} - u \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0 \overset{\text{(K,I)}}{\Leftrightarrow} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\mathrm{d}(pu)}{\mathrm{d}x} + \frac{m}{2} \frac{\mathrm{d}(nu^3)}{\mathrm{d}x} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\gamma}{\gamma - 1} u_2 p_2 + \frac{m}{2} n_2 u_2^3 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} u_1 p_1 + \frac{m}{2} n_1 u_1^3}$$

Mit der **Machzahl** $M = \frac{u}{c} \Rightarrow M^2 = \frac{u^2}{\gamma \frac{p}{\rho}} = \frac{nmu^2}{\gamma p}$, $\gamma = \frac{f+2}{f}$ ($f \mathrel{\hat{=}}$ Zahl der Freiheitsgrade)

$$\overset{\text{(I)}}{\Rightarrow} p_1 (1 + \gamma M_1^2) = p_2 (1 + \gamma M_2^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{p_2}{p_1} - \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}$$

$$\overset{\text{(E)}}{\Rightarrow} u_1 p_1 \left(1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1) M_1^2\right) = u_2 p_2 \left(1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1) M_2^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_2 p_2}{u_1 p_1} \overset{\text{(K)}}{=} \frac{n_1 p_2}{n_2 p_1} \overset{p = nkT}{=} \frac{T_2}{T_1} = \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_2^2}$$

Da nun $u = Mc \sim M\sqrt{T}$, folgt weiter

$$\left.\begin{aligned} &\frac{u_2}{u_1} = \frac{n_1}{n_2} = \left(\frac{M_2}{M_1}\right) \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \frac{M_2}{M_1} \sqrt{\frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_2^2}} \\ &\text{Andererseits} \\ &\frac{u_2}{u_1} = \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} = \frac{1 + (\gamma - 1) M_2^2}{1 + (\gamma - 1) M_1^2} \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_2^2} \end{aligned}\right\} \overset{!}{=} \Rightarrow M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}$$

Und somit schließlich:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{u_2}{u_1} &= \frac{n_1}{n_2} = \frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)M_1^2} \\ \frac{p_2}{p_1} &= \frac{2\gamma M_1^2-(\gamma-1)}{\gamma+1} \\ \frac{T_2}{T_1} &= \frac{\left[2+(\gamma-1)M_1^2\right]\left[2\gamma M_1^2-(\gamma-1)\right]}{(\gamma+1)^2 M_1^2} \end{aligned}}$$

Rankine-Hugoniot-Beziehungen

Im (oft vorliegenden) Fall, dass $\gamma = \frac{5}{3}$ (1-atomiges Gas $\Rightarrow f = 3$) und $M_1 \gg 1$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{u_2}{u_1} &= \frac{n_1}{n_2} \approx \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = \frac{1}{4} \\ \frac{p_2}{p_1} &\approx \frac{2\gamma}{\gamma+1}M_1^2 = \frac{5}{4}M_1^2 \gg 1 \\ \frac{T_2}{T_1} &\approx \frac{(\gamma-1)M_1^2\, 2\gamma M_1^2}{(1+\gamma)^2 M_1^2} = \frac{5}{16}M_1^2 \gg 1 \end{aligned}\right\} \mathrel{\hat{=}} \textbf{starker Schock}$$

Eine **Abschätzung der oben genannten Skalen** erfolgt mithilfe der **signifikanten Plasmaparameter**.

	Teilchenzahldichte	Geschwindigkeit	Temperatur
SW	$7\left(\frac{1\,\mathrm{AE}}{r}\right)^2 \mathrm{cm}^{-3}$	$400\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$	$10^5\left(\frac{1\mathrm{AE}}{r}\right)^{4/3}\mathrm{K}$
LISM	$0{,}15\,\mathrm{cm}^{-3}$	$26\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$	$8000\,\mathrm{K}$

Damit folgt für:

(1) Terminations-Schock

$$\underbrace{\rho u^2 - \underbrace{(4\rho)\left(\frac{u}{4}\right)^2}_{\text{starker Schock}}}_{\text{Staudruck}} = \frac{3}{4}\rho u^2 \overset{!}{=} \underbrace{p_{LISM} - p_{therm} + p_{mag} + p_{kosm.Str.}}_{\text{externer Druck}} \approx 1\,\frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{cm}^3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{4}\rho_{1\,\mathrm{AE}}\left(\frac{1\,\mathrm{AE}}{r}\right)^2 u_{1\,\mathrm{AE}}^2 = p_{LISM} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{r}{1\,\mathrm{AE}}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}\frac{(\rho u^2)_{1\,\mathrm{AE}}}{p_{LISM}}} \approx 92$$

(2) Heliopause, Bugschock

wesentlich bestimmt durch Einfluss von
- Magnetfeldstärke und -orientierung im LISM
- nicht-sphärische Geometrie

$\Rightarrow$ nur numerisch gut bestimmbar

Bemerkung: Da alle Planetenbahnen weit innerhalb der Terminations-Schockfläche liegen, ist die **äußere Grenze des Sonnensystems** nicht **identisch mit** der Plutobahn, sondern mit der **Heliopause** beschrieben.

7 Die Milchstraße

7.1 Großräumige Struktur

Die (100 - 300) $\cdot 10^9$ Sterne der Milchstraße sind nicht homogen verteilt, sondern in drei wesentlichen „Regionen”:

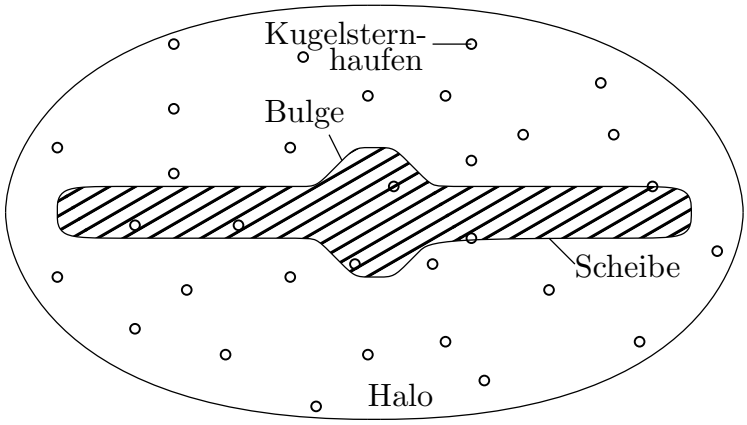

Abbildung 7.1: Schematische Darstellung der Struktur der Milchstraße.

- Sterne im Halo (in den Kugelsternhaufen mit $\gtrsim 10^5$ Sternen) haben sich früh gebildet (Population II) und damit vom Kollaps der protogalaktischen Wolke entkoppelt. Sterndichte in Kugelsternhaufen $\gtrsim 3500\,\frac{\text{Sterne}}{\text{pc}^3}$
- Sterne hauptsächlich in der Scheibe wegen Drehimpulserhaltung während des Kollaps. Sterndichte in Sonnennähe ca. $130\,\frac{\text{Sterne}}{1000\text{pc}^3} \approx 0{,}13\,\frac{\text{Sterne}}{\text{pc}^3}$
- Sterne im Bulge haben sich einerseits früh gebildet ($\hat{=}$ kleine „elliptische Galaxie”) und andererseits erst durch dynamische Instabilitäten der inneren Scheibe.
  Sterndichte im zentralen Bulge $\gtrsim$ (100 - 1000) $\frac{\text{Sterne}}{\text{pc}^3}$

Viele Galaxien (~ 70%) – insbesondere auch unsere Milchstraße – zeigen eine **Spiralstruktur**. Die „Spiralarme” werden aus jungen, hellen, heißen Sternen und HII-Regionen gebildet, sind also Sternentstehungsgebiete.
Wesentliche **Frage**: **Wie kann die Spiralstruktur (der Scheibe) erklärt werden?**

Bemerkung: Nicht in Sternhaufen oder Sternassoziationen befindliche Sterne (auch **Feldsterne** genannt) sind quasi-homogen in der Scheibe verteilt.

Bemerkung: Eine analoge Population von sogenannten **Halosternen** hat eine viel geringere Dichte, nämlich $3 \cdot 10^{-4}\,\frac{\text{Sterne}}{\text{pc}^3}$ ($\hat{\approx}$ 0,2% der Sterndichte in Sonnennähe).

7.2 Theorie der Spiralarme

Idee: Die sehr hohe Anzahl von Sternen (s.o.) erlaubt eine **hydrodynamische Beschreibung** (Lin & Shu 1964).

Bemerkung: Es wird dabei zunächst nicht zwischen „Sternengas“ und interstellarem Gas unterschieden.

Bemerkung: Eine kinetische Beschreibung oder auch eine auf einzelnen Trajektorien beruhende Modellierung der Stellardynamik ist ebenfalls möglich, aber im Wesentlichen auf numerische Untersuchungen beschränkt.

Die **Grundgleichungen** lauten hier:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \qquad \text{(Kontinuitätsgleichung)}$$

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\vec{\nabla} P - \rho \vec{\nabla} V \qquad \text{(Impulsgleichung)}$$

$$\Delta V = 4\pi G \rho \qquad \text{(Poissongleichung)}$$

Hierbei wird der thermische Druck p als Funktion von ρ formuliert (Polytropenansatz, s.u.), und V bezeichnen das **Selbstgravitationspotential**, also dasjenige, welches durch die Gesamtzahl aller Sterne (und letztlich auch der interstellaren Materie) bestimmt ist.

In den für das vorliegende Problem geeigneten **Zylinderkoordinaten** (r, φ, z) lauten die obigen Gleichungen:

$$\text{(K)} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho u_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} + \frac{\rho u_r}{r} = 0$$

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \rho \dfrac{\partial u_r}{\partial t} + \rho\left(u_r \dfrac{\partial u_r}{\partial r} + \dfrac{u_\varphi}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \varphi} + u_z \dfrac{\partial u_r}{\partial z} - \dfrac{u_\varphi^2}{r}\right) = -\dfrac{\partial P}{\partial r} - \rho \dfrac{\partial V}{\partial r} \\ \rho \dfrac{\partial u_\varphi}{\partial t} + \rho\left(u_r \dfrac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \dfrac{u_\varphi}{r}\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_z \dfrac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \dfrac{u_r u_\varphi}{r}\right) = -\dfrac{\partial P}{\partial \varphi} - \dfrac{\rho}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi} \\ \rho \dfrac{\partial u_z}{\partial t} + \rho\left(u_r \dfrac{\partial u_z}{\partial r} + \dfrac{u_\varphi}{r}\dfrac{\partial u_z}{\partial \varphi} + u_z \dfrac{\partial u_z}{\partial z}\right) = -\dfrac{\partial P}{\partial z} - \rho \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

$$\text{(P)} \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 4\pi G \rho$$

Für die folgenden Betrachtungen genügt es, eine unendlich dünne Scheibe zu betrachten.

Ansatz:
$$\rho(r,\varphi,z,t) = \sigma(r,\varphi,t)\delta(z)$$
$$P(r,\varphi,z,t) = P_S(r,\varphi,t)\delta(z)$$
$$\vec{u} \neq \vec{u}(z)$$
$$\tilde{V} = V(r,\varphi,z=0,t)$$

Integration $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \mathrm{d}z$ und Scheibendicke gegen Null führen unter Beachtung von z.B.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \rho}{\partial t}\,\mathrm{d}z = \frac{\partial \sigma}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(z)\,\mathrm{d}z = \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial(\rho u_r)}{\partial r}\,\mathrm{d}z = \frac{\partial(\sigma u_r)}{\partial r}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(z)\,\mathrm{d}z = \frac{\partial(\sigma u_r)}{\partial r}$$

auf folgende **reduzierte Gleichungen**

$$\text{(I)} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial(\sigma u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\sigma u_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\sigma u_r}{r} = 0$$

$$\text{(II)} \quad \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^2}{r} + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial P_S}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial r} = 0$$

$$\text{(III)} \quad \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r u_\varphi}{r} + \frac{1}{\sigma r}\frac{\partial P_S}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \varphi} = 0$$

$$\text{(IV)} \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 4\pi G\sigma\delta(z)$$

Die z-Komponente der Impulsgleichung fällt weg.

Mit Hilfe dieser Gleichungen lassen sich nun die Auswirkungen kleiner Störungen (Index 1) einer rotationssymmetrischen Lösung (Index 0) untersuchen, indem man eine **lineare Störungsrechnung** durchführt.

(i) $\sigma(r,\varphi,t) = \sigma_0(r) + \sigma_1(r,\varphi,t)$, $|\sigma_1| \ll \sigma_0$

(ii) $u_r(r,\varphi,t) = u_{r_1}(r,\varphi,t)$, $u_{r_0} = 0 \;\hat{=}\;$ keine radiale Geschw. des ungestörten Zustandes

(iii) $u_\varphi(r,\varphi,t) = u_{\varphi_0}(r) + u_{\varphi_1}(r,\varphi,t) = r\omega + u_{\varphi_1}(r,\varphi,t)$, $|u_{\varphi_1}| \ll r\omega$, ω : Winkelgeschw.

(iv) $P_S(r,\varphi,t) = P_{S_0}(r) + P_{S_1}(r,\varphi,t)$, $|P_{S_1}| \ll P_{S_0}$

(v) $V(r,\varphi,z,t) = V_0(r,z) + V_1(r,\varphi,z,t)$, $|V_1| \ll |V_0|$

Bemerkung: Die Beobachtungen zeigen, dass die Rotation der Sterne um das galaktische Zentrum keine starre Rotation ist, d.h. $\omega = \omega(r)$.

In 1. Ordnung (alle Terme ab 2. Ordnung in den Störgrößen vernachlässigt) gilt dann:

$$\text{(I')} \quad \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + \frac{\partial(\sigma_0 u_{r_1})}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\sigma_0 u_{\varphi_1})}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\sigma_1 u_{\varphi_0})}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_0 u_{r_1}}{r} = 0$$

$$\text{(II')} \quad \frac{\partial u_{r_1}}{\partial t} + \omega\frac{\partial u_{r_1}}{\partial \varphi} - 2\omega u_{\varphi_1} + \frac{1}{\sigma_0}\frac{\partial P_{S_1}}{\partial r} - \frac{\sigma_1}{\sigma_0^2}\frac{\partial P_{S_0}}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial r} = 0$$

$$\text{(III')} \quad \frac{\partial u_{\varphi_1}}{\partial t} + u_{r_1}\frac{\partial}{\partial r}(r\omega) + \omega\frac{\partial u_{\varphi_1}}{\partial \varphi} + \omega u_{r_1} + \frac{1}{\sigma_0 r}\frac{\partial P_{S_1}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial \varphi} = 0$$

$$\text{(IV')} \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial t}\left(r\frac{\partial V_1}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_1}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} = 4\pi G\sigma_1\delta(z)$$

Bemerkung: Die beiden u_{r_1}-Terme in (III') lassen sich zusammenfassen:

$$\begin{aligned} u_{r_1}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\omega) + \omega\right] &= u_{r_1}\left[r\frac{\partial \omega}{\partial r} + 2\omega\right] \\ &= u_{r_1}\frac{1}{2\omega}\left(4\omega^2\left[1 + \frac{1}{2}\frac{r}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial r}\right]\right) \\ &= u_{r_1}\frac{\kappa^2}{2\omega} \end{aligned}$$

wobei $\kappa = 2\omega\sqrt{1 + \frac{1}{2}\frac{r}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial r}}$ als **„Epizykelfrequenz“** bezeichnet wird. Es ist anschaulich die Frequenz, mit der ein Stern auf einer i.a. elliptischen Bahn um das galaktische Zentrum einen „Epizykel“ relativ zu einer Kreisbewegung mit $\omega(r)$ durchläuft.

Lin & Shu's Idee war nun, nach einer **selbstkonsistenten Lösung von (I') - (IV') in Spiralform** zu suchen. Dazu betrachteten sie die Störgrößen in der allgemeinen Form

$$f_1(r,\varphi,t) = Re\left[\hat{f}_1 \exp\left\{i\left(m\omega_p t - m\varphi + \phi(r)\right)\right\}\right]$$

mit $m \in \mathbb{N} \mathrel{\hat{=}}$ Zahl der Spiralarme

$\omega_p \mathrel{\hat{=}}$ Winkelgeschwindigkeit der spiralförmigen Störung

Die Funktion $\phi(r)$ definiert die Spiralform der Störung:

- Maximum von $f_1 = \hat{f}_1 \cos(0)$
- Wähle (o.B.d.A.) $m = 2$ und feste Zeit

$$\Rightarrow -2\varphi + \phi(r) = const. \quad \Rightarrow \varphi = \frac{\phi - const}{2} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} \quad \text{(i)}$$

- logarithmische Spirale ($\hat{=}$ konstanter Neigungswinkel ψ gegen Kreis)

$$r(\varphi) = R_0 \exp(a\varphi) \Rightarrow \varphi = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{r}{R_0}\right) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{ar} \quad \text{(ii)} \qquad (\tan\psi = a, \text{ s. Bem.})$$

$$\Rightarrow \phi(r) = \frac{2}{a}\ln\left(\frac{r}{R_0}\right) + const. \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} = \frac{2}{ar} \sim \frac{1}{r}$$

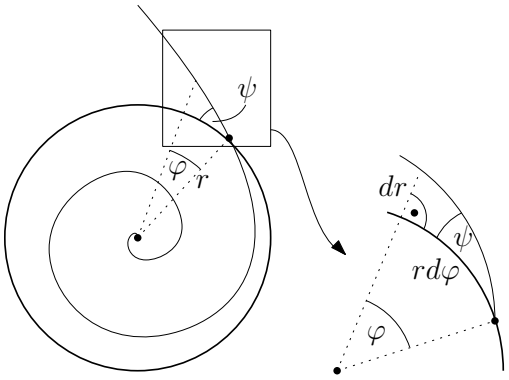

Abbildung 7.2: Neigungswinkel einer Spirale.

Bemerkung: Neigungswinkel einer Spirale

lokaler Winkel gegen einen entsprechenden Kreis

$$\tan\psi = \frac{\mathrm{d}r}{r\,\mathrm{d}\varphi} = \frac{1}{r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}}$$

Für die logarithmische Spirale gilt demnach:

$$\tan\psi = \frac{1}{r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}} = \frac{1}{r\left(\frac{1}{ra}\right)} = a = const.$$

Zunächst folgt allgemein mit diesem Störansatz z.B.:

$$\begin{aligned}(\text{I''}) \quad & im\omega_p\hat{\sigma}_1 \exp\{\} + \sigma_0\hat{u}_{r_1} i\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\exp\{\} + \frac{\mathrm{d}\sigma_0}{\mathrm{d}r}\hat{u}_{r_1}\exp\{\} + \\ & + \frac{\sigma_0}{r}\hat{u}_{\varphi_1} i(-m)\exp\{\} + \omega\hat{\sigma}_1(-im)\exp\{\} + \frac{\sigma_0}{r}\hat{u}_{r_1}\exp\{\} = 0\end{aligned}$$

Für (II') und (III') analoges Vorgehen führt auf

$$(\text{I''}) \quad [im(\omega_p - \omega)]\,\hat{\sigma}_1 + \left[i\sigma_0\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} + \frac{\mathrm{d}\sigma_0}{\mathrm{d}r} + \frac{\sigma_0}{r}\right]\hat{u}_{r_1} + \left[-\frac{\sigma_0}{r}im\right]\hat{u}_{\varphi_1} = 0$$

$$(\text{II''}) \quad [im(\omega_p - \omega)]\,\hat{u}_{r_1} + [-2\omega]\,\hat{u}_{\varphi_1} + \left[\frac{1}{\sigma_0}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\right]\hat{P}_{S_1} + \left[-\frac{1}{\sigma_0^2}\frac{\mathrm{d}P_{S_0}}{\mathrm{d}r}\right]\hat{\sigma}_1 + \left[i\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\right]\hat{V}_1 = 0$$

$$(\text{III''}) \quad [im(\omega_p - \omega)]\,\hat{u}_{\varphi_1} + \frac{\kappa^2}{2\omega}\hat{u}_{r_1} + \left[-\frac{im}{\sigma_0 r}\right]\hat{P}_{S_1} + \left[-\frac{im}{r}\right]\hat{V}_1 = 0$$

also ein lineares Gleichungssystem für die Störamplituden (die Poisson-Gleichung (IV') wird später betrachtet). Es werden folgende Vereinfachungen betrachtet:

(1) Isothermes (Sternen-) Gas:

$$P = nkT = \frac{kT}{m}\rho = c^2\rho \quad \Rightarrow P_S = c^2\sigma$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P_{S_1}}{\partial r} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial r}, \quad \frac{\partial P_{S_1}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varphi}$$

(2) Dichte der ungestörten Scheibe homogen: $\frac{\partial \sigma_0}{\partial r} = 0$

(3) Spiralarme eng gewunden: ψ klein $\Rightarrow \tan\psi \ll 1$

$$\Rightarrow \tan\psi = \frac{2}{r\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\right)} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} \gg \frac{2}{r} \gg \frac{1}{r}$$

Die Gleichungen (I") - (III") vereinfachen sich dann zu:

$$\text{(I''')} \quad [im(\omega_p - \omega)]\,\hat{\sigma}_1 + \left[i\sigma_0 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\right]\hat{u}_{r_1} = 0$$

$$\text{(II''')} \quad [im(\omega_p - \omega)]\,\hat{u}_{r_1} + [-2\omega]\,\hat{u}_{\varphi_1} + \left[\frac{i}{\sigma_0} c^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\right]\hat{\sigma}_1 + \left[i\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\right]\hat{V}_1 = 0$$

$$\text{(III''')} \quad [im(\omega_p - \omega)]\,\hat{u}_{\varphi_1} + \frac{\kappa^2}{2\omega}\hat{u}_{r_1} = 0$$

Die Lösung erhält man offenkundig zu:

$$\text{(I''') in (II''')} \quad [im(\omega_p - \omega)]\,\hat{u}_{r_1} + [-2\omega]\,\hat{u}_{\varphi_1} + \left[\frac{c^2}{im(\omega_p - \omega)}\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\right)^2\right]\hat{u}_{r_1} + \left[i\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\right]\hat{V}_1 = 0$$

$$\text{(III''')} \Rightarrow \quad \hat{u}_{\varphi_1} = -\frac{\kappa^2}{2\omega\,[im(\omega_p - \omega)]}\hat{u}_{r_1}$$

$$\Rightarrow [im(\omega_p - \omega)]^2\,\hat{u}_{r_1} + \left[\kappa^2\right]\hat{u}_{r_1} + \left[c^2\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\right)^2\right]\hat{u}_{r_1} + \left[-m(\omega_p - \omega)\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\right]\hat{V}_1 = 0$$

$$\Rightarrow \hat{u}_{r_1} = \frac{m(\omega_p - \omega)\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}}{\kappa^2 - [m(\omega_p - \omega)]^2 + c^2\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\right)^2}\hat{V}_1$$

Mit den Definitionen (Scheffler/Elsässer)

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} = K\ , \quad \nu\kappa = m(\omega_p - \omega)\ , \quad c^2\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\right)^2 = x\kappa^2$$

folgt

$$\hat{u}_{r_1} = \frac{K\nu\kappa}{\kappa^2 - \nu^2\kappa^2 + x\kappa^2}\hat{V}_1 = \frac{K}{\kappa}\hat{V}_1\frac{\nu}{1 - \nu^2 + x} \qquad \text{(L1)}$$

$$\overset{\text{(I''')}}{\Rightarrow} \quad \hat{\sigma}_1 = -\frac{K^2\sigma_0}{\kappa^2}\hat{V}_1\frac{1}{1 - \nu^2 + x} \qquad \text{(L2)}$$

$$\overset{\text{(III''')}}{\Rightarrow} \quad \hat{u}_{\varphi_1} = -\frac{\kappa^2}{2\omega i\nu\kappa}\frac{K}{\kappa}\hat{V}_1\frac{\nu}{1 - \nu^2 + x} = \frac{iK}{2\omega}\hat{V}_1\frac{1}{1 - \nu^2 + x} \qquad \text{(L3)}$$

Selbstkonsistenz erfordert, dass auch die Potentialgleichung (IV') erfüllt ist, was (nach längerer Rechnung, siehe Lin & Shu (1964)) auf

$$\hat{V}_1 = -2\pi G\frac{\hat{\sigma}_1}{|K|} \qquad \text{(L4)}$$

führt.

Bemerkung: Die physikalische Interpretation dieser Störung ist wiefolgt:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Spiralförmige}\\ \text{Potentialstörung}\\ V_1\end{array}} \begin{array}{c}\Rightarrow\\ \\ \Leftarrow\end{array} \boxed{\begin{array}{c}\text{Spiralförmige}\\ \text{Dichtestörung}\\ \sigma_1\end{array}}$$

Diese Selbstkonsistenz ist allerdings nur unter folgender Bedingung gegeben:

$$\text{(L4) in (L2)} \quad \Rightarrow \hat{\sigma}_1 \left[1 - \frac{2\pi G\sigma_0}{1-\nu^2+x}\frac{|K|}{\kappa^2}\right] = 0$$

$$\Rightarrow 1 - \nu^2 + x \overset{!}{=} \frac{2\pi G\sigma_0|K|}{\kappa^2} \quad \hat{=} \textbf{„Dispersionsrelation"}$$

In der ursprünglichen Notation gilt:

$$\boxed{[m(\omega_p - \omega)]^2 = \kappa^2 + c^2\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\right)^2 - 2\pi G\sigma_0\left|\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\right|} \qquad (*)$$

Da nun vorgegeben ist

- $\omega = \omega(r)$ $\hat{=}$ differentielle Rotation der Sterne
- $\kappa^2(r) = 4\omega^2\left[1 + \frac{r}{2\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r}\right]$
- c^2 $\hat{=}$ Temperatur des Sternengases
- $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}$ $\hat{=}$ vorgegebene Spiralform
- σ_0 $\hat{=}$ ungestörte (Fläche-) Dichte

ist Gleichung $(*)$ eine Bestimmungsgleichung für $\omega_p(r)$. **Nur für bestimmte Winkelgeschwindigkeiten des Spiralmusters ist eine selbstkonsistente Lösung möglich!**

Für unsere **Milchstraße** findet man (bzw. ergeben sich) folgende **typische Werte**:

- Umlaufzeit der Sonne um das galaktische Zentrum

  $T_\odot \approx 230 \cdot 10^6$ Jahre $\quad$ ($\hat{=}$ 1 „galaktisches Jahr")

  $\Rightarrow \omega_\odot \approx \omega(r \approx 8\,\mathrm{kpc}) = \frac{2\pi}{T_\odot} \approx 10^{-15}\mathrm{s}^{-1}$

  $\Rightarrow v_\odot \approx \omega_\odot \cdot 8\,\mathrm{kpc} \approx 230\,\mathrm{km/s}$

- Geschwindigkeit der spiralförmigen Dichtewelle bei $r = 8\,\mathrm{kpc}$:

  $v_p = \omega_p \cdot r \approx 110\,\mathrm{km/s}$

Grundsätzlich rotiert die Dichtewelle also etwa halb so schnell wie die Sterne, d.h. die jeweils sichtbaren Spiralarme werden zu verschiedenen Zeiten von verschiedenen Sternen (und Gas) gebildet.

Bemerkung: Dieses Ergebnis ist verständlich (erwartet?), da im anderen Falle – also Spiralarme stets durch dieselben Sterne geformt – die Spiralarme infolge der differentiellen Rotation der Sterne schnell „aufgewickelt" würden.

Bemerkung: Bis heute ist die Frage nach der **Ursache der die Spiralform bewirkenden Störung(en) nicht eindeutig geklärt**. Mögliche Kandidaten:

- äußere Störung durch Wechselwirkung mit Nachbargalaxien
- innere Störung durch Supernova-Explosionen

Bemerkung: Die Amplituden (L1) - (L4) der Spiralstörung werden bei $1-\nu^2+x=0$ bzw. bei $m(\omega_p-\omega)=\pm\kappa\sqrt{1+x}$ singulär. Diese sogenannten **Lindblad-Resonanzen** ergeben sich dann, wenn ein mit $\omega(r)$ rotierender Beobachter die Spiralarme (fast) genau mit „seiner" Epizykelfrequenz passieren sieht.

Bemerkung: Es besteht die Spekulation (!), dass die Spiralarmdurchgänge der Sonne Auswirkungen auf die Lebensbedingungen auf der Erde haben, da die abgeschätzten Zeiträume der Spiralarmdurchquerungen in etwa mit den Zeiträumen der sogenannten großen „Artensterben" zusammenfallen.

7.3 Hauptquellen der kosmischen Strahlung in der Milchstraße

Seit den Ballonflügen von Victor Hess im Jahre 1912 ist bekannt, dass eine hochenergetische Strahlung aus dem Weltraum auf die Erdatmosphäre trifft. Wie man heute weiß, handelt es sich um geladene Atomkerne (hauptsächlich Protonen), die in ihrer Gesamtheit die sogenannte **kosmische (Höhen-) Strahlung** bilden, mit folgendem **Energiespektrum**:

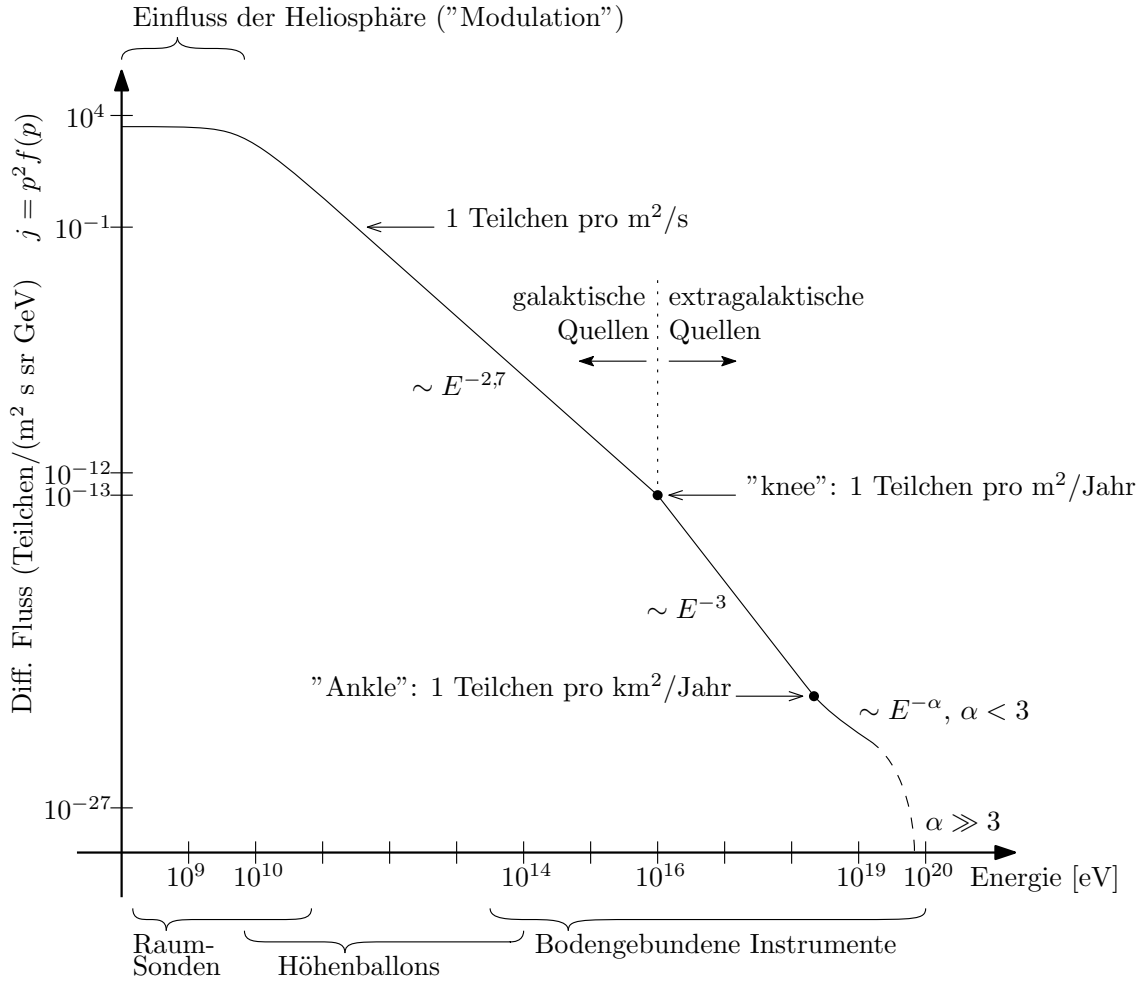

Abbildung 7.3: Energiespektrum der komischen Strahlung. $j=p^2f(p)$ ist der differentielle Fluss, p der Teilchenimpuls.

Die **Hauptquellen** galaktischer kosmischer Strahlung sind Supernovae („Sternexplosionen" bedingt durch den Kernkollaps massereicher Sterne). Die kosmischen Strahlungsteilchen werden an der durch die Explosion getriebenen Schockwelle auf die beobachteten Energien beschleunigt. Diese sogenannte **diffusive Schockbeschleunigung** ist von der **stochastischen**

Beschleunigung zu unterscheiden (die an stellaren Schocks beschleunigte Teilchen im interstellaren Medium nachbeschleunigen kann). Es gibt demnach zwei grundsätzlich zu unterscheidende Szenarien:

Fermi II

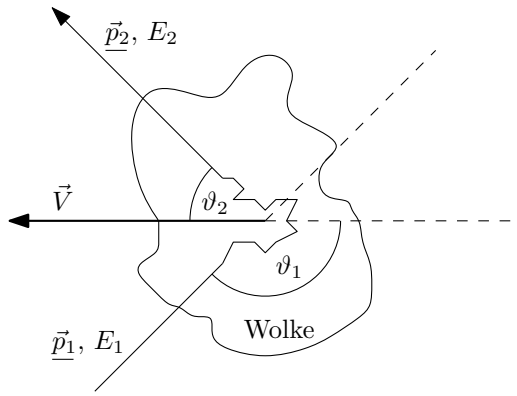

Abbildung 7.4: Fermi-II-Beschleunigung.

Stochastische Beschleunigung durch Kollision von Teilchen mit (interstellaren) Wolken (im Ruhesystem eines äußeren Beobachters) (Fermi 1949)

Fermi I

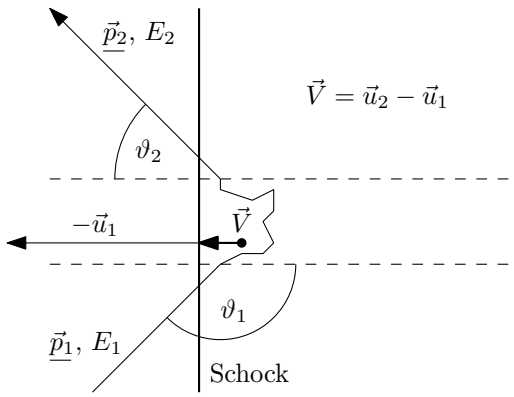

Abbildung 7.5: Fermi-I-Beschleunigung.

Schockbeschleunigung durch Kollisionen von Teilchen mit stellaren Schocks (im Ruhesystem eines Upstream-Beobachters) (Krimsky 1997, Axford u.a. 1977, Bell 1978, Blandford & Ostriker 1978)

7.3.1 Diffusive Schockbeschleunigung

Idee (für beide Prozesse): Im Ruhesystem von Wolke und Schock erfolgt eine elastische (stoßfreie) Wechselwirkung ohne Energieänderung (Umlenkung eines geladenen Teilchens im Magnetfeld).

Da die Teilchen auf relativistische Energien beschleunigt werden, wird zum Systemwechsel die **Lorentz-Transformation** herangezogen.

(i) Bewegung eines Systems S' mit Geschwindigkeit $\vec{V} = V\vec{e}_x$ relativ zu S

$$E = \gamma(E' + Vp'_x) \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad \beta = \frac{V}{c}$$

$$p_x = \gamma\left(p'_x + \frac{V}{c^2}E'\right) \quad , \quad p_y = p'_y \quad , \quad p_z = p'_z \quad ,$$

wobei $p_{x,y,z}$ die Komponenten des Teilchenimpulses bezeichnen. In Anwendung auf das einfallende Teilchen:

$$p'_{1x} = \frac{1}{\gamma}p_{1x} - \frac{V}{c^2}E'_1$$

$$\Rightarrow E_1 = \gamma E'_1 + Vp_{1x} - \gamma\frac{V^2}{c^2}E'_1 = \gamma\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)E'_1 + Vp_1\cos\vartheta_1$$

Da $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \approx p^2c^2$ für relativistische Teilchen $\quad \Rightarrow E_1 \approx \frac{1}{\gamma}E'_1 + V\frac{E_1}{c}\cos\vartheta_1$

$$\Rightarrow E'_1 \approx \gamma E_1\,(1 - \beta\cos\vartheta_1) \quad (\hat{=}\ \text{Energie im Ruhesystem } S' \text{ der Wolke}) \qquad (*)$$

(ii) Bewegung des Systems S mit Geschwindigkeit $-\vec{V}$ relativ zu S'

$$E' = \gamma(E - Vp_x)$$
$$p'_x = \gamma\left(p_x - \frac{V}{c^2}E'\right) \quad , \quad p_y = p'_y \quad , \quad p_z = p'_z$$

In Anwendung auf das gestreute Teilchen:

$$\text{analog zu (i)} \;\Rightarrow\; E_2 \approx \gamma E'_2\left(1 + \beta\cos\vartheta'_2\right) \qquad (**)$$

($E_2 \mathrel{\hat{=}}$ Energie im „äußeren Beobachter"-System S')

Erfolgt der **„Stoß"** ($\mathrel{\hat{=}}$ die Streuung, die Wechselwirkung) in S' **elastisch**, so gilt:

$$E'_1 = E'_2 \quad \underset{(**)}{\overset{(*)}{\Rightarrow}} \quad E_2 \approx \gamma^2 E_1(1 - \beta\cos\vartheta_1)(1 + \beta\cos\vartheta'_2)$$

und damit für den **relativen Energiezuwachs pro Streuung**:

$$\xi = \frac{E_2 - E_1}{E_1} = \frac{\Delta E}{E_1} = \gamma^2(1 - \beta\cos\vartheta_1 + \beta\cos\vartheta'_2 - \beta^2\cos\vartheta_1\cos\vartheta'_2) - 1$$

Um sich von den Einfalls- und Streurichtungen bzw. -winkeln zu befreien, wird eine **Mittelung über** $\cos\vartheta_1$ **und** $\cos\vartheta'_2$ durchgeführt.

- zu betrachtende (Winkel-) Intervalle:

$$\begin{array}{lcl} -1 \le \cos\vartheta_1 \le 0 & \mathrel{\hat{=}} & 90° \le \vartheta_1 \le 180° \\ & \mathrel{\hat{=}} & \text{Teilchen kommt aus Upstream-Region} \\ 0 \le \cos\vartheta'_2 \le 1 & \mathrel{\hat{=}} & 0° \le \vartheta'_2 \le 90° \\ & \mathrel{\hat{=}} & \text{Teilchen wird in Upstream-Region gestreut} \end{array}$$

- Wahrscheinlichkeiten P für Einfall/Streuung aus/in Richtung $\cos\vartheta_1/\cos\vartheta'_2$:

$$\left.\begin{array}{l} P(\cos\vartheta_1) = -2\cos\vartheta_1 \\ P(\cos\vartheta'_2) = 2\cos\vartheta'_2 \end{array}\right\} \mathrel{\hat{=}} \begin{array}{l}\text{Größe eines Flächenelements auf der Schockfläche} \\ \text{aus Richtung } \cos\vartheta_1 \text{ bzw. } \cos\vartheta'_2\end{array}$$

  mit Normierungsfaktor 2, sodass

$$\int_{-1}^{0} P(\cos\vartheta_1)\,\mathrm{d}\cos\vartheta_1 = \int_{0}^{1} P(\cos\vartheta'_2)\,\mathrm{d}\cos\vartheta'_2 = 1$$

- die **resultierenden Mittelwerte** ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \langle\cos\vartheta_1\rangle &= \int_{-1}^{0} P(\cos\vartheta_1)\cos\vartheta_1\,\mathrm{d}\cos\vartheta_1 \\ &= -2\int_{-1}^{0}\cos^2\vartheta_1\,\mathrm{d}\cos\vartheta_1 = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\langle\cos\vartheta'_2\right\rangle &= \int_{0}^{1} P(\cos\vartheta'_2)\cos\vartheta'_2\,\mathrm{d}\cos\vartheta'_2 \\ &= -2\int_{0}^{1}\cos^2\vartheta'_2\,\mathrm{d}\cos\vartheta'_2 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Mittelt man den relativen Energiezuwachs entsprechend, findet man:

$$\begin{aligned}\langle\xi\rangle &= \gamma^2\left(1+\frac{2}{3}\beta+\frac{2}{3}\beta+\frac{4}{9}\beta^2\right)-1\\ &= \frac{1+\frac{4}{3}\beta+\frac{4}{9}\beta^2}{1-\beta^2}-1\\ &= \frac{1+\frac{4}{3}\beta+\frac{4}{9}\beta^2-1+\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{\frac{4}{3}\beta+\frac{13}{9}\beta^2}{1-\beta^2} \overset{(1)}{\approx} \frac{4}{3}\beta \qquad (1): \left(\frac{V}{c}\right)^2 \ll \frac{V}{c}\end{aligned}$$

Da $\langle\xi\rangle$ also proportional zu $\frac{V}{c}$, spricht man bei diffuser Schockbeschleunigung auch von **„Fermi-Beschleunigung 1. Ordnung** (bzw. 1. Art) oder kurz von **„Fermi I"** (-Beschleunigung).

Bemerkung: Für Fermi II ergibt sich analog

$$\langle\xi\rangle \approx \frac{4}{3}\beta^2$$

was die Bezeichnungen erklärt.

Die aus der Schockbeschreibung **resultierenden Spektren** ergeben sich wiefolgt:

(i) Wenn pro Streuung gilt, $\Delta E \approx \langle\xi\rangle E$, folgt für die Energie E_n nach n Streuungen

$$E_n = E_0(1+\langle\xi\rangle)^n \Leftrightarrow n = \ln\left(\frac{E_n}{E_0}\right)/\ln(1+\langle\xi\rangle)$$

(ii) Sei die Wahrscheinlichkeit, aus der Downstream-Region (per Konvektion) zu entkommen P_{esc}, dann ist die Wahrscheinlichkeit, noch nach n Streuungen dort zu bleiben $(1-P_{esc})^n$.

Damit ist der Anteil der Teilchen, die zu Energien $\gtrsim E_n$ beschleunigt werden

$$N(E_n) \sim \sum_{m=n}^{\infty}(1-P_{esc})^m$$

Es gilt nun:

$$\begin{aligned}\sum_{m=n}^{\infty}(1-P_{esc})^m &= \sum_{m=0}^{\infty}(1-P_{esc})^m - \sum_{m=0}^{n-1}(1-P_{esc})^m\\ &= \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty}(1-P_{esc})^m}_{\text{unendl. geom. Reihe}} - \underbrace{\sum_{m=1}^{n}(1-P_{esc})^{m-1}}_{\text{endl. geom. Reihe}}\end{aligned}$$

Da für die unendliche geometrische Reihe gilt

$$\sum_{m=0}^{\infty}(1-P_{esc})^m = \frac{(1-P_{esc})n-1}{(1-P_{esc})-1} = -\frac{(1-P_{esc})^n-1}{P_{esc}} = \frac{1}{1-(1-P_{esc})} = \frac{1}{P_{esc}}$$

folgt

$$\sum_{m=n}^{\infty}(1-P_{esc})^m = \frac{1}{P_{esc}} + \frac{(1-P_{esc})^n-1}{P_{esc}} = \frac{(1-P_{esc})^n}{P_{esc}}$$

Also:

$$N(E) \sim \frac{(1-P_{esc})^n}{P_{esc}} = \frac{1}{P_{esc}}\left[(1-P_{esc})^{\ln(E_n/E_0)}\right]^{1/\ln(H\langle\xi\rangle)}$$

$$= \frac{1}{P_{esc}}\left[\left(\frac{E_n}{E_0}\right)^{\ln(1-P_{esc})}\right]^{1/\ln(H\langle\xi\rangle)}$$

Trick: $a^{\ln b} = b^{\ln a}$ weil
$\ln\left(a^{\ln b}\right) = \ln\left(b^{\ln a}\right) \Leftrightarrow \ln b \ln a = \ln a \ln b$

$$= \frac{1}{P_{esc}}\left(\frac{E_n}{E_0}\right)^{-\gamma}$$

mit

$$\gamma = \frac{\ln\left(\frac{1}{1-P_{esc}}\right)}{\ln(1+\langle\xi\rangle)} \approx \frac{P_{esc}}{\langle\xi\rangle}$$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \approx x$
$-\ln(1-x) = -\left(-\left[x + \frac{x^2}{2} + \ldots\right]\right) \approx x$

Insgesamt findet man demnach

$$\boxed{N(E) \sim E^{-\gamma}}$$

Der Spektralindex γ muss vom Kompressionsverhältnis des beschleunigenden Schocks abhängen. Das sieht man wiefolgt:

$$\gamma = \frac{P_{esc}}{\langle\xi\rangle}$$

$\langle\xi\rangle$ haben wir oben bestimmt. P_{esc} folgt aus folgender Überlegung:

(i) Gesamtfluss (Teilchen $/m^2/s$) auf Schockeinheitsfläche

$$F_{in} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}(n_{CR}c\cos\vartheta)\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= \frac{n_{CR}c}{4\pi}\frac{1}{2}2\pi = \frac{n_{CR}c}{4}$$

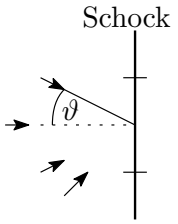

Abbildung 7.6: Einfallswinkel auf Schockfläche.

(ii) Gesamtfluss von Fläche fort (Konvektion):

$$F_{out} = n_{CR}u_2$$

$$\underset{\text{(i),(ii)}}{\Rightarrow} P_{esc} = \frac{F_{out}}{F_{in}} = \frac{n_{CR}u_2}{n_{CR}c/4} = \frac{4u_2}{c}$$

Demnach:

$$\gamma \approx \frac{P_{esc}}{\langle\xi\rangle} = \frac{4u_2}{c}\frac{3}{4\beta} = 3\frac{u_2}{u_1-u_2} = \frac{3}{s-1}$$

Kompressionsverhältnis am Schock $s = \frac{u_1}{u_2}$

Damit ist $\gamma \neq \gamma(E)$ und es ergibt sich ein Potenzgesetz für $N(E)$. Damit dann auch ein Potenzgesetz im sogenannten (differentiellen) Fluss j (Teilchen/m^2/s/sr/MeV):

$$N(p) = 4\pi\int_0^p p'^2 f(p')\,\mathrm{d}p' \;, \quad j = p^2 f(p) \;\hat{=}\; \textbf{„diff. Intensität"}$$

$$\Rightarrow j = \frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}p} \underset{\boxed{E \approx pc}}{\sim} p^{-\gamma-1} \underset{\boxed{\gamma = \frac{3}{s-1}}}{=} p^{-\left(\frac{3}{s-1}+\frac{s-1}{s-1}\right)} = p^{-\frac{2+s}{s-1}} \sim E^{-\frac{2+s}{s-1}} = E^{-\alpha}$$

$$N \sim E^{-\gamma} \sim p^{-\gamma}$$

also ein Potenzgesetz wie beobachtet (vgl. Abb. 7.3)

Bemerkung: Da der (wahrscheinlich) Supernovaschock-beschleunigte Teil der kosmischen Strahlung $\alpha = 2{,}7$ hat, findet man

$$\alpha = \frac{2+s}{s-1} \;\Rightarrow\; \alpha(s-1) = 2+s \;\Rightarrow\; s = \frac{2+\alpha}{\alpha-1} \approx \frac{4{,}7}{1{,}7} \approx 2{,}8$$

was im Widerspruch zum erwarteten starken Schock mit $s \lesssim 4$ stünde. Auflösung: Am Schock erwartet man $j \sim E^{-\gamma}$, $\gamma \approx 2{,}0 - 2{,}2$ und Propagationseffekte (s.u.) führen zu $\alpha = 2{,}7$.

7.3.2 Beschleunigungszeitskala der diffusiven Schockbeschleunigung

Im **Gleichgewicht** gilt:

Teilchentransport durch

- **Konvektion** mit dem Plasma auf der Upstream-Seite in positiver x-Richtung
- **Diffusion** von der Schockfläche in die Upstream-Region in negative x-Richtung

kompensieren sich exakt.

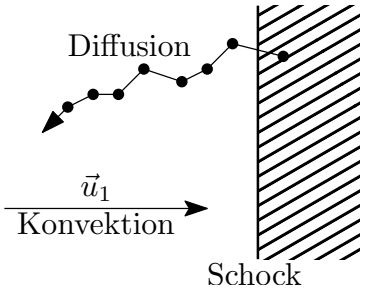

Abbildung 7.7: Konvektion auf und Diffusion von Schockfläche.

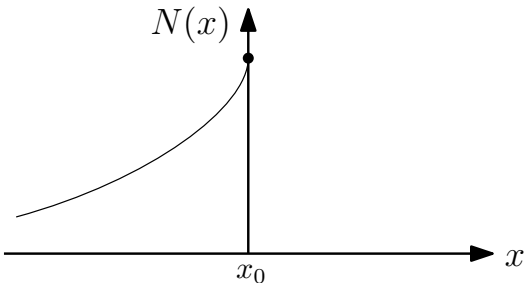

Abbildung 7.8: Teilchenzahl-Verlauf in der Upstream-Region.

Dies lässt sich quantitativ wiefolgt beschreiben:

$$\underbrace{\vec{u}_1 n_{CR}}_{\substack{\text{Konvektions-}\\\text{fluss}\\(|\vec{u}_1|=const.)}} - \underbrace{\kappa_1 \vec{\nabla} n_{CR}}_{\substack{\text{Diffusions-}\\\text{fluss}\\(\kappa_1=const.)}} = 0 \quad \overset{\text{1-D}}{\Rightarrow} \quad \kappa_1 \frac{\mathrm{d}n_{CR}}{\mathrm{d}x} = u_1 n_{CR}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n_{CR}}\frac{\mathrm{d}n_{CR}}{\mathrm{d}x} = \frac{u_1}{\kappa_1} \qquad \Big| \int_x^{x_0} \ldots \mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{n_{CR}(x_0)}{n_{CR}(x)}\right) = \frac{u_1}{\kappa_1}(x_0 - x)$$

$$\Rightarrow \boxed{n_{CR}(x) = n_{CR}(x_0)\exp\left(\frac{u_1}{\kappa_1}(x-x_0)\right)}$$

Daraus folgt die **Gesamtzahl der Teilchen pro Einheitsfläche auf der Upstream-Seite**

$$\int_{-\infty}^{x_0} N(x_0)\exp\left(\frac{u_1}{\kappa_1}(x-x_0)\right)\mathrm{d}x = N(x_0)\frac{\kappa_1}{u_1}\left[\exp\left(\frac{u_1}{\kappa_1}(x-x_0)\right)\right]_{-\infty}^{x_0} = \frac{\kappa_1}{u_1}N(x_0)$$

Für den **Fluss der kosmischen Strahlungsteilchen durch die Schockfront in die Downstream-Region** gilt:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \underbrace{\left[\frac{cN(x_0)}{4\pi}\cos\vartheta\right]}_{\substack{\text{Projektion eines}\\ \text{isotropen Flusses}\\ \text{auf die Schockfläche}}} \mathrm{d}\cos\vartheta\ \mathrm{d}\varphi = \frac{cN(x_0)}{4}$$

Damit gilt dür die mittlere Verweildauer eines kosmischen Strahlungsteilchens in der Upstream-Region:

$$\tau_1 \approx \frac{\frac{\kappa_1}{u_1}N(x_0)}{\frac{cN(x_0)}{4}} = \frac{4\kappa_1}{cu_1}$$

Eine analoge Betrachtung für die Downstream-Region liefert

$$\tau_2 \approx \frac{4\kappa_2}{cu_2}$$

sodass die Zeit für einen „Zyklus" $\tau = \tau_1 + \tau_2 = \frac{4}{c}\left(\frac{\kappa_1}{u_1} + \frac{\kappa_2}{u_2}\right)$ ist. Dabei gewinnt ein Teilchen im Mittel

$$\langle\xi\rangle = \frac{\Delta E}{E} \approx \frac{4}{3}\beta = \frac{4}{3}\frac{u_1 - u_2}{c}$$

an Energie. Damit ergibt sich die **Beschleunigungszeit** zu:

$$\boxed{t_B = \frac{E}{\Delta E/\tau} = \frac{\tau}{\langle\xi\rangle} = \frac{3}{u_1 - u_2}\left(\frac{\kappa_1}{u_1} + \frac{\kappa_2}{u_2}\right)}$$

Unter der (groben) Annahme, dass $\kappa_1 = \kappa_2 \approx \kappa$ gilt $\left(\frac{u_1}{u_2} = s\right)$:

$$t_B \approx \frac{3s(1+s)}{s-1}\frac{\kappa}{u_1^2}$$

Für die Beschleunigung von Teilchen an einem Supernova-Schock gelte

$$s = 4\ , \qquad u_1 \approx 10000\,\mathrm{km/s}$$

$$\kappa \approx \frac{1}{3}\lambda v \approx \frac{1}{3}r_L c \approx \frac{1}{3}\frac{p}{qB}\varepsilon \approx \frac{E}{3qB} \approx 10^{19}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$$

Bohm-Diffusion: $\lambda \mathrel{\hat{=}}$ mittlere freie Weglänge, $v \mathrel{\hat{=}}$ Teilchengeschwindigkeit

$E = 10\,\mathrm{TeV}$, $B \approx 0{,}3\,\mathrm{nT}$, $q = e$

Also

$$t_B \approx 20\frac{10^{19}\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}}{10^{14}\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = 2\cdot 10^6\,\mathrm{s} \lesssim 1\,\mathrm{Monat}$$

Für $E = 10^{15}\,\mathrm{eV} = 10^5(10\,\mathrm{TeV})$ also $t_B = 2\cdot 10^{11}\,\mathrm{s} \approx 6600$ Jahre

Bemerkung: Die Beschleunigungszeit kann durch die „Lebensdauer" des Supernova-Schocks begrenzt sein.

Bemerkung: Auch am „Terminations-Schock" des Sonnenwindes (s.o.) werden Teilchen diffusiv beschleunigt. Dort gilt:

$$s \approx 2{,}5 \quad , \qquad u_1 \approx 400\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

$$\kappa \approx 5 \cdot 10^{16}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}} \quad (10\,\mathrm{MeV}\text{-Teilchen})$$

$$\Rightarrow t_B \approx 17 \frac{5 \cdot 10^{16}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}}{16 \cdot 10^{10}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} \approx 5 \cdot 10^6\,\mathrm{s} \approx 2\,\mathrm{Monate}$$

8 Transport kosmischer Strahlung

Zur Beschreibung des Transports kosmischer Strahlungsteilchen

- von der Quellregion weg durch das interstellare Medium
- durch die Heliosphäre

wird eine Transportgleichung benötigt. Letztere kann z.B. aus der Vlasov-Gleichung (s.o.) unter der Annahme einer Wechselwirkung der energiereichen Teilchen per Lorentzkraft $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ mit dem turbulenten Hintergrundmedium ($\hat{=}$ interstellares oder interplanetares Medium mit $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1 = \vec{B}_0 + \delta\vec{B}$; $\vec{E} = \delta\vec{E}$) hergeleitet werden (z.B. Schlickeiser 1989 oder Schlickeiser 2002).

In einer allgemeinen Notation lautet diese **Transport-Gleichung** für **isotrope Verteilungsfunktionen** $f = f(\vec{r},p,t)$:

$\frac{\partial f}{\partial t}$	$= \vec{\nabla} \cdot \left\{ \overleftrightarrow{\kappa} \vec{\nabla} f \right\}$	räumliche Diffusion mit Diffusions-Tensor
	$-\vec{u} \cdot \vec{\nabla} f$	Konvektion mit Geschwindigkeit des Hintergrundmediums
	$-\vec{u}_{dr} \cdot \vec{\nabla} f$	Drift der geladenen Teilchen
	$+\frac{1}{3}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\right) p \frac{\partial f}{\partial p}$	adiabatische Energieänderungen
	$+\frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}\left\{p^2 D \frac{\partial f}{\partial p}\right\}$	Impulsdiffusion
	$+S(\vec{r},p,t)$	Quellen und Senken
	$-\frac{\partial}{\partial p}(\dot{p} f)$	$\dot{p} \hat{=}$ Impulsgewinn-/verlustrate
	$-\frac{1}{\tau_F} f$	$\tau_F \hat{=}$ Zeitskala für Verlust durch Fragmentation
	$-\frac{1}{\tau_r} r$	$\tau_r \hat{=}$ Zeitskala für Verlust durch radioaktiven Zerfall

8.1 Die Transportprozesse

8.1.1 (Räumliche) Diffusion

$\hat{=}$ „Random Walk" eines kosmischen Strahlungsteilchens infolge der Streuung an Plasmaturbulenzen (oft beschrieben als Wechselwirkung mit Plasmawellen, s.u.), der durch einen **Diffusionstensor** beschrieben wird. In lokalen kartesischen Koordinaten gilt:

$$\kappa_{ij} = \lim_{t \to \infty} \frac{\langle (\Delta x_i)(\Delta x_j) \rangle}{2t}$$

Oft wählt man z entlang eines externen Magnetfeldes und x und y senkrecht dazu. Dann gilt im Falle ausschließlicher „paralleler" und „senkrechter Diffusion":

$$\overleftrightarrow{\kappa} = \begin{pmatrix} \kappa_\perp & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_\parallel \end{pmatrix}$$

Isotrope (und damit skalare) Diffusion hat man für $\kappa_\perp = \kappa_\parallel$. Im Falle der oft vorliegenden magnetostatischen Turbulenz ($\hat{=}$ räumliche Verteilung der turbulenten Magnetfelder $\delta\vec{B}$ zeitunabhängig; $\delta\vec{E} = \vec{0}$) gilt formal:

$$\overleftrightarrow{\kappa} = \overleftrightarrow{\kappa}(\delta\vec{B},\vec{r},t)$$

Die $\delta\vec{B}$ werden entweder vorgegeben oder aus einem Modell des Turbulenztransportes berechnet.

8.1.2 Konvektion

Neben ihrer eigenen Bewegung im Plasmaruhesystem (z.B. in Form der Wellenausbreitung) bewegen sich die Streuzentren mit dem Plasma, also mit dessen makroskopischer hydrodynamischer Geschwindigkeit $\vec{u}$. Diese Bewegung überträgt sich durch die Streuung auf die kosmischen Strahlungsteilchen.

8.1.3 Driftbewegung

Infolge von Gradienten im Hintergrundplasma kommt es zu Driften des Gyrationszentrums eines kosmischen Strahlungsteilchens. Die wichtigsten sind die **Gradienten- und Krümmungsdrift** in einem inhomogenen Magnetfeld. Sie werden beschrieben durch den Ausdruck:

$$\vec{u}_{dr} = \frac{pc}{3q}\frac{\beta}{B}\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{B}\right)$$

Weitere Driften existieren z.B. in Form von Neutralflächendriften oder turbulenz-induzierten Driften.

8.1.4 Adiabatische Energieänderung

Kosmische Strahlungsteilchen verlieren/gewinnen Energie in divergierenden/konvergierenden Plasmaströmungen infolge der Verdünnung/Verdickung der Streuzentren. Dieser Effekt verschwindet also für $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$.

Bemerkung: Der diskutierte Prozess der diffusiven Schockbeschleunigung ($\hat{=}$ Fermi-I) wird in der Transportgleichung durch das Zusammenspiel der Diffusions-, Konvektions- und adiabatischen Energieänderungsterme beschrieben.

8.1.5 Impulsdiffusion

$\hat{=}$ „Random Walk" eines kosmischen Strahlungsteilchens (infolge der Streuung an Plasmaturbulenz) im Impulsraum, der durch den skalaren Impulsdiffusionskoeffizienten

$$D = \lim_{t\to\infty} \frac{(\Delta p)^2}{2t}$$

beschrieben wird. Es gilt formal $D = D(\delta\vec{B},\vec{r},t)$. Dieser Prozess entspricht der stochastischen Fermi-II-Beschleunigung.

8.1.6 Quellen und Senken

Quellen kosmischer Strahlungsteilchen sind z.B. Supernova-Schocks, stellare Wind-Terminationsschocks und allgemein alle Teilchenbeschleunigungs-Regionen. Senken sind i.A. Umverteilungen im Impuls- (bzw. Energie- bzw. Geschwindigkeits-) Raum (z.B. durch sogenannten Ladungsaustausch bzw. -transfer) oder Entweichvorgänge, also Teilchenverluste durch Verlassen des untersuchten Gebietes (z.B. Milchstraße, Helio- oder Astrosphäre).

8.1.7 Impulsänderungen

... durch Wechselwirkung mit anderen Teilchen. Während diese in der Heliosphäre vernachlässigbar sind, sind für den Fall interstellarer Propagation in der Milchstraße die Impulsverluste durch Ionisation des Hintergrundplasmas und durch Pionen-Produktion von Bedeutung.

8.1.8 Fragmentation und radioaktiver Zerfall

Alle nicht elementaren kosmischen Strahlungsteilchen können durch Stöße oder radioaktiven Zerfall in leichtere Teilchen zerfallen. Man bezeichnet diese Prozesse als „katastrophale Verluste".

8.2 Parker-Transportgleichung

In Anwendung auf die Heliosphäre war es wieder Parker, der 1965 die heute sogenannte **Parker-Gleichung** formulierte:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \left(\overleftrightarrow{\kappa} \vec{\nabla} f \right) - (\vec{u} + \vec{u}_{dr}) \cdot \vec{\nabla} f + \frac{1}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \frac{\partial f}{\partial \ln p} + S(\vec{r}, p, t)}$$

Nachdem die Gültigkeit dieser Gleichung durch Vergleich ihrer Lösungen mit zahlreichen, über Jahrzehnte gewonnenen Messdaten bestätigt ist, steht in der gegenwärtigen Forschung die Bestimmung der Transportparameter (die wiederum den Diffusionstensor $\overleftrightarrow{\kappa}$ und Driftgeschwindigkeit $\vec{u}_{dr}$ bestimmen) im Vordergrund. Die wesentliche Herausforderung besteht in der Bestimmung der turbulenten elektromagnetischen Felder $\delta\vec{B}$ ud $\delta\vec{E}$. Diese lassen sich näherungsweise als Überlagerung von Wellen im Plasma beschreiben. Letzte werden in einfachster Form im Rahmen der Magnetohydrodynamik zugänglich, deren Grundlagen daher Gegenstand des folgenden Kapitels sind.

9 Magnetohydrodynamik

9.1 Grundgleichungen

In Erweiterung der Hydrodynamik (vgl. Kap. 6) werden im Falle eines aus geladenen Teilchen bestehenden Fluids die Erzeugung elektromagnetischer Felder infolge der Ladungs- und Stromverteilungen und die Wechselwirkung der Teilchen mit elektromagnetischen Feldern (Lorentz-Kraft) berücksichtigt. Das führt zunächst (bei Vernachlässigung von Reibung und Wärmeleitung, Gravitationskraft und Quelltermen) auf das Gleichungssystem:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) = 0 \\
&\rho\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = -\vec{\nabla}P + \overbrace{\frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla}\times\vec{B})}^{\vec{j}\,\hat{=}\,\text{Stromdichte}}\times\vec{B} \\
&\frac{\partial P}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})P = -\gamma P(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) + \frac{\gamma-1}{\sigma}\underbrace{\frac{1}{\mu_0^2}(\vec{\nabla}\times\vec{B})^2}_{\vec{j}^2} \\
&\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma\mu_0}\Delta\vec{B} + \vec{\nabla}\times(\vec{u}\times\vec{B})
\end{aligned}}$$

Grundgleichungen der „resistiven MHD"
$\left(\sigma \neq \infty \Rightarrow \frac{1}{\sigma} \neq 0\right)$

Zusätzlich zur HD wird also:

- in der Impulsgleichung die Lorentz-Kraft $\vec{j}\times\vec{B}$ berücksichtigt
- in der Energiegleichung die Joule'sche Heizung hinzugefügt
- das Gleichungssystem um eine Entwicklungsgleichung für das magnetische Feld $\vec{B}$ erweitert.

Die Gleichung für die zeitliche Entwicklung des Magnetfeldes $\vec{B}$ lässt sich wiefolgt interpretieren:

$$\underbrace{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{\substack{\text{zeitliche}\\ \text{Änderung}}} = \underbrace{\frac{1}{\sigma\mu_0}\Delta\vec{B}}_{\substack{\text{Diffusion von}\\ \text{magnet. Fluss}}} + \underbrace{\vec{\nabla}\times(\vec{u}\times\vec{B})}_{\substack{\text{Konvektion von}\\ \text{mag. Fluss mit}\\ \text{Plasmageschw.}\vec{u}}}$$

Bei endlicher Leitfähigkeit $\sigma < \infty$ führt der erste Term auf der rechten Seite über die dann nicht verschwindende „Diffusion" des Magnetfeldes zum Phänomen der **„Rekonnexion"** von magnetischen Feldlinien, d.h. deren „Umverbindung":

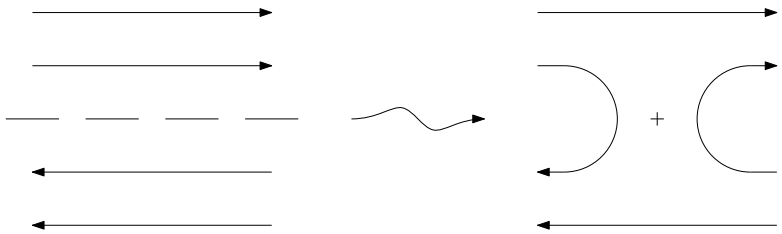

Abbildung 9.1: Rekonnexion magnetischer Feldlinien.

Infolge eines sehr großen Wertes von $\Delta\vec{B}$, z.B. bei Stromschichten, kann es auch für vergleichsweise hohe Leitfähigkeiten noch zur Rekonnexion kommen.

Im Unterschied dazu beschreibt der zweite Term die konvektive „Mitnahme“ des Magnetfeldes durch das sich bewegende Plasma; man spricht auch vom **„in das Plasma eingefrorenen Magnetfeld“**.

In astrophysikalischen Plasmen ist die elektrische Leitfähigkeit üblicherweise sehr hoch, sodass die Näherung $\sigma = \infty$ verwendet werden kann. In diesem Grenzfall erhält man die **ideale MHD**, deren Grundgleichungen gegeben sind durch:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) = 0\\
&\rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = -\vec{\nabla}P + \frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla}\times\vec{B})\times\vec{B}\\
&\frac{\partial P}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})P = -\gamma P(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})\\
&\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times(\vec{u}\times\vec{B})
\end{aligned}}$$

Grundgleichungen der „idealen MHD”
$\left(\sigma = \infty \Rightarrow \frac{1}{\sigma} = 0\right)$

Aus der Kontinuitätsgleichung und der Druck-(Energie-)Gleichung folgt $P = K\rho^\gamma$, also eine polytropische Zustandsgleichung (vgl. 3.1).

Die Wirkung der Lorentz-Kraft $\vec{j}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla}\times\vec{B})\times\vec{B}$ kann durch Umformung dieses Terms veranschaulicht werden:

$$\frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla}\times\vec{B})\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} - \vec{\nabla}\left(\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}\right)$$

$$\boxed{\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})}$$

Aufgrund der formalen Ähnlichkeit, die die Zusammenfassung $-\vec{\nabla}P - \vec{\nabla}\left(\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}\right) = -\vec{\nabla}\left(P + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}\right)$ erlaubt, wird $\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$ als **„magnetischer Druck”** bezeichnet.

Der Term $\frac{1}{\mu_0}(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$ beschreibt hingegen die sogenannte **„magnetische Spannung”**, die die Tendenz gekrümmter Feldlinien quantifiziert, ihre Krümmung zu verringern. Diese Spannung wirkt entlang der Feldlinien, der magnetische Druck hingegen senkrecht zu diesen.

Mit Blick auf die Bestimmung der Transportkoeffizienten in der Transportgleichung kosmischer Strahlung ist nun insbesondere die Bestimmung von Störungen $\delta\vec{B}$ im Plasma von Interesse. Im Rahmen der MHD lassen sich nur wenige (aber fundamentale) Störungen erfassen, denn es gilt die **Grundannahme der MHD**:

> Felder und Flüssigkeit fluktuieren auf denselben Zeit- und Längenskalen, die durch die massereichen, also trägeren Ionen bestimmt sind.

Bemerkung: Eine Berücksichtigung der geringeren Trägheit der Elektronen kann nicht im Rahmen der MHD erfolgen und führt auf eine **Zwei-Flüssigkeitsbeschreibung**. Diese erlaubt dann die Behandlung von gegenüber der MHD-Zeitskala schnellen Fluktuationen – also einer Vielzahl von weiteren **Plasmawellen**.

9.2 Ideale MHD-Wellen

Betrachtet sei ein statischer, stationärer Plasmazustand mit

$$\rho_0 = const. \; ; \quad \vec{B}_0 = B_0\vec{e}_x \; , \; B_0 = const. \; , \quad P_0 = const. \; , \quad \vec{u}_0 = \vec{0}$$

der durch $\vec{u}_1 = u_{1y}\vec{e}_y = \hat{u}_1 \exp\{-i\omega t \pm ikx\}\,\vec{e}_y$, $\hat{u}_1 = const.$ gestört sei.

In **1. Ordnung** lauten die idealen MHD-Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\text{(I)} && \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot(\rho_0\vec{u}_1) \overset{\rho_0=const.}{=} -\rho_0\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}_1\right) \\
&\text{(II)} && \rho_0\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} = -\vec{\nabla}P_1 + \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}_0\right)\times\vec{B}_1 + \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}_1\right)\times\vec{B}_0 \underset{hom.}{\overset{\vec{B}_0}{=}} -\vec{\nabla}p_1 + \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}_1\right)\times\vec{B}_0 \\
&\text{(III)} && \frac{\partial P_1}{\partial t} = -\vec{u}_1\cdot\left(\vec{\nabla}P_0\right) - \gamma P_0\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}_1\right) \overset{P_0=const.}{=} -\gamma P_0\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}_1\right) \\
&\text{(IV)} && \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\left(\vec{u}_1\times\vec{B}_0\right)
\end{aligned}$$

Nun gilt:

$$\text{(i)} \quad u_{1y} = u_{1y}(x,t) \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{u}_1 = \frac{\partial u_{1y}}{\partial y} = 0 \begin{cases} \overset{\text{(I)}}{\Rightarrow} & \dfrac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0 \Rightarrow \hat{\rho}_1 = 0 \Rightarrow \rho_1 = 0 \\ \overset{\text{(III)}}{\Rightarrow} & \text{analog } P_1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -u_{1y}B_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_0\dfrac{\partial u_{1y}}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} = \pm ikB_0u_{1y}\vec{e}_y \Rightarrow \vec{B}_1 = \mp\frac{k}{\omega}B_0u_{1y}\vec{e}_y$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i\dfrac{k^2}{\omega}B_0u_{1y} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}_1\right)\times\vec{B}_0 = -\frac{i}{\mu_0}\frac{k^2}{\omega}B_0^2u_{1y}\vec{e}_y$$

Die zugehörige **Dispersionsrelation** ergibt sich durch Einsetzen in (II):

$$\Rightarrow i\omega\rho_0u_{1y} = -\frac{i}{\mu_0}\frac{k^2}{\omega}B_0^2u_{1y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{B_0^2}{\mu_0\rho_0}k^2 =: V_A^2k^2 \underset{\vec{k}=k\vec{e}_x}{=} V_A^2k_\parallel^2} \quad \textbf{Dispersionsrelation von Alfvén-Wellen}$$

$\vec{V}_A = \dfrac{\vec{B}_0}{\sqrt{\mu_0\rho_0}}$ wird als **Alfvéngeschwindigkeit** bezeichnet.

Die damit beschriebenen **Alfvén-Wellen** sind also Störungen in $\vec{u}$ und in $\vec{B}$, aber nicht in ρ – diese Fluktuationen sind also **inkompressibel**. Diese Wellen breiten sich entlang des ungestörten Feldes mit der Alfvén-Geschwindigkeit aus mit dazu senkrechten Störungen.

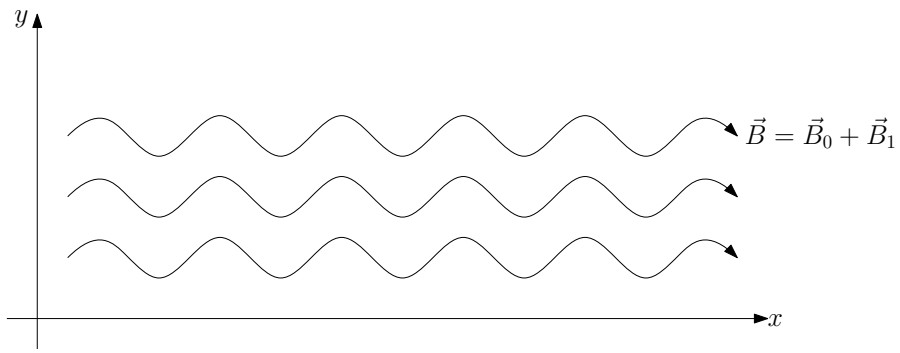

Abbildung 9.2: Veranschaulichung der Alfvén-Wellen.

Bemerkung: Die Rückstellkraft auf die gestörten magnetischen Feldlinien resultiert aus der Spannung derselben.

Bemerkung: Die Alfvén-Wellen wurden 1942 von Hannes Alfvén vorhergesagt und 1949 erstmals im Labor nachgewiesen. Ihr Nachweis in Sonnenwindplasmen gelang 1969 durch Analyse von Daten der Raumsonde Mariner 5.

Betrachtet man die **alternative Störung**

$$\vec{u}_1 = \hat{u}_1 \exp\left\{-i\omega t \pm iky\right\} \vec{e}_y$$

findet man analog:

$$\text{(i)} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_1 = \frac{\partial u_{1y}}{\partial y} = \pm iku_{iy} \neq 0 \begin{cases} \overset{\text{(IV)}}{\Rightarrow} P_1 = \pm\gamma P_0 \dfrac{k}{\omega} u_{1y} = \pm c_S^2 \dfrac{k}{\omega} \rho_0 u_{1y} \text{ mit } c_S = \sqrt{\gamma \dfrac{P_0}{\rho_0}} \\ \Rightarrow \rho_1 = c_S^{-2} p_1 \end{cases}$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \mp ikB_0 u_{1y} \vec{e}_x \Rightarrow \vec{B}_1 = \pm \frac{k}{\omega} B_0 u_{1y} \vec{e}_x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu_0} \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}_1\right) \times \vec{B}_0 = -\frac{i}{\mu_0} \frac{k^2}{\omega} B_0^2 u_{1y} \vec{e}_y$$

Die zugehörige **Dispersionsrelation** lautet (Einsetzen in (II)):

$$\boxed{\omega^2 = \left(c_S^2 + V_A^2\right) k^2 \underset{\vec{k}=k\vec{e}_y}{=} \left(c_S^2 + V_A^2\right) k_\perp^2}$$

Dispersionsrelation von schnellen magnetosonischen Wellen

Die damit beschriebenen schnellen **magnetosonischen Wellen** sind also Störungen in allen Plasmagrößen und damit auch kompressibel. Sie breiten sich senkrecht zum Magnetfeld mit der Geschwindigkeit $\pm\sqrt{c_S^2 + V_A^2}$ aus.

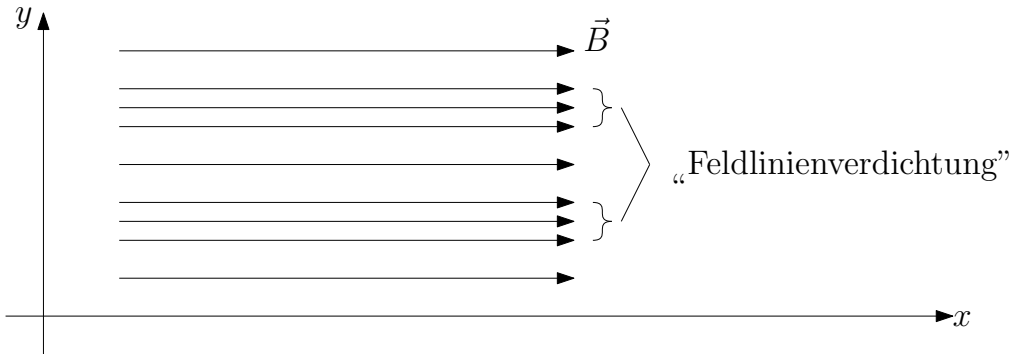

Abbildung 9.3: Veranschaulichung der schnellen magnetosonischen Wellen.

Bemerkung: Die Rückstellkraft auf die gestörten magnetischen Feldlinien resultiert aus dem magnetischen Druck.

Bemerkung: Die betrachteten Spezialfälle lassen sich auf beliebigen Winkel zwischen Ausbreitungs- und Magnetfeldrichtung verallgemeinern. Dabei tritt dann auch noch eine langsame magnetosonische Welle auf.

Bemerkung: Diese idealen MHD-Wellen werden im Sonnenwindplasma beobachtet.

Die idealen MHD-Wellen stellen die Grundform von Schwingungen im Plasma dar und sind somit Beispiele für die in Kapitel 8 erwähnten Störungen $\delta\vec{B}$.

Bemerkung: Zur Simulation von turbulenten Störungen $\delta\vec{B}$ für numerische Rechnungen werden z.B. eine Vielzahl solcher Wellenmoden überlagert. Das so beschriebene Feld $\vec{B} = \vec{B}_0 + \delta\vec{B}$ kann dann in die Bewegungsgleichungen von Teilchen eingesetzt werden (Lorentz-Kraft) – deren Lösung liefert dann die Trajektorien kosmischer Strahlungsteilchen.

9.3 Kopplung von thermischem Plasma und kosmischer Strahlung

Die 2. Momentengleichung der Transportgleichung der kosmischen Strahlung erlaubt die Berechnung des zugehörigen Druckes:

$$\boxed{\frac{\partial P_{CR}}{\partial t} = \vec{\nabla}\cdot\left\{\tilde{\overleftrightarrow{\kappa}}\vec{\nabla}P_{CR}\right\} - \left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)P_{CR} - \gamma\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right)P_{CR} \quad ; \quad \gamma = \frac{4}{3}}$$

mit: $P_{CR} = \frac{4\pi}{3}\int\limits_0^\infty (fvp)\,p^2\,\mathrm{d}p$

$$\tilde{\kappa}_{ij} = \frac{\int\limits_0^\infty \left(\kappa_{ij}(p)\vec{\nabla}f\right)vp^3\,\mathrm{d}p}{\int\limits_0^\infty \left(\vec{\nabla}f\right)vp^3\,\mathrm{d}p}$$

Formal ergänzt diese Gleichung die MHD-Gleichungen, die im Falle einer Kopplung um zwei Terme erweitert werden müssen:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) = 0 \\
&\rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = -\vec{\nabla}P + \frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla}\times\vec{B})\times\vec{B} \quad \overbrace{-\vec{\nabla}P_{CR}}^{\text{„Impulsübertrag" auf therm. Plasma}} \\
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho\vec{u}^2 + \frac{P}{\gamma-1}\right) + \vec{\nabla}\cdot\left\{\vec{u}\left(\frac{1}{2}\rho\vec{u}^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}\right)P\right\} = \underbrace{-\vec{u}\cdot\vec{\nabla}P_{CR}}_{\text{„Energieübertrag" auf therm. Plasma}} \\
&\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times(\vec{u}\times\vec{B})
\end{aligned}}$$

Bemerkung: Aktueller Stand der Forschung (2021) ist, dass diesem Gleichungssystem noch Gleichungen für die Turbulenzgrößen (z.B. $\delta\vec{B}$) hinzugefügt werden...