

Grundlagen der Elektrodynamik

April 2018

Vorbemerkung: Dieses Skript basiert auf den Vorlesungen im Modul „Grundlagen der Mechanik und Elektrodynamik“. Die Inhalte werden in dieser Form seit dem Sommersemester 2006 an der Ruhr-Universität Bochum angeboten. Es wurde in der vorliegenden LaTeX-Version von Alexander Aab, Caroline Fink, Steffen Meyer und David L. Pohl erstellt.

Das vorliegende Skript kann (und soll ☺) kein Lehrbuch ersetzen. Insbesondere ist es nicht so gründlich Korrektur gelesen wie manches Buch. Daher sind wir dankbar für jeden Hinweis auf (wahrscheinlich noch existierende) Fehler.

Inhaltsverzeichnis

1	Historische Einführung	1
2	Die Maxwell-Gleichungen	3
2.1	Die Grundgesetze der Elektrodynamik	3
2.1.1	Das Coulomb-Gesetz	3
2.1.2	Das Ampère-Gesetz	5
2.1.3	Das Faraday-Gesetz	5
2.1.4	Quellenfreiheit des Magnetfeldes	6
2.2	Mathematischer Exkurs: Vektoranalysis	6
2.2.1	Der Nabla-Operator und die vektoranalytischen Operatoren	6
2.2.2	Der Gauß'sche Satz	7
2.2.3	Der Stokes'sche Satz	8
2.3	Anwendung der Sätze von Gauß und Stokes	9
2.4	Der Maxwell'sche Verschiebungsstrom	9
2.5	Die Maxwell-Gleichungen	10
3	Elektrostatik	13
3.1	Anwendung des Gauß'schen Satzes	13
3.2	Direkte Lösung der 1. Maxwell-Gleichung	14
3.3	Superpositionsprinzip und Coulomb-Gesetz	15
3.4	Das elektrische Potential	16
3.5	Die mathematische Beschreibung einer Punktladung: die δ -Funktion	18
3.6	Randwertprobleme	20
3.6.1	Verhalten von $\vec{E}(\vec{r})$ und $\Phi(\vec{r})$ an Grenzflächen	21
3.6.2	Poisson- und Laplace-Gleichungen	23
3.6.3	Die Methode der Spiegelladung(en)	24
3.7	Der elektrische Dipol	27
4	Magnetostatik	29
4.1	Anwendung des Stokes'schen Satzes	29
4.2	Direkte Lösung der Maxwell-Gleichungen	30
4.3	Das magnetische Vektorpotential	32
4.4	Das Biot-Savart-Gesetz	34
4.5	Die Kraft auf einen Strom im Magnetfeld	36
4.6	Verhalten von $\vec{B}(\vec{r})$ und $\vec{A}(\vec{r})$ an Grenzflächen	37
5	Elektrodynamik	39
5.1	Die elektrodynamischen Potentiale	39
5.2	Eichtransformationen	41
5.3	Erhaltungssätze in der Elektrodynamik	42
5.4	Ein kurzer Überblick über elektromagnetische Wellen im Vakuum	44
5.4.1	Homogene Wellengleichung	44
5.4.2	Ebene Wellen	44
5.4.3	Polarisation ebener Wellen	47

6	Spezielle Relativitätstheorie: Kovariante Formulierung	49
6.1	Der Minkowski-Raum	49
6.1.1	Vierervektoren	49
6.1.2	Die Eigenzeit	51
6.2	Vierergeschwindigkeit, Viererimpuls und Viererkraft	51
6.3	Viererstromdichte und Viererpotential	52
6.4	Der Feldstärketensor	53
6.5	Die Lorentz-Transformation der Felder	55

1 Historische Einführung

Elektrische und magnetische Wechselwirkungen waren bereits im alten Griechenland (v.Chr.) bekannt:

- Reibungselektrizität bei Bernstein (gr.: “ηλεκτρον” = “Elektron“)
- Eisenanziehung durch Magnetstein (aus der Provinz “μαγνησια” = “Magnesia“)

⋮

1186	Alexander Neckham:	erste geschriebene Erwähnung eines Kompass
1269	Pierre de Maricourt:	Magnet-„Pole“ (Experiment mit kugelförmigen Magneten)
1600	William Gilbert:	- Erde ist selbst ein Magnet \Rightarrow Erklärung für den Kompass - nicht nur Bernstein zeigt „Reibungsanziehung“ - Vorschlag diese Kraft „elektrisch“ zu nennen
1663	Otto von Guericke:	ebenfalls elektrische Abstoßung
1785	Charles Aug. Coulomb:	$\vec{F} \sim \frac{qQ}{ \vec{r}-\vec{r}_q ^3}(\vec{r}-\vec{r}_q)$
1820	Hans Chr. Oersted:	elektrischer Strom hat magnetische Wirkung
1830	André-Marie Ampère:	$\vec{\nabla} \times \vec{B} \sim \vec{j}$
1831	Michael Faraday:	$\vec{\nabla} \times \vec{E} \sim \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
1873	James Clerk Maxwell:	Maxwell-Gleichungen
1881	Joseph John Thompson:	$\vec{F} = \frac{1}{2} q (\vec{v} \times \vec{B})$
1889	Oliver Heaviside:	$\vec{F} = q (\vec{v} \times \vec{B})$
1891	Hendrik A. Lorentz:	$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

Bemerkung: Der Aufbau der Vorlesung erfolgt nach der Formulierung der Maxwell-Gleichungen analog zur geschichtlichen Entwicklung:

- Aufstellung der Maxwell-Gleichungen
- Elektrostatik ($\rho \neq 0, \vec{j} = 0, \frac{\partial}{\partial t} = 0$)
- Magnetostatik ($\rho \neq 0, \vec{j} \neq 0, \frac{\partial}{\partial t} = 0$)
- Elektrodynamik ($\rho \neq 0, \vec{j} \neq 0, \frac{\partial}{\partial t} \neq 0$)

Zur Einordnung der Elektrodynamik

... ins Studium:

Eine der vier Theorievorlesungen:

klassische Mechanik, klassische Elektrodynamik, Quantenmechanik, statistische Physik

... in die Physik:

Beschreibung einer der vier fundamentalen Wechselwirkungen:

gravitative W.:	Alltagserfahrung, Planetensystem, ...	} „makroskopisch“
elektromagn. W.:	Alltagserfahrung, Atombau, Technik, ...	
schwache W.:	β -Zerfall, Neutrinooszillationen	} „mikroskopisch“
starke W.:	Kernkräfte	

... in die Vereinheitlichung physikalischer Theorien:

Erste gelungene Vereinheitlichung ursprünglich verschiedener Gesetze der Physik:

klassische Elektrodynamik $\hat{=}$ Theorie der Elektrizität, des Magnetismus und der Optik

... in die Feldtheorie:

Existenz **elektromagnetischer Strahlung** belegt die „Realität“ von elektrischen und magnetischen Feldern (unabhängig von ihren Quellen). Statt der Untersuchung der Kräfte zwischen elektrischen Ladungen steht die Untersuchung der elektrischen und magnetischen Felder selbst im Vordergrund.

2 Die Maxwell-Gleichungen

2.1 Die Grundgesetze der Elektrodynamik

Vor der Aufstellung der Maxwell-Gleichungen wurden die Grundgesetze der Elektrodynamik zunächst individuell formuliert:

2.1.1 Das Coulomb-Gesetz

Coulomb fand 1785 experimentell für die Kraft zwischen geladenen Kugeln mit der Ladung q und Q :

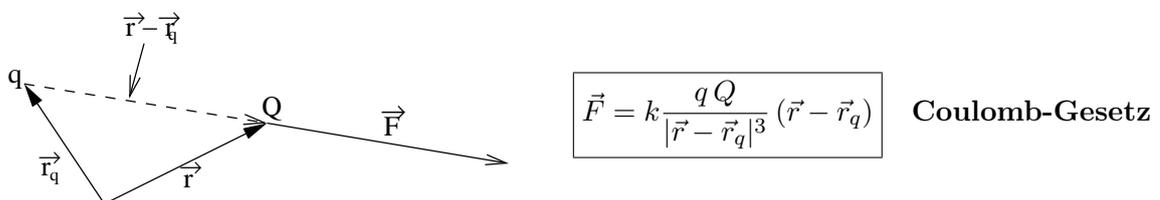


Abbildung 2.1: Kraftrichtung

falls q und Q sich abstoßen, also, wie bereits früher erwähnt (vgl. Mechanik Kapitel ??), eine zum Gravitationsgesetz analoge Form, die aber (je nach Vorzeichen von q und Q) beide Kraftrichtungen zulässt.

Bemerkung: Die Gültigkeit des Coulomb-Gesetzes ist gut bestätigt (siehe z.B. Rebhan 12.1.7, S.427):

- $\vec{E} = 0$ innerhalb eines Faraday'schen Käfigs
- QED: $m = 0 \Leftrightarrow |\vec{E}| \sim \frac{1}{r^2}$
- Messung: $m \lesssim 8 \cdot 10^{-52}$ kg, gültig bis $r \approx 2,5 \cdot 10^8$ m
- Abstand von Spektrallinien liefert Gültigkeit bis $r \approx 10^{-17}$ m

Daraus folgt, dass das Coulomb-Gesetz über mindestens 25 Größenordnungen gültig ist.

Bemerkung: Ein Wort zu den Einheiten (siehe z.B. Jackson): Man unterscheidet das **cgs- bzw. Gauß-System**: $k = 1$
Ladungseinheit („statcoulomb“) ist aus cm, g, s abgeleitet
SI- bzw. MKSA-System: $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$; $\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$
Ladungseinheit („Coulomb“): $1 C = 1 As$

Um die elektrische Wechselwirkung mit den anderen fundamentalen Wechselwirkungen zu vergleichen (vgl. Mechanik Kapitel ??), ist eine Energiebetrachtung hilfreich:

Idee:
$$\text{Energie} = \text{Kraft} \cdot \text{Weg} = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Man hat für

- die **elektrostatische Wechselwirkungsenergie** zweier Ladungen $q = Q = e$ im Abstand r voneinander: $W_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$
- die **typische Bindungsenergie der Kernkraft** mit der Lichtgeschwindigkeit $c = 2,9979 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ und dem Planck'schen Wirkungsquantum $h = 6,6261 \cdot 10^{-34} Js$:
 $W_e = \frac{h \cdot c}{2\pi r} = \hbar \frac{c}{r}$
- die gravitative Energie zwischen zwei Protonen: $W_g = G \frac{m_p^2}{r}$

so dass

$$\frac{W_e}{W_k} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \alpha \approx \frac{1}{137} \quad (\hat{=} \text{Sommerfeld'sche Feinstrukturkonstante})$$

$$\frac{W_e}{W_g} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 G m_p^2} = 1,23 \cdot 10^{36}$$

also $W_g \ll W_e \ll W_k$ gilt.

Bemerkung: Die Tatsache, dass die Gravitation trotz ihrer Schwäche im Alltag bedeutsam ist, deutet auf einen extrem guten Ladungsausgleich hin.

Bereits hier lässt sich der Begriff der **elektrischen Felder** einführen, wenn man nämlich die Coulomb-Kraft als Wirkung eines Feldes (der Ladung q) auf die Ladung Q interpretiert:

$$\vec{F} = Q \vec{E}(\vec{r}) \quad \text{mit} \quad \vec{E}(\vec{r}) := \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^3} (\vec{r} - \vec{r}_q)$$

Die Felddefinition erfolgt hier formal aus „praktischen“ Gründen, sagt aber nichts über die tatsächliche Existenz von elektrischen Feldern aus. Das wird erst mit dem Nachweis elektromagnetischer Wellen möglich (vgl. Elektrodynamik).

Mit Hilfe des Feldbegriffs lässt sich auch eine **Integraldarstellung** des Coulomb-Gesetzes angeben. Der „Feldfluss“ durch eine geschlossene Fläche um eine „felderzeugende“ Ladung q (im Ursprung) ist gegeben durch ($\partial V \hat{=}$ Oberfläche eines Volumens V):

$$\int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{e}_r}{r^2} \cdot \vec{e}_r r^2 d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$V = V_{Kugel}$

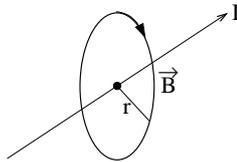
gegeben. Verallgemeinert man noch von einer auf mehrere Ladungen, so gilt gemäß des (experimentell gefundenen) Superpositionsprinzips:

$$\epsilon_0 \int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \sum q_i = \int_V \rho dV = Q_V$$

Das ist die **Integralform des Coulomb-Gesetzes**.

2.1.2 Das Ampère-Gesetz

Oersted fand 1820, dass ein stationärer elektrischer Strom magnetische Wirkung erzeugt. Ampère formulierte diesen Befund zehn Jahre später mathematisch. Für einen unendlich langen, geraden, vom Strom $\vec{I} = I\vec{e}_z$ durchflossenen Leiter gilt:



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi; \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} \hat{=} \text{Permeabilität des Vakuums}$$

Abbildung 2.2: Magnetfeldrichtung

Allgemeiner gilt für die „Zirkulation“ des Magnetfeldes \vec{B} :



$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_C \frac{1}{r} r d\varphi = \mu_0 I$$

Ampère-Gesetz

Abb. 2.3: Zirkulation

Für beliebige, ausgedehnte Ströme gilt mit der **Stromdichte** \vec{j} :

$$\frac{1}{\mu_0} \int_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} \quad \text{mit:} \quad I = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

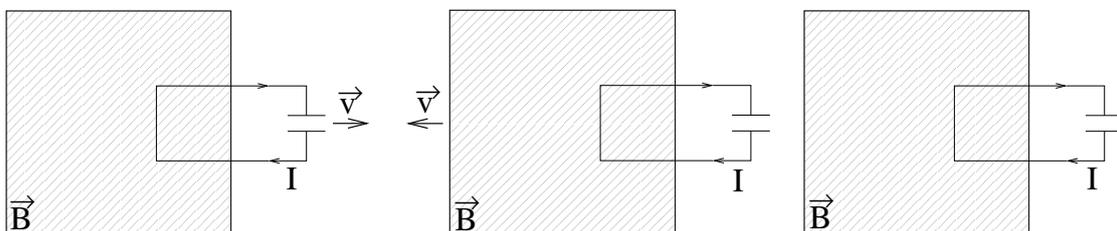
Das ist die **Integralform des Ampère-Gesetzes**. Es zeigt sich weiter, dass für das magnetische Feld immer gilt:

$$\int_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{f} = 0$$

im Unterschied zum elektrischen Feld also keine magnetischen Ladungen existieren.

2.1.3 Das Faraday-Gesetz

1831 beobachtete Faraday, dass durch zeitlich veränderliche Ströme in benachbarten Stromkreisen ein Strom induziert wird. Faraday betrachtete drei Anordnungen:



(a) Bewegter Stromkreis im Magnetfeld

(b) Bewegter Magnet und ruhender Stromkreis

(c) Veränderliches Feld eines ruhenden Magneten und ruhender Stromkreis

Abbildung 2.4: Verschiedene Anordnungen

In allen drei Fällen fließt im Stromkreis ein Strom I als Folge der zeitlichen Änderungen des magnetischen Flusses $\phi_m = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$, und Faraday fand für das den Strom erzeugende elektrische Feld

$$\int_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Diese Gleichung ist das **Faraday-Gesetz**.

Bemerkung: Maxwell postulierte später, dass das Faraday-Gesetz unabhängig von der Leiterschleife existiert, also ein zeitlich veränderliches Magnetfeld grundsätzlich ein elektrisches Feld induziert.

2.1.4 Quellenfreiheit des Magnetfeldes

Coulomb und Zeitgenossen glaubten zunächst, dass auch Magnetfelder durch magnetische Ladungen erzeugt würden und formulierten eine „magnetische Version“ des Coulomb-Gesetzes. Ampère war der Erste, der der Idee nachging, dass alle magnetischen Effekte auf bewegte elektrische Ladungen zurückgeführt werden können, d.h. dass magnetische Ladungen nicht existieren. Der 2. Teil der Aussage ist soweit bisher bekannt korrekt. Dies bedeutet (in Analogie zur Integralform des Coulomb-Gesetzes, vgl. E-Dynamik Kapitel 2.1.1), dass gilt:

$$\int_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{f} = 0$$

d.h. $\rho_{mag} = 0$ bzw. $Q_{V,mag} = 0$.

Bemerkung: Die Aussage der obigen Gleichungen kann man sich mit der Vorstellung veranschaulichen, dass jede magnetische Feldlinie eine geschlossene Kurve ist (ggf. erfolgt die Schließung „im Unendlichen“) bzw. dass der magnetische Fluss ϕ_m durch eine geschlossene Oberfläche verschwindet.

2.2 Mathematischer Exkurs: Vektoranalysis

Ein unverzichtbares Hilfsmittel der Theoretischen Physik und (im Vergleich zur klassischen Mechanik) besonders für die Elektrodynamik ist die Vektoranalysis. Für letztere äußerst nützlich ist

2.2.1 Der Nabla-Operator und die vektoranalytischen Operatoren

Erinnerung: Zur Beschreibung von Feldern und der Untersuchung ihrer Eigenschaften wird der Nabla-Operator definiert:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (\text{kartesische Koordinaten}) \\ &= \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{Zylinder-Koord.}) \\ &= \dots \end{aligned}$$

Mit Hilfe des $\vec{\nabla}$ -Operators bildet man

- den Gradient eines skalaren Feldes: $grad \Phi = \vec{\nabla} \Phi$
- die Divergenz eines Vektorfeldes: $div \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$
- die Rotation eines Vektorfeldes: $rot \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$
- den Laplace-Operator: $div grad \Phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \Phi = \Delta \Phi$

und es gilt anschaulich:

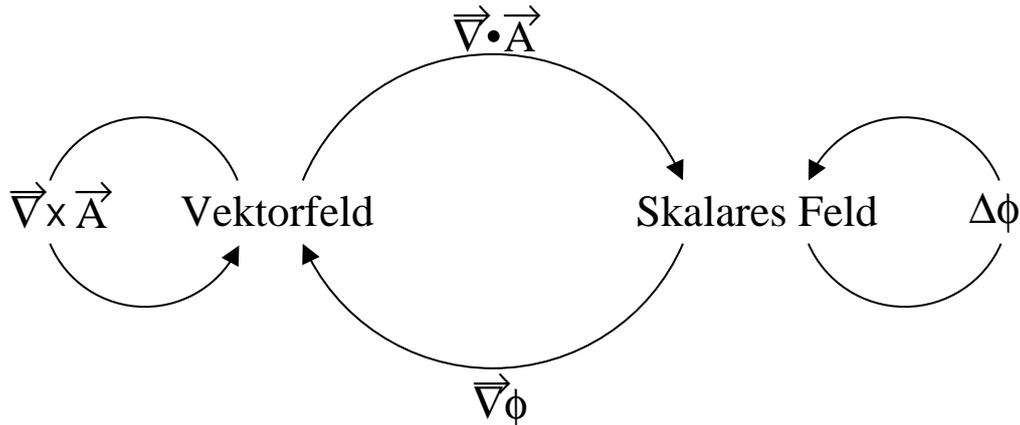


Abbildung 2.5: Der Nabla-Operator

(vgl. mathematische Methoden der Physik)

2.2.2 Der Gauß'sche Satz

... kann wie folgt anschaulich motiviert werden (vgl. 2.1.1 und 2.1.4): $\Phi = \int_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{\partial V}$ ist der Fluss des Vektorfeldes \vec{A} durch die geschlossene Oberfläche ∂V eines Volumens V . Man kann sich diesen Fluss zusammengesetzt denken aus den Flüssen Φ_{ix} , Φ_{iy} und Φ_{iz} durch die Seiten kleiner, das gesamte Volumen V ergebende („Elementar-“)Quader mit Volumen $\Delta \tau$, also:

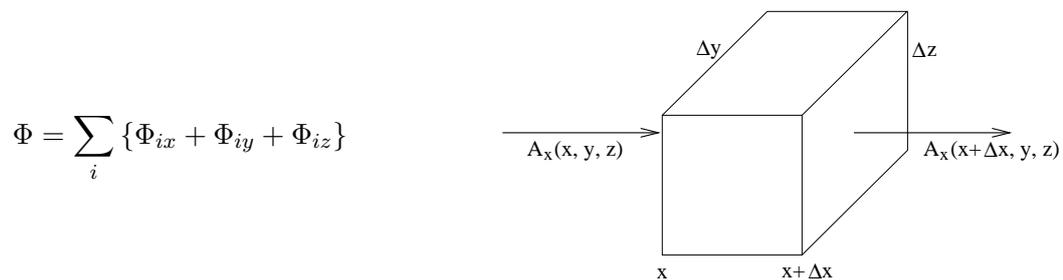


Abbildung 2.6: Fluss durch Quader

Es gilt:

$$\Phi_{ix} = [A_x(x + \Delta x, y, z) - A_x(x, y, z)] \Delta y \Delta z = \frac{\Delta A_x}{\Delta x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Da das Gleiche für die y - und z -Richtung gilt folgt mit der Wahl $\Delta x \Delta y \Delta z = \Delta \tau$:

$$\Phi_i = \Phi_{ix} + \Phi_{iy} + \Phi_{iz} = \left\{ \frac{\Delta A_x}{\Delta x} + \frac{\Delta A_y}{\Delta y} + \frac{\Delta A_z}{\Delta z} \right\} \Delta \tau$$

Nimmt man alle Würfel zusammen und berücksichtigt, dass sich die Beiträge der „innenliegenden“ Seiten wegheben, erhält man im Grenzfall $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$:

$$\int_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{f} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \sum_i \left\{ \frac{\Delta A_x}{\Delta x} + \frac{\Delta A_y}{\Delta y} + \frac{\Delta A_z}{\Delta z} \right\} \Delta \tau = \int_V \operatorname{div} \vec{A} dV \quad \text{Gauß'scher Satz}$$

2.2.3 Der Stokes'sche Satz

... kann ebenso einfach motiviert werden (vgl. II.2.1.2): $Z_F = \int_{\partial F} \vec{A} \cdot d\vec{s}$ ist die Zirkulation des Feldes \vec{A} um die Fläche F herum. Zerlegt man letztere in („Elementar-“) Quadrate mit Fläche $(\Delta F)_i$, so gilt

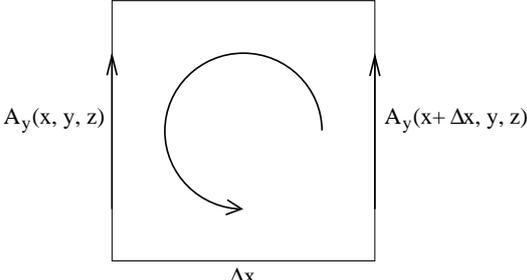
$$\begin{aligned} Z_F &= \sum_i Z_{F_i} = \sum_i \int_{(\Delta F)_i} \vec{A} \cdot d\vec{s} \\ &= \sum_i (Z_{F_{ix}} + Z_{F_{iy}}) \end{aligned}$$


Abbildung 2.7: Zirkulation um Fläche

Für ein Quadrat gilt:

$$\begin{aligned} Z_{F_{iy}} &= [A_y(x + \Delta x, y, z) - A_y(x, y, z)] \Delta y = \frac{\Delta A_y}{\Delta x} \Delta x \Delta y \\ Z_{F_{ix}} &= [-A_x(x, y + \Delta y, z) + A_x(x, y, z)] \Delta x = -\frac{\Delta A_x}{\Delta y} \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

und somit

$$Z_{F_i} = \left\{ \frac{\Delta A_y}{\Delta x} - \frac{\Delta A_x}{\Delta y} \right\} \Delta x \Delta y = \left\{ \frac{\Delta A_y}{\Delta x} - \frac{\Delta A_x}{\Delta y} \right\} \vec{e}_z \cdot \Delta F_i \vec{e}_z$$

$\Delta F_i = \Delta x \Delta y$

was verallgemeinert werden kann zu:

$$\begin{aligned} Z_{F_i} &= \vec{A}' \cdot \Delta \vec{F}_i \quad \text{mit} \quad \vec{A}' = \left\{ \frac{\Delta A_z}{\Delta y} - \frac{\Delta A_y}{\Delta z} \right\} \vec{e}_x + \left\{ \frac{\Delta A_x}{\Delta z} - \frac{\Delta A_z}{\Delta x} \right\} \vec{e}_y + \left\{ \frac{\Delta A_y}{\Delta x} - \frac{\Delta A_x}{\Delta y} \right\} \vec{e}_z \\ \text{und} \quad \Delta \vec{F}_i &= \Delta y \Delta z \vec{e}_x + \Delta z \Delta x \vec{e}_y + \Delta x \Delta y \vec{e}_z \end{aligned}$$

Daraus erhält man im Grenzfall $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$ insgesamt (nach Sum.):

$$\boxed{\int_{\partial F} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_F \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{F}} \quad \text{Stokes'scher Satz}$$

2.3 Anwendung der Sätze von Gauß und Stokes

Aus der Integralform des Coulomb-Gesetzes folgt mit dem Gauß'schem Satz:

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 \int_{\partial V} \vec{E} \cdot \vec{f} &= \int_V \rho \, dV = \varepsilon_0 \int_V \operatorname{div} \vec{E} \, dV \\ \Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} & \quad \text{Gauß'sches Gesetz}\end{aligned}$$

Analog folgt für ein Magnetfeld:

$$\begin{aligned}\int_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{f} &= 0 = \int_V \operatorname{div} \vec{B} \, dV \\ \Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0} & \quad \text{keine magnetischen Ladungen}\end{aligned}$$

Aus der Integralform des Ampère-Gesetzes folgt mit dem Stokes'schen Satz:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_0} \int_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} &= \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\mu_0} \int_A \operatorname{rot} \vec{B} \cdot d\vec{A} \\ \Rightarrow \boxed{\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}} & \quad \text{Ampère'sches Gesetz}\end{aligned}$$

Analog folgt für ein elektrisches Feld:

$$\begin{aligned}\int_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} &= -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_A \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{A} \\ \Rightarrow \boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} & \quad \text{Faraday'sches Gesetz}\end{aligned}$$

Damit sind die Grundgesetze der Elektrodynamik in differentieller Form fast vollständig bereitgestellt.

2.4 Der Maxwell'sche Verschiebungsstrom

Die in 2.3 formulierten Differentialgleichungen für das elektrische und magnetische Feld enthalten noch einen inneren Widerspruch. Aufgrund der Erfahrungstatsache (Messung!), dass die Ladung eine Erhaltungsgröße ist, gilt ($\vec{j} = \rho \vec{v}$)

$$\int_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{f} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV = \int_V \operatorname{div} \vec{j} \, dV$$

also

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0} \quad \text{Kontinuitätsgleichung}$$

Nun ist aber wegen $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$:

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Das bedeutet, diese Gleichung kann nur für in Bezug auf die Ladungsdichte stationäre Systeme gelten. Maxwell's Idee war es nun wegen $\varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$ zu schreiben:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \vec{\nabla} \cdot \left\{ \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\} = 0$$

und die rechte Seite des Ampère'schen Gesetzes entsprechend zu erweitern:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Der Term $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ wird **Maxwell'scher Verschiebungsstrom** genannt.

Bemerkung: Eine entsprechende Überlegung für $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ liefert keinen Widerspruch, denn

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0$$

2.5 Die Maxwell-Gleichungen

... die also lauten:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{r}, t) \\ \operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}, t) &= \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

und die **Lorentz-Kraft**

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = q \left[\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{v}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right]$$

sind die **vollständigen Grundgleichungen der Elektrodynamik im „Vakuum“** (Beachte: $\rho \neq 0, \vec{j} \neq 0$).

Bemerkung: Die **Maxwell-Gleichungen in Materie** lauten (nicht weiter in der Vorlesung behandelt):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D}(\vec{r}, t) &= \rho(\vec{r}, t) & \vec{D}(\vec{r}, t) &= \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}(\vec{r}, t) \\ \operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0 & & \\ \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} & \text{Material-Gleichungen} & \\ \operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}, t) &= \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} & \vec{B}(\vec{r}, t) &= \mu_0 \mu \vec{H}(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

Die Größe ε und μ werden als „Dielektrizitätskonstante“ bzw. „Permeabilität“ bezeichnet und können im Allgemeinen auch Tensoren sein. Für $\varepsilon = \mu = 1$ erhält man offenbar die Vakuum-Gleichungen. Die **Lorentzkraft-Gleichung** schreibt man für den Materiefall zweckmäßig als Kraftdichte-Gleichung:

$$\vec{f}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \left[\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{v}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right]$$

Bemerkung: Lorentzkraft „anschaulich“ plausibel:
 Die Bewegung von q erzeugt einen Strom entlang \vec{v} . Dieser Strom erzeugt ein Magnetfeld um \vec{v} herum, das ein äußerlich anliegendes homogenes Magnetfeld auf der einen Seite verstärkt und auf der anderen Seite schwächt.
 Der dadurch erzeugte Symmetriebruch macht eine seitliche Kraft plausibel.

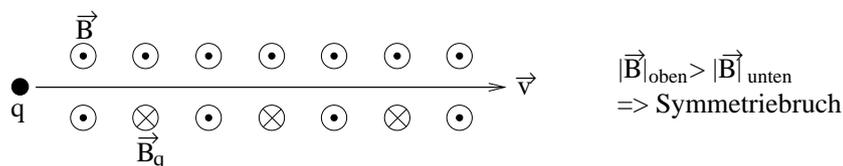


Abbildung 2.8: Lorentzkraft

Bemerkung: Eine eindeutige Lösung der Maxwell-Gleichungen erfordert Randbedingungen. Diese sind grundsätzlich durch

$$\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \vec{E}(\vec{r}) = 0 ; \quad \lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \vec{B}(\vec{r}) = 0$$

gegeben. Zusätzlich gibt es Randbedingungen an (physikalisch oder mathematisch motivierten) „Grenzflächen“ an Orten $|\vec{r}| < \infty$. Die damit verbundenen **Randwertprobleme** werden später behandelt.

3 Elektrostatik

... ist charakterisiert durch $\rho \neq 0, \vec{j} = 0, \frac{\partial}{\partial t} = 0$, so dass die Maxwell-Gleichungen lauten:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = 0; \quad \operatorname{rot} \vec{B} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{B} = 0 \quad (\text{wegen Randbedingung})$$

Es gibt also nur ein (statisches) elektrisches Quellenfeld \vec{E} mit verschwindender Rotation, und es gibt verschiedene **Möglichkeiten zur Berechnung von $\vec{E}(\vec{r})$** :

- (i) mit Hilfe des Gauß'schen Satzes aus dem Coulomb-Gesetz
- (ii) durch direkte Lösung der 1. Maxwell-Gleichung
- (iii) durch Anwendung des Superpositionsprinzips auf das Coulomb-Gesetz
- (iv) aus dem zu einem Problem gehörenden elektrostatischen Potential

Diese Alternativen seien zunächst allg. und dann jeweils an einem konkreten Beispiel erläutert.

3.1 Anwendung des Gauß'schen Satzes

Offenbar gilt (vgl. 2.2.2):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \int_V \operatorname{div} \vec{E} \, dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dV \\ \Leftrightarrow \int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{f} &= \frac{q_V}{\epsilon_0}; \quad d\vec{f} = df \vec{n}; \quad \vec{n} \hat{=} \text{Flächennormaleneinheitsvektor} \end{aligned}$$

Gelingt es nun, die Oberfläche ∂V des Volumens V mit der eingeschlossenen Ladung q_V so zu wählen, dass auf ihr $\vec{E} = E \vec{n}$ mit $E = |\vec{E}| = \text{const.}$ gilt, ist das Problem gelöst, denn:

$$\int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{f} = E \int_{\partial V} df = \frac{q_V}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{q_V}{\epsilon_0 O_V} \vec{n}$$

Beispiel: **Homogen geladene Kugel**

$$\rho = \begin{cases} \frac{Q}{V} = \frac{3Q}{4\pi R^3} = \text{const.} & ; |\vec{r}| \leq R \\ 0 & ; |\vec{r}| > R \end{cases}$$

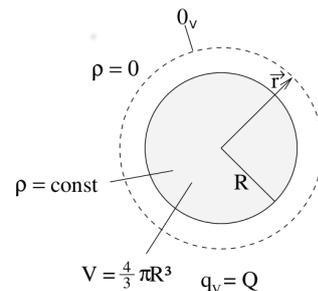


Abbildung 3.1: Kugel

Entsprechend unterscheidet man zweckmäßigerweise:

- das Feld im Innenraum ($|\vec{r}'| \leq R$)
- das Feld im Außenraum ($|\vec{r}'| > R$)

Für Letzteres gilt ($V =$ Kugel mit beliebigem Radius r)

$$\int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{f} = E_a \int_{\partial V} r^2 d\Omega = E_a 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_a = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

$\vec{E} = E_a \vec{e}_r; d\vec{f} = r^2 \vec{e}_r d\Omega$

Für den Innenraum ($|\vec{r}'| \leq R$) findet man:

$$\int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{f} = E_i 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \int_V dV = \frac{3Q}{\varepsilon_0 4\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow E_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qr}{R^3}$$

Also insgesamt:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qr}{R^3} \vec{e}_r & ; |\vec{r}'| \leq R \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r & ; |\vec{r}'| > R \end{cases}$$

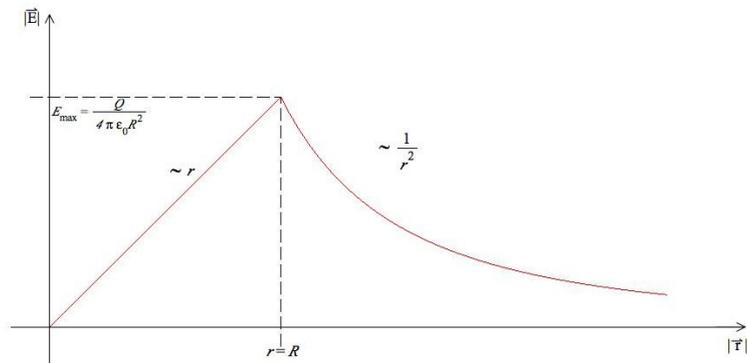


Abbildung 3.2: E-Feldverlauf

Bemerkung: Dieses Feld verwendet man u.a. als einfaches Modell für einen Atomkern.

3.2 Direkte Lösung der 1. Maxwell-Gleichung

Zu lösen ist das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= 0 \end{aligned}$$

Lösung (wie immer!) durch Wahl geeigneter Koordinaten mit den jeweiligen Randbedingungen.

Beispiel: Homogen geladene Kugel (s.o.)

Wähle sphärische Polarkoordinaten ($\hat{=}$ Kugelkoordinaten):

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \vec{e}_r \quad \Rightarrow \quad \text{div } \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \{r^2 E(r)\}$$

Damit gilt für den Innenraum ($|\vec{r}| \leq R$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E_i) &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr} (r^2 E_i) = \frac{\rho r^2}{\varepsilon_0} \\ \Rightarrow \quad r^2 E_i &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \int_0^r r'^2 dr' = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{1}{3} r^3 \quad \Rightarrow \quad E_i = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{r}{3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qr}{R^3} \\ \boxed{\rho = \text{const.}} \end{aligned}$$

Für den Außenbereich ($|\vec{r}| > R$) findet man:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E_a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr} (r^2 E_a) = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 E_a = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad E_a = \frac{\text{const.}}{r^2}$$

Die Anschlussbedingung (siehe 3.6.1) $E_a \stackrel{!}{=} E_i$ bei $|\vec{r}| = R$ liefert:

$$\frac{\text{const.}}{R^2} \stackrel{!}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^2} \quad \Rightarrow \quad \text{const.} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_a = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Also wie vorher:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qr}{R^3} \vec{e}_r & ; |\vec{r}| \leq R \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r & ; |\vec{r}| > R \end{cases}$$

3.3 Superpositionsprinzip und Coulomb-Gesetz

Das Coulomb-Gesetz für die Kraft \vec{F} , die eine Ladung q auf eine Testladung Q ausübt, lautet wie gesehen (vgl. 2.1.1):

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^3} (\vec{r} - \vec{r}_q)$$

was die (von Q unabhängige) Definition des elektrischen Feldes

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^3} (\vec{r} - \vec{r}_q)$$

der Ladung q nahe legt. Für das Gesamtfeld mehrerer (N) Ladungen gilt gemäß des Superpositionsprinzips:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

Daraus folgt schließlich für eine kontinuierliche Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

Bemerkung: Die Kraft auf eine Ladungsverteilung ist somit

$$\vec{F} = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) d^3r$$

wobei die Gesamtladung durch

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{r}) d^3r$$

gegeben ist.

Beispiel: **Homogen geladene Kugel (s.o.)**

Im Innenraum ($|\vec{r}| \leq R$) gilt:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} r'^2 \sin\vartheta dr' d\vartheta d\varphi \\ &\quad \left| \begin{array}{l} \rho = \text{const.} \end{array} \right. \\ &= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \int_{-1}^1 \int_0^R \frac{(\vec{r} - \vec{r}') r'^2}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\vartheta}^3} dr' d\cos\vartheta \\ &\quad \left| \begin{array}{l} \vec{e}_z \parallel \vec{r} \end{array} \right. \\ &= \dots \end{aligned}$$

Man erhält also einen vergleichsweise komplizierten Ausdruck, in dem nicht zuletzt Vektoren die Integration verkomplizieren. Daher neue Idee:

3.4 Das elektrische Potential

Aus der (bisher nicht benutzten) Gleichung $\text{rot } \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ folgt, dass $\vec{E}(\vec{r}) \sim \text{grad } \Phi(\vec{r}) = \vec{\nabla} \Phi(\vec{r})$. Dieses skalare Feld $\Phi(\vec{r})$ kann aus (vgl. 3.3):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

mit der vektoranalytischen Identität

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \left\{ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\} = - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

wie folgt bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V -\rho(\vec{r}') \vec{\nabla}_{\vec{r}} \left\{ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\} d^3r' \\ &= - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla}_{\vec{r}} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' = - \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \end{aligned}$$

Demnach gilt:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) \quad \text{mit} \quad \boxed{\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' + \text{const.}}$$

Damit lautet die 1. Maxwell-Gleichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ in der Elektrostatik äquivalent ($\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \Delta$):

$$\boxed{\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

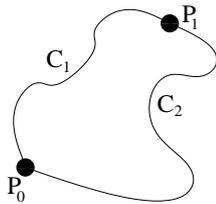
und ist als **Poisson-Gleichung** bekannt.

Die Umkehrung von $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$ führt auf die nützliche Beziehung

$$\Phi(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{s}$$

Wegen $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ ist das Integral wegunabhängig:

$$\int_A (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$



$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \text{gleich für Weg (I) und (II)}$$

Abbildung 3.3: Beliebige Wege

Bemerkung: Die Kenntnis des elektrostatischen Potentials $\Phi(\vec{r})$ ist äquivalent zur Kenntnis des elektrostatischen Feldes $\vec{E}(\vec{r})$. Die Tatsache, dass ein skalares Feld ($\Phi(\vec{r})$) dieselbe Information enthält wie ein vektorielles ($\vec{E}(\vec{r})$), liegt hier an der speziellen Form des Vektorfeldes, welches nicht beliebig ist, sondern $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ erfüllt.

Beispiel: **Homogen geladene Kugel (s.o.)**

Es gilt:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} r'^2 \sin\vartheta \, dr' \, d\vartheta \, d\varphi \\ &= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \int_0^R \int_{-1}^1 \frac{r'^2}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\vartheta}} \, d\cos\vartheta \, dr' \\ &\quad \boxed{\vec{e}_z \parallel \vec{r}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{\text{Trick!}}{=} \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \int_0^R \int_{-1}^1 r'^2 \frac{d}{d\cos\vartheta} \left\{ \sqrt{\dots} \left(-\frac{1}{rr'} \right) \right\} d\cos\vartheta dr' \\
&= -\frac{\rho}{2\varepsilon_0 r} \int_0^R r' \underbrace{\{|r-r'| - |r+r'|\}}_{= \begin{cases} -2rr' & ; r < r' \\ -2r'^2 & ; r \geq r' \end{cases}} dr' \\
&= \frac{\rho}{\varepsilon_0 r} \begin{cases} \int_0^r r'^2 dr' + \int_r^R rr' dr' & ; r \leq R \\ \int_0^R r'^2 dr' & ; r > R \end{cases} \\
& \stackrel{\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}}{=} \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{r^2}{R^3} + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{R} - \frac{r^2}{R^3} \right) \right\} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \frac{3}{R} - \frac{r^2}{R^3} \right\} & ; r \leq R \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r} & ; r > R \end{cases}
\end{aligned}$$

Daraus folgt für das elektrische Feld $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qr}{R^3} \vec{e}_r & ; |\vec{r}| \leq R \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r & ; |\vec{r}| > R \end{cases}$$

3.5 Die mathematische Beschreibung einer Punktladung: die δ -Funktion

Zur formalen Beschreibung des elektrostatischen Feldes und Potentials einer Punktladung q ist es notwendig, die entsprechende Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ zu definieren. Offenbar gilt im Falle einer Punktladung am Ort \vec{r}_q , dass $\rho(\vec{r})$ nur an einem Punkt ungleich Null ist, also:

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & ; \vec{r} \neq \vec{r}_q \\ ? & ; \vec{r} = \vec{r}_q \end{cases}$$

mit

$$\int_V \rho(\vec{r}) d^3r = \begin{cases} q & ; \text{falls } \vec{r}_q \text{ in } V \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases}$$

Das Gewünschte leistet die (Dirac'sche) Delta-Funktion:

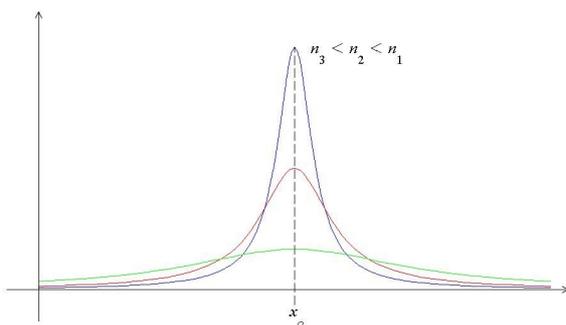
$$\rho(\vec{r}) = q \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_q) \quad \text{mit} \quad \int_V \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_q) d^3r = \begin{cases} 1 & ; \text{falls } \vec{r}_q \text{ in } V \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases}$$

Demnach ist $\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_q) = 0$ für $\vec{r} \neq \vec{r}_q$ (und anschaulich(!) gilt $\delta^3(0) = \infty$). Es gibt verschiedene Darstellungen der Delta-Funktion als Grenzwert von Funktionenfolgen. Am Anschaulichsten ist der eindimensionale Fall, wo z.B. gilt:

$$\delta(x - x_0) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \frac{\eta}{\eta^2 + (x - x_0)^2}$$

In der Tat gilt hier:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\eta}{\eta^2 + (x - x_0)^2} dx = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x - x_0}{\eta}\right) \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = 1$$



$$\hat{=} \delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & ; x \neq x_0 \\ \infty & ; x = x_0 \end{cases}$$

Abbildung 3.4: Funktionenfolge

Es gelten folgende **Beziehungen für die eindimensionale δ -Funktion**:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \delta(x - a) dx = \begin{cases} f(a) & ; \text{ falls } x_1 < a < x_2 \\ 0 & ; \text{ sonst (also } a < x_1 \vee a > x_2) \end{cases}$$

$$\text{aber } \int_0^{r_1} f(r) \delta(r) dx = f(0) \quad \text{für } r_1 > 0 \text{ in Polarkoordinaten}$$

$$\delta(kx) = \frac{1}{|k|} \delta(x)$$

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i)$$

$x_i =$ einfache Nullstelle von $f(x)$: $f(x_i) = 0$, $f'(x_i) \neq 0$

$$\delta(x - a) = \frac{d}{dx} H(x - a)$$

$$H(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ 1 & ; x > 0 \end{cases}$$

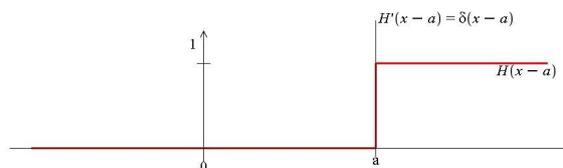


Abbildung 3.5: Heaviside-Funktion

und für die 3-D δ^3 -Funktion:

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{r}) \delta^3(\vec{r} - \vec{a}) d^3r = f(\vec{a})$$

$$\delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \stackrel{\vec{r}' = \text{const.}}{=} \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \left\{ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right\} \stackrel{\vec{r}' = 0}{=} \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \left\{ \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right\}$$

$$\delta^3(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \Delta_{\vec{r}} \left\{ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\}$$

Damit gilt formal für Feld und Potential einer Punktladung q bei $\vec{r}' = \vec{r}_q$ (vgl. 3.3 und 3.4):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

$$\stackrel{\rho(\vec{r}') = q \delta^3(\vec{r}' - \vec{r}_q)}{=} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\delta^3(\vec{r}' - \vec{r}_q)(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^3} (\vec{r} - \vec{r}_q)$$

bzw.:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\delta^3(\vec{r}' - \vec{r}_q)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|}$$

3.6 Randwertprobleme

Wie bereits in 2.5 bemerkt, erfordert eine eindeutige Lösung der Maxwell-Gleichungen (oder der im Falle der Elektrostatik äquivalenten Poisson-Gleichung) Randbedingungen. Neben den grundsätzlichen („natürlichen“) elektrostatischen Randbedingungen

$$\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \Phi(\vec{r}) = 0$$

gibt es häufig physikalisch bedingte oder mathematisch motivierte zusätzliche Randbedingungen an Grenzflächen innerhalb des Integrationsgebietes bei $0 < |\vec{r}| < \infty$. Diese sind stets „künstlich“ und müssen mit den Maxwell-Gleichungen verträglich sein, das heißt aus denselben folgen. Dazu betrachten wir das

3.6.1 Verhalten von $\vec{E}(\vec{r})$ und $\Phi(\vec{r})$ an Grenzflächen

Grenzflächen treten auf, wenn sich Materie im Integrationsgebiet befindet. Man unterscheidet prinzipiell:

- Leiter** $\hat{=}$ Materialien, in denen sich ein oder mehrere Elektronen pro Atom frei bewegen können.
- Isolatoren** $\hat{=}$ Materialien, in denen jedes Elektron an ein bestimmtes Atom gebunden ist und bleibt.

Wir beschränken uns hier auf Leiter und leitende Grenzflächen. Die Isolatoren (ein Beispiel ist die homogen geladene Kugel) werden in der so genannten „Elektrodynamik in Materie“ behandelt (siehe Hauptvorlesung).

Für einen **Leiter** gelten folgende Aussagen:

- (i) **$\vec{E}(\vec{r}) = 0$ innerhalb des Leiters:**
 Aufgrund eines äußeren Feldes \vec{E}_0 werden die freien Elektronen verschoben mit dem Effekt des Aufbaus einer positiven und negativen Ladungsanhäufung am Leiterrand. Die Elektronenbewegung verschwindet, wenn das durch die induzierten Ladungen erzeugte Feld \vec{E}_i im Leiter das äußere Feld \vec{E}_0 gerade kompensiert. Damit ist im **elektrostatistischen** Fall $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 + \vec{E}_i = 0$ im Inneren des Leiters, einschließlich seiner Oberfläche.

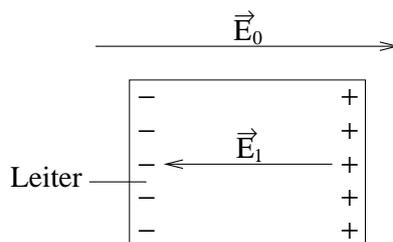


Abbildung 3.6: Leiter im elektrostatischen Feld

- (ii) **$\rho(\vec{r}) = 0$ innerhalb des Leiters:**
 Wegen $\text{div } \vec{E} = \text{div } \vec{0} = 0 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho = 0$
- (iii) **Die gesamte Nettoladung befindet sich an der Leiteroberfläche:**
 Das ist der einzige Ort, wo sie sein kann...
- (iv) **Ein Leiter ist ein „Äquipotential“, d.h. $\Phi(\vec{r}) = \text{const.}$ im Leiter einschließlich der Oberfläche.** Wegen $\vec{E} = 0 = -\vec{\nabla}\Phi \Rightarrow \Phi = \text{const.}$
- (v) **$\vec{E}(\vec{r})$ ist direkt außerhalb des Leiters senkrecht zu seiner Oberfläche:**
 Andernfalls gäbe es eine Komponente parallel zur / an der Oberfläche im Widerspruch zu (i).

Bemerkung: Aussage (v) folgt auch aus (iv), denn Feldlinien stehen gemäß $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ stets senkrecht auf Äquipotentialflächen.

Bemerkung: Die Aussagen (i) und (ii) gelten insbesondere auch für „ausgehöhlte“ Leiter: der Hohlraum ist feld- und ladungsfrei ($\hat{=}$ „Faraday’scher Käfig“).

Mit Aussage (iii) ist erstmals der Begriff der **Flächenladung** motiviert. Das Beispiel der Leiteroberfläche zeigt, dass $\vec{E}(\vec{r})$ am Ort einer Flächenladung „springt“ (hier von $\vec{E} = \vec{E}_i = 0$ auf $\vec{E} = \vec{E}_a \neq 0$). Dieses unstetige Verhalten kann allgemein mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen bestimmt werden:

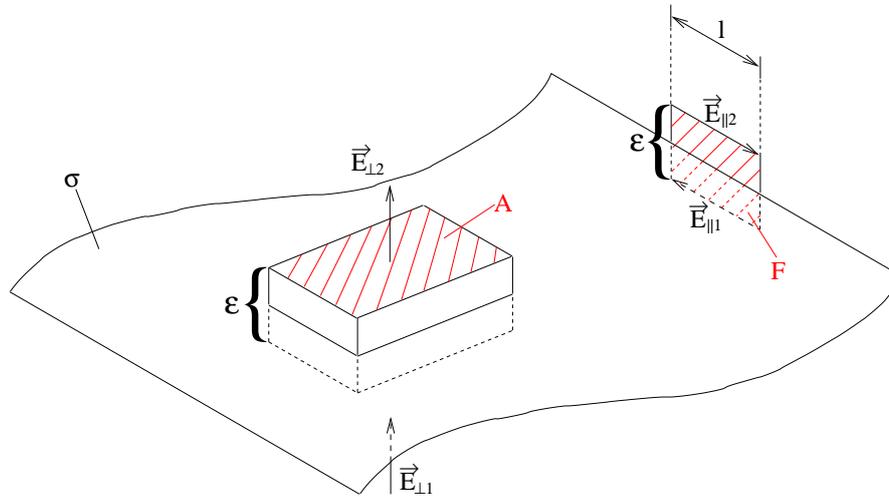


Abbildung 3.7: Flächenladung

$$\begin{aligned} \text{Sei } \vec{E}_1 = \vec{E}_{\parallel 1} + \vec{E}_{\perp 1} &\hat{=} \text{ Feld unterhalb der Flächenladungsdichte } \sigma \\ \vec{E}_2 = \vec{E}_{\parallel 2} + \vec{E}_{\perp 2} &\hat{=} \text{ Feld oberhalb der Flächenladungsdichte } \sigma \end{aligned}$$

Durch Anwendung des Gauß'schen Satzes auf ein hinreichend kleines quaderförmiges Volumen $V = A \cdot \epsilon$ findet man:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{f} &= \frac{Q_V}{\epsilon_0} \stackrel{\epsilon \rightarrow 0}{\Leftrightarrow} (E_{\perp 2} - E_{\perp 1}) A = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma A \\ \Rightarrow \boxed{E_{\perp 2} - E_{\perp 1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}} &\hat{=} \text{ Unstetigkeit der Senkrechtkomponente, wenn } \sigma \neq 0 \end{aligned}$$

Anwendung des Stokes'schen Satzes auf eine hinreichend kleine Fläche liefert:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 &\Rightarrow \oint_{\partial F} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \stackrel{\epsilon \rightarrow 0}{\Leftrightarrow} E_{\parallel 2} l - E_{\parallel 1} l = 0 \\ \Rightarrow \boxed{E_{\parallel 2} = E_{\parallel 1}} &\hat{=} \text{ Parallelkomponente immer stetig} \end{aligned}$$

Insgesamt gilt demnach ($\vec{n} \hat{=} \text{Flächennormaleneinheitsvektor}$):

$$\boxed{\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}} \quad \text{Verhalten des elektrischen Feldes an Grenzflächen}$$

Für das elektrische Potential folgt sofort:

$$\boxed{\Phi_2 - \Phi_1 = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0} \quad \text{Stetigkeit des Potentials}$$

da die Weglänge gleich Null wird. Das Potential ist also stetig an geladenen Grenzflächen. Nicht so sein Gradient, denn wegen $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ gilt natürlich:

$$\vec{\nabla}\Phi_2 - \vec{\nabla}\Phi_1 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$$

Bemerkung: Obige Ergebnisse erklären nun, dass wir bei der homogen geladenen Kugel (Nichtleiter!) keine Unstetigkeiten gefunden haben: dort gibt es keine geladenen Grenzflächen, sondern nur eine ausgedehnte Ladungsverteilung.

Bemerkung: Natürlich ist eine „Flächenladung“ eine mathematische Idealisierung, weil:

- (a) Ladungsträger selbst eine Ausdehnung haben (Ionen!) und
- (b) die Anordnung der Ladungsträger nicht in einer unendlich dünnen Schicht erfolgt (sondern üblicherweise in einer Schicht der Dicke von 1-2 Atom- bzw. Moleküldurchmessern). Allerdings sind diese Schichtdicken im Allgemeinen sehr (sehr!) viel kleiner als typische Leiterdurchmesser, so dass die Idealisierung sinnvoll ist.

3.6.2 Poisson- und Laplace-Gleichungen

Zur Lösung elektrostatischer Probleme, bei denen sich Leiter im elektrostatischen Feld befinden, wird meist von (vgl. 3.4)

$$\boxed{\Delta\Phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}} \quad \text{Poisson-Gleichung} \quad \boxed{\Delta\Phi(\vec{r}) = 0} \quad \text{Laplace-Gleichung}$$

ausgegangen. Die **allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung** erhält man formal aus

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_{homog}(\vec{r}) + \Phi_{inhomog}(\vec{r})$$

wobei $\Phi_{homog}(\vec{r})$ die allgemeine Lösung der homogenen Poisson-Gleichung, also der Laplace-Gleichung ist und $\Phi_{inhomog}(\vec{r})$ eine spezielle (partikuläre) Lösung der Poisson-Gleichung, und daher

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = \underbrace{\Delta\Phi_{homog}(\vec{r})}_{=0} + \Delta\Phi_{inhomog}(\vec{r}) = \Delta\Phi_{inhomog} = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

gilt. Die homogene Gleichung besitzt unendlich viele voneinander unabhängige Lösungen, wie zum Beispiel:

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi(x, y, z) = \exp\{\alpha x + \beta y\} \sin\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z\right); \quad \alpha, \beta \text{ beliebig}$$

Eine eindeutige Lösung für das Potential $\Phi(\vec{r})$ erhält man nur bei Vorgabe geeigneter Randbedingungen. Man unterscheidet das **erste, zweite und dritte Randwertproblem der Potentialtheorie** je nach Art der Randbedingungen:

- (1) Vorgabe der Potentialwerte am Rand $\partial V = \sum_{i=1}^N A_i$ eines von einem (oder mehreren) Leiter(n) eingeschlossenen Volumens V :

$$\Phi\Big|_{A_i} = \Phi_i = const. \quad \hat{=} \quad \text{Dirichlet-Problem}$$

(2) Vorgabe der Normalkomponente des Potentialgradienten auf dem Rand:

$$\left(\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \Phi \right) \Big|_R = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{=} \text{ von Neumann-Problem}$$

$$\boxed{\vec{n} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial n}}$$

(3) Vorgabe einer Kombination gemäß (1) und (2) auf verschiedenen Teilstücken des Randes

$$\hat{=} \text{ (kombiniertes) Dirichlet- von Neumann-Problem}$$

Bemerkung: Das in der Elektrostatik häufigste Randwertproblem ist das Dirichlet-Problem, auf das im Folgenden der Schwerpunkt gelegt wird.

Bemerkung: Bei Vorgabe von Φ und $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ an derselben Stelle des Randes spricht man von **Cauchy-Randbedingungen**, bei denen das Problem in Ausnahmen überbestimmt ist.

Das Problem der Lösung der Poisson-Gleichung in einem gegebenen Volumen besteht also in der Berechnung:

- (a) einer partikulären Lösung $\Phi_{inhomog}(\vec{r})$ der Poisson-Gleichung
- (b) der allgemeinen Lösung $\Phi_{homog}(\vec{r})$ der Laplace-Gleichung

Im Rahmen der Vorlesung wird nur auf eine Methode näher eingegangen, nämlich

3.6.3 Die Methode der Spiegelladung(en)

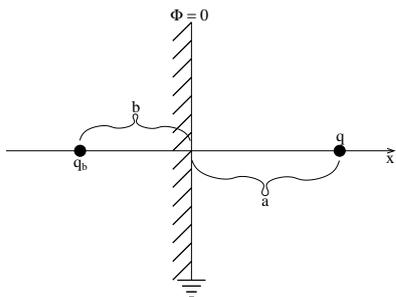
... bedient sich des Potentials einer fiktiven Ladungsverteilung außerhalb des betrachteten Volumens, welche eine einfache Erfüllung der Randbedingungen auf dem Rand des Volumens erlaubt. Die Grundidee von Spiegelladungen ($\hat{=}$ Bild-, Scheinladungen) ist also die Ersetzung des Problems

“Bestimme $\Phi(\vec{r})$ in V bei vorgegebenen $\rho(\vec{r}')$ und vorgegebenen Randbedingungen auf ∂V .“

durch das Problem:

“Bestimme $\Phi(\vec{r})$ in V bei vorgegebenen $\rho(\vec{r}')$ und vorgegebenen Spiegelladungen (deren Hinzunahme die Erfüllung der Randbedingungen garantiert).“

Die Methode sei an einem einfachen **Standardbeispiel** illustriert, nämlich einer Punktladung vor einer (geerdeten), unendlich ausgedehnten, planaren Metalloberfläche:



Die Erdung der Metalplatte garantiert $\Phi(x = 0) = 0$.
Das betrachtete Volumen V ist der Halbraum für $x \geq 0$.

Abbildung 3.8: geerdete Platte

Das Dirichlet-Problem lautet:

$$\begin{aligned}\Delta\Phi(\vec{r}) &= -\frac{q}{\varepsilon_0} \delta(\vec{r} - a\vec{e}_x) \\ \Phi(x=0, y, z) &= 0 \\ \lim_{|\vec{r}|\rightarrow\infty} \Phi(\vec{r}) &= 0\end{aligned}$$

Aus Symmetrieüberlegungen bietet sich eine Positionierung einer zweiten Punktladung, also der Bildladung q_b bei $\vec{r} = -b\vec{e}_x$ an, so dass gilt:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{q}{|\vec{r} - a\vec{e}_x|} + \frac{q_b}{|\vec{r} + b\vec{e}_x|} \right\}$$

Die Idee ist nun, die Unbekannten b und q_b aus der Randbedingung bei $x=0$ zu bestimmen:

$$\Phi(x=0, y, z) \stackrel{!}{=} 0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{q}{\sqrt{(0-a)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{q_b}{\sqrt{(0+b)^2 + y^2 + z^2}} \right\}$$

was durch

$$b = a \quad \text{und} \quad q_b = -q$$

erfüllt werden kann. Demnach erfüllt:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{q}{|\vec{r} - a\vec{e}_x|} - \frac{q}{|\vec{r} + a\vec{e}_x|} \right\}$$

die Randbedingung bei $x=0$ und es gilt offenkundig auch $\lim_{|\vec{r}|\rightarrow\infty} \Phi(\vec{r}) = 0$. Da zudem $\Delta \left\{ \frac{1}{|\vec{r} - a\vec{e}_x|} \right\} = -4\pi \delta(\vec{r} - a\vec{e}_x)$ gilt, ist die eindeutige Lösung des Problems gefunden.

Interessant ist nun meist die Berechnung

- (i) des elektrischen Feldes $\vec{E}(\vec{r})$ in V .
- (ii) der auf der Metallplatte influenzierten Ladungsdichte σ und der entsprechenden Gesamtladung q_{infl} .
- (iii) der Kraft, die von der Metallplatte auf die Ladung q ausgeübt wird.

Für obiges Beispiel gilt:

- (i) **das elektrische Feld** ergibt sich direkt aus

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{\vec{r} - a\vec{e}_x}{|\vec{r} - a\vec{e}_x|^3} - \frac{\vec{r} + a\vec{e}_x}{|\vec{r} + a\vec{e}_x|^3} \right\}$$

- (ii) **die influenzierte Flächenladung** erfüllt

$$\sigma = -\varepsilon_0 \left| \vec{E}(x=0, y, z) \right| = -\frac{\varepsilon_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{2a}{\sqrt{a^2 + y^2 + z^2}^3} \right\} = -\frac{q}{2\pi} \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2 + z^2}^3}$$

Es gilt somit auch: $\lim_{|\vec{r}|\rightarrow\infty} \sigma(\vec{r}) = 0$

Veranschaulichung für $q > 0$:

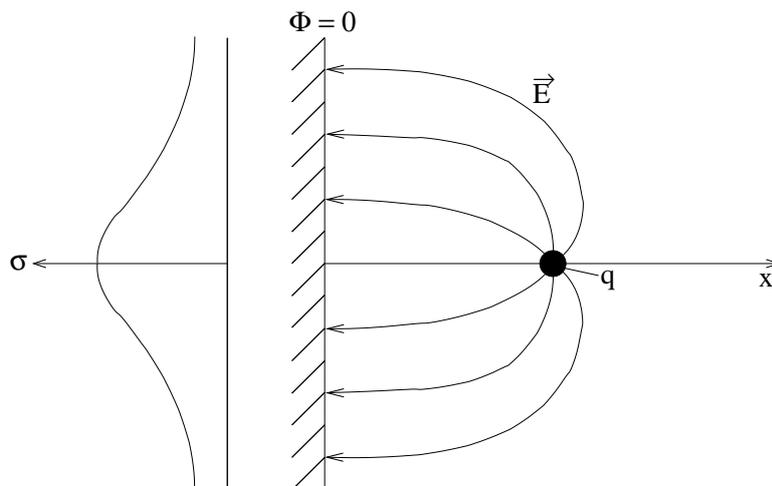


Abbildung 3.9: Ladungsverteilung auf geerdeter Metallplatte mit Punktladung davor

Die gesamte auf der Metallplatte influenzierte Ladung ist dann:

$$\begin{aligned}
 q_{infl} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(y, z) dy dz \stackrel{\substack{\text{Ebene Polarkoordinaten:} \\ y = r \cos \phi, z = r \sin \phi}}{=} 2\pi \int_0^{\infty} \sigma(r) r dr \\
 &= -2\pi \frac{q}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{ar}{\sqrt{a^2 + r^2}^3} dr = +qa \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2}} \right]_0^{\infty} = -q
 \end{aligned}$$

(iii) Die **Kraft auf die Ladung q** ergibt sich schließlich aus (Spiegelladungs-Feld!)

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{|a\vec{e}_x + a\vec{e}_x|^3} (a\vec{e}_x + a\vec{e}_x) = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 a^2} \vec{e}_x$$

und zeigt also in Richtung Metallplatte.

Bemerkung: Es gibt zahlreiche weitere Beispiele zur erfolgreichen Verwendung der Methode der Spiegelladung. Dennoch bleibt sie in der Regel auf Probleme mit einfacher Geometrie beschränkt.

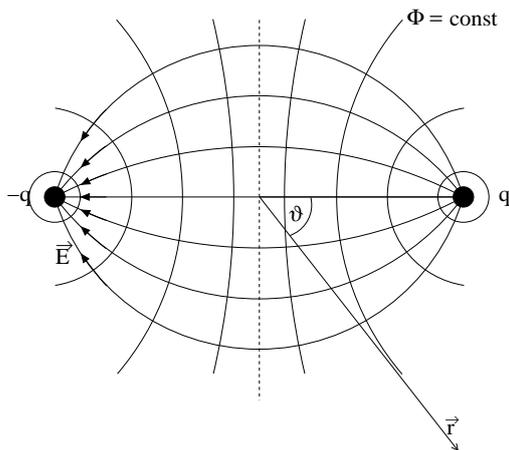
Bemerkung: Dehnt man den Gültigkeitsbereich des oben berechneten Potentials auf den gesamten \mathbb{R}^3 aus, handelt es sich um das Potential eines **elektrischen Dipols**.

3.7 Der elektrische Dipol

Ein System aus zwei Ladungen gleichen Betrags, aber unterschiedlichen Vorzeichens nennt man elektrischen **Dipol**. Wie in 3.6.3 gesehen ist das Dipolpotential gegeben durch:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} - \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} \right\}; \quad \text{mit } q \text{ bei } \vec{r}_1 \text{ und } -q \text{ bei } \vec{r}_2$$

Veranschaulichung von Potential und Feld $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$:



Sei der Koordinatenursprung in der Mitte zwischen beiden Ladungen (Symmetrie!) dann gilt mit $\vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$:

$$\vec{r}_1 = -\frac{1}{2}\vec{d} \quad ; \quad \vec{r}_2 = +\frac{1}{2}\vec{d}$$

Abbildung 3.10: elektrischer Dipol

Für das elektrostatische Potential $\Phi(\vec{r})$ soll stets die natürliche Randbedingung $\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \Phi(\vec{r}) = 0$ gelten (siehe Abschnitt 3.6). Wie aber das Potential gegen Null geht, hängt von der Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ ab und man kann prinzipiell zwei Situationen unterscheiden:

- (a) die Gesamtladung ist verschieden von Null: $Q = \int \rho(\vec{r}) d^3r \neq 0$
- (b) die Gesamtladung ist gleich Null: $Q = \int \rho(\vec{r}) d^3r = 0$

Im Fall (a) ist anschaulich klar, dass das Potential in großem Abstand von der Ladungsverteilung sich dem einer („Netto“-) Punktladung Q annähert, da $\int \rho(\vec{r}) d^3r$ aus hinreichend großer Entfernung als solche erscheint.

Wie aber ist der asymptotische Potentialverlauf falls die Gesamtladung Q verschwindet, wie es gerade beim Dipol der Fall ist? Dazu macht man folgende Näherung:

$$|\vec{r} - \vec{r}_{1,2}|^2 = r^2 \mp r d \cos \theta + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = r^2 \left[1 \mp \left(\frac{d}{r}\right) \cos \theta + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{r}\right)^2 \right]$$

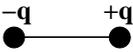
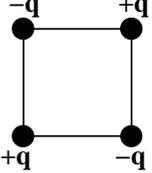
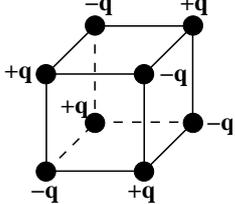
$$\Rightarrow \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_{1,2}|} \underset{\boxed{|\vec{r}| \gg |\vec{d}|}}{\approx} \frac{1}{r} \left[1 \mp \left(\frac{d}{r}\right) \cos \theta \right]^{-\frac{1}{2}} \underset{\boxed{\sqrt{1 \pm x}^{-1} \approx 1 \mp \frac{x}{2}; |x| \ll 1}}{\approx} \frac{1}{r} \left[1 \pm \left(\frac{d}{2r}\right) \cos \theta \right]$$

Damit gilt für das **Dipolpotential**:

$$\Phi(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{r} \left[1 + \left(\frac{d}{2r}\right) \cos \theta \right] - \frac{q}{r} \left[1 - \left(\frac{d}{2r}\right) \cos \theta \right] \right\} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q d \cos \theta}{r^2}$$

das heißt es fällt für große $|\vec{r}| \gg d$ wie $\frac{1}{r^2}$ und damit stärker als das Punktladungspotential $\frac{1}{r}$ ab.

Bemerkung Analoge Überlegungen (siehe Hauptvorlesung) liefern:

	≅	Monopol:	$\Phi(\vec{r}) \propto \frac{1}{r}$
	≅	Dipol:	$\Phi(\vec{r}) \propto \frac{1}{r^2}$
	≅	Quadrupol:	$\Phi(\vec{r}) \propto \frac{1}{r^3}$
	≅	Oktupol:	$\Phi(\vec{r}) \propto \frac{1}{r^4}$

für große Abstände von diesen so genannten **Multipolen**. Die zunächst für diskrete Ladungsverteilungen durchgeführte Überlegung lässt sich auf beliebige kontinuierliche Ladungsverteilungen übertragen. Daraus resultiert dann die so genannte Multipolentwicklung eines elektrostatischen Potentials, mit der man die dominanten Beiträge bestimmen und anschaulich interpretieren kann.

In der Physik ist auch der Fall $|\vec{d}| \rightarrow 0$ interessant, also ein Dipolpotential, welches man sich aus zwei Punktladungen gleichen Betrags und unterschiedlichen Vorzeichens am selben Ort zusammengesetzt denken kann. Die Beschreibung erfolgt dann über das **elektrische Dipolmoment** $\vec{p} = q \vec{d}$:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q d \cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad \text{Potential eines elektrischen Dipols}$$

$\vec{p} \cdot \vec{r} = q d r \cos\theta$

Diese Definition kann dann auch im Grenzfall $|\vec{d}| \rightarrow 0$ für gegebenes \vec{p} verwendet werden (z.B. können Punktteilchen ein Dipolmoment haben, obwohl ihre elektrische Ladung verschwindet). Das elektrische Feld eines Dipols ergibt sich zu:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right\}$$

Feld eines elektrischen Dipols

Bemerkung: Über seine Rolle bei der Multipolentwicklung elektrostatischer Felder hinaus ist der Begriff des Dipols auch bedeutsam in der Behandlung elektromagnetischer Strahlung. Im Rahmen der **Elektrodynamik** (im Unterschied zur **Elektrostatik**) wird die Dipolstrahlung behandelt (siehe Hauptvorlesung!)

4 Magnetostatik

... ist charakterisiert durch $\rho \neq 0$, $\vec{j} \neq 0$, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, so dass die Maxwell-Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

mit der Lorentz-Kraft $\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$.

Es gibt demnach zusätzlich zu einem elektrostatischen Quellenfeld \vec{E} nun auch ein statisches, magnetisches Wirbelfeld \vec{B} . Diese Felder sind entkoppelt, da wegen $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ die Maxwell-Gleichungen nicht gekoppelt sind. Es genügt also im Folgenden die Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \\ \vec{F} &= q \left(\vec{v} \times \vec{B} \right) \end{aligned}$$

zu untersuchen.

Wie im elektrostatischen Fall gibt es verschiedene Methoden, ein Magnetfeld zu berechnen:

- (i) mit Hilfe des Stokes'schen Satzes aus dem Ampère-Gesetz
- (ii) durch direkte Lösung der Maxwell-Gleichungen
- (iii) aus dem zu einem Problem gehörenden magnetischen Vektorpotential
- (iv) aus dem (verallg.) Biot-Savart-Gesetz

4.1 Anwendung des Stokes'schen Satzes

Offenbar gilt (vgl. 2.2.3):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} &\Rightarrow \int_A \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right) \cdot d\vec{A} = \mu_0 \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} \\ \Leftrightarrow \int_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} &= \mu_0 \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}; \quad d\vec{A} = dA \vec{n}; \quad \vec{n} = \text{Flächennormaleneinheitsvektor} \end{aligned}$$

Ist nun die Geometrie hinreichend einfach, \vec{B} konstant entlang des geschlossenen Weges (also des Randes ∂A der stromdurchsetzten Fläche A) und parallel zu letzterem ($\vec{B} \parallel d\vec{s}$), so gilt

$$B = \frac{\mu_0 \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}}{\int_{\partial A} ds}$$

Bemerkung: Aufgrund der „Wirbelnatur“ von \vec{B} ist diese allgemeine Beziehung auf die Angabe von $B = |\vec{B}|$ beschränkt.

Beispiel: gerader, mit konst. Stromdichte durchflossenen Leiter mit Radius R

$$\vec{j}(\vec{r}) = \begin{cases} j \vec{e}_z, & j = \text{const.}; & r \leq R \\ 0; & & r > R \end{cases}$$

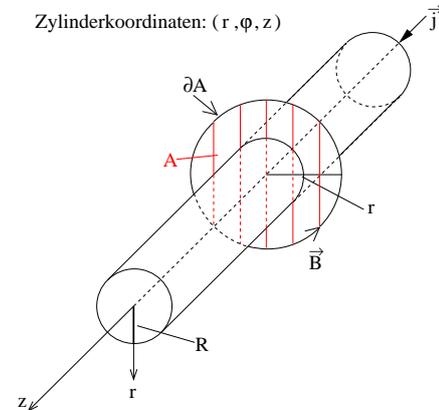


Abbildung 4.1: stromdurchfl. Leiter

Für das Feld im **Leiterinneren** gilt:

$$\vec{B} = B \vec{e}_\varphi; \quad d\vec{s} = d\vec{r} = r d\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \int_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \int_0^{2\pi} r d\varphi = B 2\pi r$$

$$\int_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int \vec{j} \cdot d\vec{A} \Leftrightarrow B_i 2\pi r \stackrel{!}{=} \mu_0 j \pi r^2$$

$$\Rightarrow \vec{B}_i = \mu_0 \frac{j r}{2} \vec{e}_\varphi$$

Im **Außenraum** des Leiters gilt wegen

$$\int \vec{j} \cdot d\vec{A} = j \pi R^2 \quad (\text{Integrand} = 0 \text{ für } r > R):$$

$$B_a 2\pi r = \mu_0 j \pi R^2 =: \mu_0 I$$

$$\Rightarrow \vec{B}_a = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi$$

Insgesamt also:

4.2 Direkte Lösung der Maxwell-Gleichungen

Zu lösen ist das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{B} &= 0 \\ \text{rot } \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

Lösung (wie immer !) durch Wahl geeigneter Koordinaten und Beachtung der gegebenen Randbedingungen.

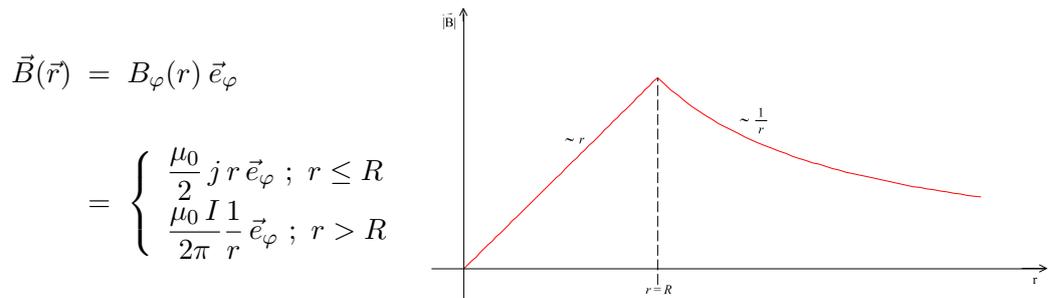


Abbildung 4.2: B-Feldverlauf

Beispiel:**gerader, mit konst. Stromdichte durchflossener Leiter mit Radius R**Wähle wieder Zylinderkoordinaten: $\vec{B} = B_r \vec{e}_r + B_\varphi \vec{e}_\varphi + B_z \vec{e}_z$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) - \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z$$

Wegen $\mu_0 \vec{j} = \mu_0 j \vec{e}_z$ folgen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} = 0 \\ \text{(II)} \quad & \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = 0 \\ \text{(III)} \quad & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) - \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right) = \mu_0 j \end{aligned}$$

Die Problemsymmetrie liefert $\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$. Gleichung (I) ist daher erfüllt.

Aus Gleichung (II) folgt:

$$B_z \neq B_z(r) \Rightarrow B_z = \text{const.} = 0$$

$$\text{nat. Randbed: } \lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \vec{B}(\vec{r}) = 0$$

Gleichung (III) liefert für den **Innenraum** ($r \leq R$):

$$r B_\varphi = \frac{1}{2} \mu_0 j r^2 + C_1 \Rightarrow B_\varphi = \frac{\mu_0}{2} j r + \frac{C_1}{r} = \frac{\mu_0}{2} j r$$

$$C_1 = 0, \text{ wegen } B < \infty \text{ für } r \rightarrow 0$$

und für den **Außenraum** ($r > R$):

$$r B_\varphi = \text{const.} \Rightarrow B_\varphi = \frac{C_2}{r} = \frac{\mu_0 j R^2}{2 r} = \frac{\mu_0 j \pi R^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Anschlussbedingung bei $r = R$:

$$\frac{C_2}{R} \stackrel{!}{=} \frac{\mu_0}{2} j R \Rightarrow C_2 = \frac{\mu_0}{2} j R^2$$

$$I = j \pi R^2$$

also die erwartete Lösung.

Bemerkung: Aus $\operatorname{div} \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_r) = 0$ folgt noch:
 $B_r = \frac{C_3}{r} = 0$, da $C_3 = 0$, wegen $B < \infty$ für $r \rightarrow 0$

4.3 Das magnetische Vektorpotential

Ähnlich wie im Falle des elektrostatischen Feldes (vgl. 3.4) legt hier die Gleichung $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ die Definition eines Potentials nahe:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{ist stets erfüllt für} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Damit folgt aus dem Ampère'schen Gesetz:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

Vektoranalytisches
„BAC-CAB“ ☺

Ähnlich wie im Falle des skalaren elektrostatischen Potentials $\Phi(\vec{r})$ ist auch das magnetische Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ nicht eindeutig festgelegt: Offenbar gilt nämlich für eine beliebige Funktion $\lambda(\vec{r})$ mit $\vec{A} = \vec{A}_0 + \vec{\nabla} \lambda$ die Gleichung:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_0 + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \lambda = \vec{\nabla} \times \vec{A}_0$$

Diese Wahlfreiheit bzgl. $\lambda(\vec{r})$ kann genutzt werden, um $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ zu erreichen („Coulomb-Eichung“, s.u.), denn:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0 + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \lambda) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0 + \Delta \lambda \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \lambda = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0$$

Dazu ist also die Funktion $\lambda(\vec{r})$ lediglich als Lösung einer Poisson-Gleichung zu bestimmen (vgl. 3.6.3). Mit dieser Coulomb-Eichung hat man dann (s.o.)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

d.h. die Komponente von $\vec{A}(\vec{r})$ erfüllen jeweils eine Poisson-Gleichung:

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

Die formale Lösung ist uns längst bekannt (siehe 3.4):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'$$

Für den Spezialfall von Linien- (\vec{I}) und Flächenströmen (\vec{K}) gilt entsprechend:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{\vec{I}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dr' \quad ; \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_A \frac{\vec{K}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^2 r'$$

Insgesamt demnach:

$$\vec{A}(\vec{r}) = A_z(r) \vec{e}_z = \begin{cases} -\frac{\mu_0}{4} j (r^2 - R^2) \vec{e}_z & ; r \leq R \\ -\frac{\mu_0}{2} j R^2 \ln\left(\frac{r}{R}\right) \vec{e}_z & ; r > R \end{cases}$$

Und damit schließlich wieder:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} +\frac{\mu_0}{2} j r \vec{e}_\varphi & ; r \leq R \\ +\frac{\mu_0}{2} j R^2 \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi & ; r > R \end{cases}$$

4.4 Das Biot-Savart-Gesetz

Aus der Integraldarstellung des Vektorpotentials im vorherigen Abschnitt folgt eine entsprechende Darstellung für das Magnetfeld:

$$\begin{aligned} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{j}(\vec{r}') \times \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3r' \\ &\quad \left(\begin{array}{l} \vec{\nabla} \times (\vec{A} \Phi) = \Phi \vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{A} \times \vec{\nabla} \Phi \\ \vec{\nabla} \times \vec{j}(\vec{r}') = 0 \end{array} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' \quad \text{ („Verallgemeinertes“ } \\ &\quad \text{Biot-Savart-Gesetz} \end{aligned}$$

Diese Beziehung ist analog zu der in 3.3 hergeleiteten für das elektrostatische Feld. Offenkundig gilt auch für Magnetfelder das Superpositionsprinzip.

Die in der Praxis oft (meist?) „unhandliche“ Integralformel kann durch Spezialisierung auf Linienströme, d.h. durch

$$\vec{j}(\vec{r}) d^3r' = I d\vec{r}'$$

auf das ursprüngliche Biot-Savart-Gesetz (1820) reduziert werden:

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \int_L \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad \text{Biot-Savart-Gesetz für Linienströme}$$

Bemerkung: Oft wird das Biot-Savart-Gesetz nur für geschlossene Linienströme angegeben.

Beispiel: **gerader, Stromdurchflossener, ausdehnungsloser Leiter**

Wähle Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= z' \vec{e}_z \Rightarrow d\vec{r}' = dz' \vec{e}_z \\ \wedge \quad \vec{r} - \vec{r}' &= \rho \vec{e}_\rho + (z - z') \vec{e}_z \\ \Rightarrow (\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{r}' &= -\rho \vec{e}_\varphi dz' \end{aligned}$$

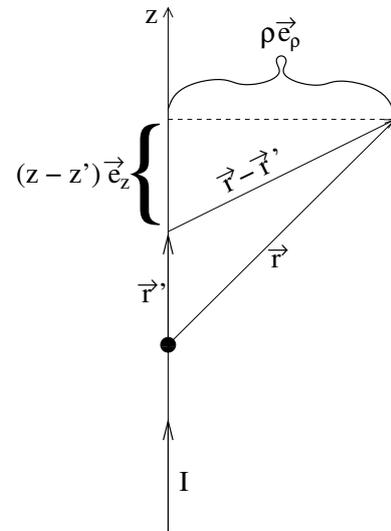


Abbildung 4.3: stromdurchflossener Leiter

Also:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= + \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho \vec{e}_\varphi}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}^3} dz' \\ &= - \frac{\mu_0}{4\pi\rho} I \vec{e}_\varphi \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}^3} dt \\ &\quad \left. \begin{array}{l} z - z' = \rho t \\ \Rightarrow dz' = -\rho dt \end{array} \right\} \\ &= + \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} \vec{e}_\varphi \underbrace{\left[\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=2} = + \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

Das entspricht (natürlich!) dem oben gefundenen Ergebnis für das Magnetfeld außerhalb eines geraden Drahtes endlicher Dicke.

Beispiel: **Magnetfeld im Mittelpunkt P einer kreisförmigen Leiterschleife**

In Zylinderkoordinaten gilt:

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= R \vec{e}_\rho \Rightarrow d\vec{r}' = R d\varphi \vec{e}_\varphi \\ \wedge \quad \vec{r} - \vec{r}' &= \vec{0} - R \vec{e}_\rho = -R \vec{e}_\rho \\ \Rightarrow (\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{r}' &= -R^2 d\varphi \vec{e}_z \end{aligned}$$

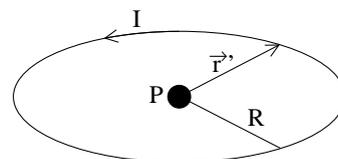


Abbildung 4.4: Leiterschleife

Also:

$$\vec{B}(\vec{r} = 0) = + \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{2\pi} \frac{R^2 \vec{e}_z}{\sqrt{(-R)^2}^3} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{e}_z$$

In Übereinstimmung mit der Erwartung verschwindet das Magnetfeld für $R \rightarrow \infty$.

4.5 Die Kraft auf einen Strom im Magnetfeld

Bisher wurde das Magnetfeld für gegebene stationäre Strom(dichte)verteilungen berechnet. Was geschieht aber mit einem Strom, der sich im Magnetfeld einer anderen Stromverteilung befindet? Die Antwort ergibt sich mit Hilfe des magnetischen Anteils der Lorentz-Kraft $q(\vec{v} \times \vec{B})$ auf eine Ladung:

Für mehrere Ladungsträger mit Ladung q mit der Teilchenzahldichte n (= Teilchenzahl pro Volumen) gilt:

$$\vec{j}(\vec{r}') = q n(\vec{r}') \vec{v}$$

so dass sich eine (Lorentz-)Kraftdichte (s.o.)

$$\vec{f}(\vec{r}') = q n \vec{v} \times \vec{B} = \vec{j} \times \vec{B}$$

definieren lässt. Daraus ergibt sich unmittelbar:

$$\vec{F} = \int_V \vec{f}(\vec{r}') d^3 r' = \int_V \vec{j} \times \vec{B} d^3 r'$$

Dies erklärt z.B. die Anziehung/Abstoßung von gleichsinnig/entgegengesetzt von Strom durchflossenen parallelen Leitern (Schulversuch?):

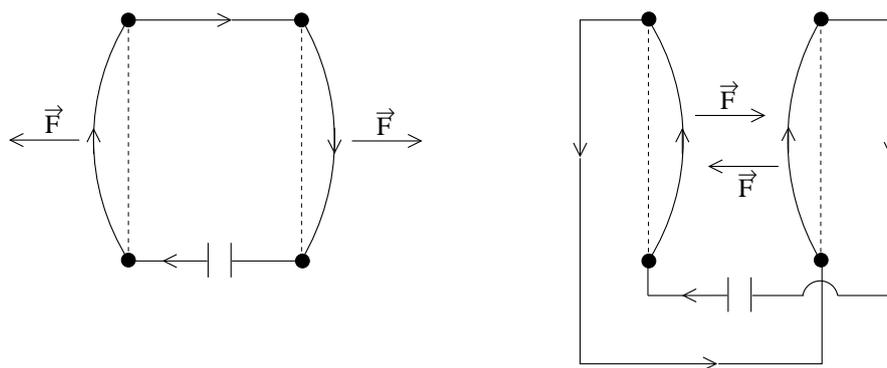


Abbildung 4.5: Kraft auf stromdurchflossene Leiter

Kraftrichtung ergibt sich aus

- rechte-Hand-Regel für stromdurchflossenen Draht $\Rightarrow \vec{B}$
- Stromrichtung in jeweils anderen Draht (Elektronen mit $q < 0$!)
- $\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B}$

4.6 Verhalten von $\vec{B}(\vec{r})$ und $\vec{A}(\vec{r})$ an Grenzflächen

Aufgrund der gesehenen Analogie zwischen Elektro- und Magnetostatik stellt sich die Frage nach der Auswirkung von Flächenströmen (analog zu Flächenladungen). Dazu eine zu 3.6.1 analoge Betrachtung:

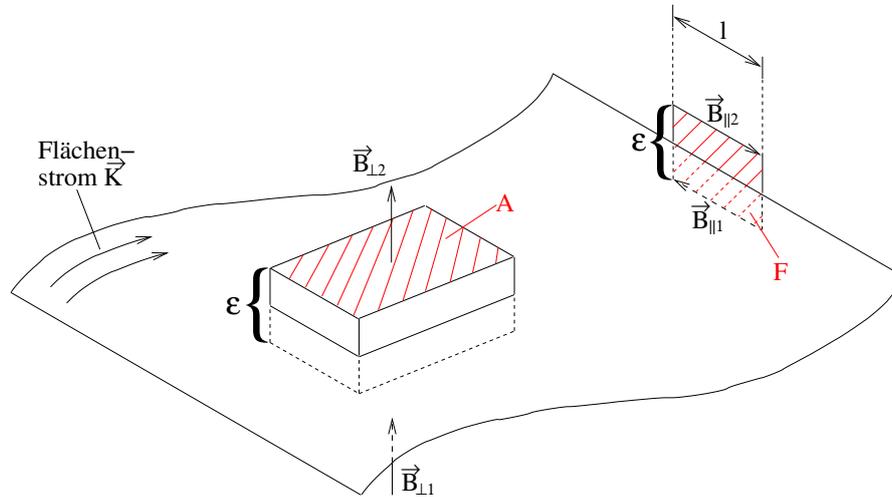


Abbildung 4.6: Flächenstrom

$$\begin{aligned} \text{Sei } \vec{B}_1 &= \vec{B}_{\parallel 1} + \vec{B}_{\perp 1} \hat{=} \text{ Feld unterhalb eines Flächenstroms } \vec{K} \\ \vec{B}_2 &= \vec{B}_{\parallel 2} + \vec{B}_{\perp 2} \hat{=} \text{ Feld oberhalb eines Flächenstroms } \vec{K} \end{aligned}$$

Durch Anwendung des Gauß'schen Satzes auf ein hinreichend kleines quaderförmiges Volumen $V = A \cdot \varepsilon$ findet man:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V \operatorname{div} \vec{B} dV = \int_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{f} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} (B_{\perp 2} - B_{\perp 1}) A \\ \Rightarrow \boxed{B_{\perp 2} = B_{\perp 1}} &\hat{=} \text{ Senkrechtkomponente immer stetig} \end{aligned}$$

Anwendung des Stokes'schen Satzes auf eine hinreichend kleine Fläche F :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} &\Rightarrow \int (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{F} = \mu_0 \int \vec{j} \cdot d\vec{F} \\ \Leftrightarrow \int_{\partial F} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 |\vec{I}| &\underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\Rightarrow} (B_{\parallel 2} - B_{\parallel 1}) l = \mu_0 |\vec{I}| \underset{\vec{I} = \vec{K} l}{=} \mu_0 |\vec{K}| l \\ \Rightarrow \boxed{B_{\parallel 2} - B_{\parallel 1} = \mu_0 |\vec{K}|} &\hat{=} \text{ Unstetigkeit der Parallelkomponente, wenn } |\vec{K}| \neq 0 \end{aligned}$$

Insgesamt gilt demnach ($\vec{n} \hat{=}$ Flächennormaleneinheitsvektor):

$$\boxed{\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 (\vec{K} \times \vec{n})}$$

Verhalten des magnetischen Feldes an stromdurchflossenen Grenzflächen

Für das magnetische Vektorpotential gilt in Coulomb-Eichung ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$):

$$A_{\perp 2} - A_{\perp 1} = 0 \quad (\text{analog zur Folgerung aus } \text{div } \vec{B} = 0)$$

und wegen $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ folgt:

$$\int_F (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{F} = \int_{\partial F} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_F \vec{B} \cdot d\vec{F} = 0 \Rightarrow A_{\parallel 2} - A_{\parallel 1} = 0$$

$\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow F \rightarrow 0$

Das magnetische Vektorpotential ist also an stromdurchflossenen Grenzflächen insgesamt stetig:

$$\boxed{\vec{A}_2 - \vec{A}_1 = 0}$$

Für seine Normalenableitung gilt hingegen:

$$\boxed{(\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}_2 - (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}_1 = \frac{\partial \vec{A}_2}{\partial n} - \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial n} = -\mu_0 \vec{K}}$$

Bemerkung: Diese Ergebnisse erklären (a posteriori) die Wahl der Anschlussbedingungen in den Abschnitten 4.2 und 4.3

Bemerkung: Ähnlich wie eine „Flächenladung“ ist ein „Flächenstrom“ natürlich eine Idealisierung, vgl. die entsprechende Bemerkung bezüglich σ .

Bemerkung: Wie in der Elektrostatik kann auch für das magnetische Vektorpotential eine Multipolentwicklung gemacht werden. Man findet wegen $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, dass der Monopolbeitrag immer verschwindet. Mit dem **magnetischen Moment** $\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') d^3 r'$ findet man für den **magnetischen Dipol**:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \quad ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{m})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right\}$$

5 Elektrodynamik

Im Unterschied zu den vorangehenden Kapiteln sei nun auch $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$, so dass keine Vereinfachung der Maxwell-Gleichungen mehr vorliegt. Sie lauten also:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

mit der Lorentzkraft $\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ und der aus den Maxwell-Gleichungen herleitbaren Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$.

Wie zuvor bemerkt, können die Maxwell-Gleichungen auch äquivalent als Integralgleichungen formuliert werden (Anwendung des Gauß'schen und Stokes'schen Satzes!):

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{f} &= \frac{qV}{\varepsilon_0} \\ \int_{\partial F} \vec{E} \cdot d\vec{s} &= -\frac{d}{dt} \int_F \vec{B} \cdot d\vec{F} \\ \int_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{f} &= 0 \\ \int_{\partial F} \vec{B} \cdot d\vec{s} &= \mu_0 \int_F \vec{j} \cdot d\vec{F} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_F \vec{E} \cdot d\vec{F} \end{aligned}$$

Im allgemeinen ist aber die Lösung der Differentialgleichungen einfacher, so dass wir uns im Folgenden auf die differentielle Formulierung beschränken.

Im Unterschied zu den Gleichungen der Elektro- und Magnetostatik sind die vollen Maxwell-Gleichungen gekoppelt, d.h. \vec{E} und \vec{B} sind ebenso wenig unabhängig voneinander wie ρ und \vec{j} . Um eine Entkopplung zu erreichen, betrachten wir

5.1 Die elektrodynamischen Potentiale

Die **Idee** ist die gleiche wie im statischen Fall: man versucht durch Definition geeigneter Potentialfunktionen die Formulierung der Maxwell-Gleichungen zu vereinfachen. Wie zuvor (vgl. 4.3) scheint die Einführung des magnetischen Vektorpotentials \vec{A} vielversprechend:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}}$$

Damit folgt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \left\{ \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right\} = 0$$

In Verallgemeinerung des elektrostatischen Falles gilt hier:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \Phi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

Damit sind die beiden homogenen Gleichungen stets erfüllt, wenn Φ und \vec{A} bekannt sind. Zu ihrer Bestimmung setzt man \vec{E} und \vec{B} in die inhomogenen Gleichungen ein:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\Delta \Phi - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta \Phi + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

und:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} \\ &= \mu_0 \vec{j} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \vec{\nabla} \Phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right\} \\ \Rightarrow & \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right\} \vec{A} + \vec{\nabla} \left\{ (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} = \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\square \vec{A} - \vec{\nabla} \left\{ (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} = -\mu_0 \vec{j}}$$

$$\boxed{\square := \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}}$$

Bemerkung: Man löst also zunächst für gegebene Ladungs- und Stromdichteverteilung die inhomogenen Gleichungen für die Potentiale Φ und \vec{A} und mit diesen dann die homogenen Gleichungen für \vec{E} und \vec{B} .

Bemerkung: Man beachte, dass die elektrodynamischen Potentiale Φ und \vec{A} **nicht** mit denen aus der Elektro- und Magnetostatik identisch sind, sondern diese verallgemeinern (Zeitabhängigkeit!).

Die Lösung der beiden Potentialgleichungen ist nicht trivial, da auch diese Gleichungen in der gegebenen Formulierung gekoppelt bleiben. Um eine Entkopplung zu erreichen bedient man sich sogenannter

5.2 Eichtransformationen

Die Grundidee hierbei ist (erneut wie früher gesehen!), dass für die Bestimmung der elektromagnetischen Felder \vec{E} und \vec{B} die Potentiale Φ und \vec{A} nicht eindeutig bestimmt sein müssen. Wir erinnern uns (vgl. 4.3), dass (jetzt zeitabhängig!)

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0(\vec{r}, t) + \vec{\nabla}\lambda(\vec{r}, t)$$

unabhängig von $\lambda(\vec{r}, t)$ verträglich ist mit

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad , \quad \text{da} \quad \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\lambda(\vec{r}, t) = 0$$

Da nun im Allgemeinen auch \vec{E} vom Vektorpotential abhängt (s.o.), muss gefordert werden:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial\vec{A}_0}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\lambda \\ &\stackrel{!}{=} -\vec{\nabla}\Phi_0 - \frac{\partial\vec{A}_0}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \Phi_0 = \Phi + \frac{\partial\lambda}{\partial t} \end{aligned}$$

Mit den Gleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) &= \vec{A}_0(\vec{r}, t) + \vec{\nabla}\lambda(\vec{r}, t) \\ \Phi(\vec{r}, t) &= \Phi_0(\vec{r}, t) - \frac{\partial\lambda(\vec{r}, t)}{\partial t} \end{aligned}}$$

liegt eine **Eichtransformation** vor, unter der die physikalischen Felder \vec{E} und \vec{B} invariant sind. Diese Nichteindeutigkeit der Potentiale kann nun genutzt werden, um die inhomogenen Gleichungen für die Potentiale weiter zu vereinfachen. Es bietet sich zunächst die **Coulomb-Eichung** (vgl. 4.3) an, die hier aber nicht weiter verfolgt wird. Der wesentliche Nachteil der Coulomb-Eichung ist die Tatsache, dass die Potentialgleichungen gekoppelt bleiben.

Vorteilhafter ist

Die Lorenz(t)z-Eichung:

Vorbemerkung: Ursprünglich gefunden vom dänischen Physiker Ludwig V. Lorenz, also nicht vom Holländer Hendrick A. Lorentz. Dennoch wird die Eichung in vielen Lehrbüchern nach Letzterem benannt (vgl. Jackson, Griffith)

Setzt man die allgemeine Form der Eichtransformation (s.o.) in die inhomogenen Potentialgleichungen ein, so findet man:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_0 - \frac{\partial}{\partial t}\Delta\lambda + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0) + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\lambda) &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \Rightarrow \Delta\Phi_0 + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0) &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \square \vec{A}_0 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\vec{\nabla}\lambda) + \underbrace{\Delta(\vec{\nabla}\lambda)} - \vec{\nabla} \left\{ \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0)} + \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\lambda)} \right\} - \vec{\nabla} \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial\Phi_0}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} \right] &= -\mu_0 \vec{j} \\ \Rightarrow \square \vec{A}_0 - \vec{\nabla} \left\{ (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\Phi_0}{\partial t} \right\} &= -\mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

Und dadurch motiviert schreibt man:

$$\square \Phi_0 + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} \right\} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Die zur Entkopplung der Gleichungen notwendige Wahl ist offensichtlich

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} = 0$$

was als Loren(t)z-Eichung bekannt ist. Im statischen Fall ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) geht sie in die Coulomb-Eichung über.

Diese bedingt:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \Delta \lambda + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow -\square \lambda &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} - \Delta \lambda = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \end{aligned}$$

Es genügt demnach

$$\begin{aligned} \square \Phi_0 &= - \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial t^2} - \Delta \Phi_0 \right\} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \square \vec{A}_0 &= - \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}_0}{\partial t^2} - \Delta \vec{A}_0 \right\} = -\mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

zu lösen. Damit ist das Ziel erreicht: die beiden inhomogenen Gleichungen ($\hat{=}$ 4 partielle Differentialgleichungen für 4 Funktionen) sind entkoppelt, d.h. Φ_0 und \vec{A}_0 können für gegebenes ρ und \vec{j} unabhängig voneinander bestimmt werden.

Bemerkung: Aufgrund der Symmetrie der beiden Gleichungen in Loren(t)z-Eichung bieten sie sich als „natürlicher“ Ausgangspunkt für eine **kovariante Formulierung** der Elektrodynamik an.

Die Lösungen der Potentialgleichungen in Loren(t)z-Eichung werden in der Hauptvorlesung zur E-Dynamik behandelt. Hier untersuchen wir noch

5.3 Erhaltungssätze in der Elektrodynamik

Wie immer sollte natürlich auch in der Elektrodynamik die Erhaltung von Energie, Impuls und Drehimpuls gewährleistet sein. Das sei für die zuerst genannte Größe (Energie) explizit gezeigt...

Der Energiesatz der Elektrodynamik:

Die für die Physik grundlegenden Erhaltungssätze für z.B. Impuls, Energie oder auch Drehimpuls gelten (natürlich) auch in der Elektrodynamik. Für die klassische Elektrodynamik ist der Energiesatz (neben dem Ladungserhaltungssatz) von besonderer Bedeutung, wie im Folgenden gezeigt wird.

Man geht dazu üblicherweise aus von der von einem elektromagnetischen Feld an einem geladenen Teilchen geleisteten Arbeit

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left\{ q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \right\} \cdot \{ \vec{v} dt \} = q\vec{E} \cdot \vec{v} dt$$

Für eine Ladungsverteilung ρ folgt:

$$\frac{dW}{V} = \vec{f} \cdot d\vec{r} = \left\{ \rho\vec{E} + \rho\vec{v} \times \vec{B} \right\} \cdot \{ \vec{v} dt \} = \rho\vec{E} \cdot \vec{v} dt = \underbrace{\vec{j}}_{\vec{j} = \rho\vec{v}} \cdot \vec{E} dt$$

Das heißt: Die pro Volumen- und Zeiteinheit vom Feld an der Ladungsverteilung geleistete Arbeit ist durch $\vec{j} \cdot \vec{E}$ gegeben. Mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen findet man:

$$\begin{aligned} \vec{j} \cdot \vec{E} &= \left\{ \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} \left[\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \right] - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} \\ &= \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \quad \left(\underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{E} = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B})} \right) \\ &= \underbrace{-\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B})}_{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &= -\vec{\nabla} \cdot \left\{ \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right\} - \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \right\} \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck führt auf folgende **Definitionen**:

$$U_{em}(\vec{r}, t) = \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2(\vec{r}, t) + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2(\vec{r}, t) \quad \text{Energiedichte des elektromagnetischen Feldes}$$

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \left\{ \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right\} \quad \text{Energiestromdichte bzw. Poynting-Vektor}$$

mit denen man findet:

$$\frac{\partial U_{em}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E} \quad \text{(Differentialles) Poynting-Theorem}$$

Das Theorem besagt, dass die (explizite) zeitliche Änderung der elektromagnetischen Feldenergiedichte durch die Energiestromdichte und eine „Senke“ gegeben ist. Anders formuliert: Die pro Zeiteinheit an den Ladungen im Volumen V geleistete Arbeit ist gleich der Summe der Änderungen (Abnahme!) der Feldenergie in V und des Energieflusses durch die Oberfläche ∂V des Volumens.

Bemerkung: Für die Energie(dichte) des elektromagnetischen Feldes gilt das Superpositionsprinzip **nicht**. Sei z.B. $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \stackrel{i.A.}{\Rightarrow} \vec{E}^2 \neq \vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2$, d.h. die Gesamtenergiedichte ist ungleich der Summe der Einzelenergiedichten.
Beispiel: $\vec{E}_1 = \vec{E}_0, \vec{E}_2 = -\vec{E}_0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{0}$, d.h. die Gesamtenergiedichte verschwindet obwohl die Einzelenergiedichten von Null verschieden sind.

Für alles Weitere siehe die Hauptvorlesung...

5.4 Ein kurzer Überblick über elektromagnetische Wellen im Vakuum

5.4.1 Homogene Wellengleichung

Für ladungs- und stromfreie Bereiche gilt für die elektromagnetischen Potentiale in Loren(t)z-Eichung:

$$\begin{aligned}\square \Phi(\vec{r}, t) &= 0 \\ \square \vec{A}(\vec{r}, t) &= 0\end{aligned}$$

Für die Felder erhalten wir aus den Maxwell-Gleichungen:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

mit:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \underbrace{\left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right)}_{-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} &= \underbrace{\vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right)}_{=0} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E} \\ \Rightarrow -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\Delta \vec{E} \\ \Rightarrow \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= 0\end{aligned}$$

ergibt sich:

$$\boxed{\square \vec{E} = 0} \quad \text{und entsprechend auch} \quad \boxed{\square \vec{B} = 0}$$

Das heißt: In kartesischen Koordinaten erfüllt jede Komponentenfunktion f die Wellengleichung.

$$\boxed{\Delta f = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}} \quad \text{oder alternativ} \quad \boxed{\square f = 0}$$

5.4.2 Ebene Wellen

Im 1-dimensionalen Fall sehen wir, dass

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

gelöst wird durch:

$$f(x, t) = f_1(kx - \omega t) + f_2(kx + \omega t), \quad \text{o.B.d.A.: } \omega \geq 0$$

$$\Rightarrow k^2 f_1''(kx - \omega t) + k^2 f_2''(kx + \omega t) - \frac{1}{c^2} f_1''(kx - \omega t) \omega^2 - \frac{1}{c^2} f_2''(kx + \omega t) \omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) f(x, t) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = k^2 c^2} \quad \text{Dispersionsrelation der elektromagnetischen Wellen}$$

Im **3-dimensionalen Fall** gilt entsprechend: $f(\vec{r}, t) = f_1(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + f_2(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)$

Untersuchung von $f_1(\underbrace{\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t}_{\text{Phase } \phi(\vec{r}, t)})$

feste Zeit: Fläche konstanter Phase ist durch $\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const.}$ gegeben. $\vec{k} \cdot \vec{r}$ ist die Gleichung der Wellenfront-Ebene.

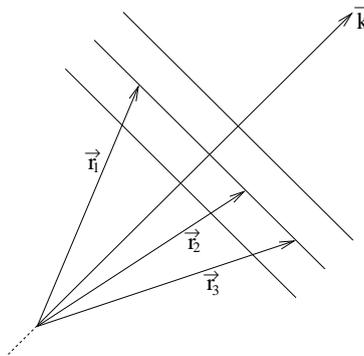


Abbildung 5.1: Wellenfront-Ebene

Zeitablauf: für den **Zeitablauf** (Bewegung der Ebene) gilt

$$\begin{aligned}\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t &= k r_{\parallel} - \omega t = c_1 = \text{const.} \\ \Rightarrow r_{\parallel} &= \frac{c_1}{k} + \frac{\omega}{k} t\end{aligned}$$

Die Ebene bewegt sich mit (Phasen)geschwindigkeit: $\frac{dr_{\parallel}}{dt} = \frac{\omega}{k}$ in Richtung \vec{k} .

wähle f_1 : z.B. ebene Welle:

$$f_1(\vec{r}, t) = A \exp \left\{ i \left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \right) \right\} \quad (\text{eigentlich nur der Realteil})$$

\vec{k} : Wellenvektor, $\lambda = \frac{2\pi}{k}$: Wellenlänge (Abstand nächstbenachbarter Wellenfronten)

fester Ort \vec{r}_0 : Wiederholung nach $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\nu = \frac{1}{\tau}: \text{Frequenz, } \omega = 2\pi\nu: \text{Kreisfrequenz und es gilt } c = \lambda\nu = \frac{\lambda}{\tau}$$

Übertragung auf elektromagnetisches Feld (nur der Realteil ist physikalisch relevant) mit

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 \exp \left\{ i \left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \right) \right\} \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 \exp \left\{ i \left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \right) \right\}\end{aligned}$$

Die Wellengleichung ist erfüllt. Die Kopplung erfolgt über die Maxwell-Gleichungen durch

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Mit den Nebenrechnungen

$$\begin{aligned}
 -\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)_x &= i\bar{\omega} B_x \\
 &= i\bar{\omega} B_{0x} \exp\left\{i\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \bar{\omega} t\right)\right\} \\
 \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right)_x &= \frac{\partial}{\partial y} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_y \\
 &= (E_{0z} i k_y - E_{0y} i k_z) \exp\left\{i\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t\right)\right\} \\
 &= i\left(\vec{k} \times \vec{E}_0\right)_x \exp\left\{i\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t\right)\right\}
 \end{aligned}$$

ergibt sich:

$$i\left(\vec{k} \times \vec{E}_0\right) \exp\left\{i\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t\right)\right\} = i\bar{\omega} \vec{B}_0 \exp\left\{i\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \bar{\omega} t\right)\right\}$$

Da dies für alle Raum-Zeit-Punkte gelten soll, fordern wir:

$$\omega = \bar{\omega} \quad ; \quad \vec{k} = \vec{k}$$

Wir erhalten die Beziehung

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0$$

und mit $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ erhalten wir

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0$$

Weiterhin folgt aus $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ entsprechend

$$\vec{k} \times \vec{B}_0 = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0$$

$\vec{E}_0, \vec{B}_0, \vec{k}$ bilden also ein Rechtssystem:

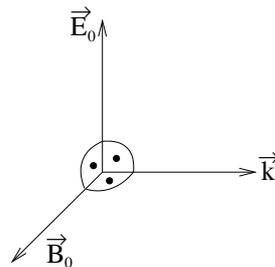


Abbildung 5.2: Rechtssystem

Da die Auslenkung senkrecht zu \vec{k} ist, handelt es sich um **transversale Wellen**. Sei o.B.d.A. $\vec{k} = k \vec{e}_z$, so folgt \vec{E} direkt und \vec{B} kann man aus \vec{E} bestimmen:

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= (E_{0x} \vec{e}_x + E_{0y} \vec{e}_y) \exp\{i(kz - \omega t)\} \\
 \vec{B} &= \frac{1}{c} (-E_{0y} \vec{e}_x + E_{0x} \vec{e}_y) \exp\{i(kz - \omega t)\}
 \end{aligned}$$

$$\text{z.B. wegen } \vec{B}_0 = \frac{1}{\omega} \left(\vec{k} \times \vec{E}_0\right) = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} -k E_{0y} \\ k E_{0x} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} -E_{0y} \\ E_{0x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nehmen wir nun $E_{0y} = 0$ an, ergibt sich für die (physikalisch relevanten) Realteile

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_{0x} \cos(kz - \omega t) \vec{e}_x \\ \vec{B} &= \frac{1}{c} E_{0x} \cos(kz - \omega t) \vec{e}_y\end{aligned}$$

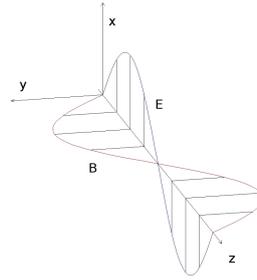


Abbildung 5.3: Transversale Welle

5.4.3 Polarisation ebener Wellen

Die o.a. Lösung ist eine sich in positiver z-Richtung fortpflanzende, monochromatische Welle. Sie ist allein durch \vec{E} (oder \vec{B}) festgelegt.

O.B.d.A. betrachte nun: \vec{E} -Feld mit E_{0x} und E_{0y} komplex:

$$E_{0x} = |E_{0x}| e^{i\phi} \quad \text{und} \quad E_{0y} = |E_{0y}| e^{i(\phi+\delta)}$$

Dabei ist $\phi(\vec{r}, t)$ die oben eingeführte Phase. Für das reale physikalische Feld gilt:

$$\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y$$

mit

$$\begin{aligned}E_x &= |E_{0x}| \cos(kz - \omega t) \\ E_y &= |E_{0y}| \cos(kz - \omega t + \delta)\end{aligned}$$

Der Wert von δ bestimmt die Art der Polarisation, deshalb gibt es eine

Fallunterscheidung der Polarisationen

- **linear polarisiert:** $\delta = 0$ oder $\delta = \pm\pi$

fester Vektor $\vec{E} = (|E_{0x}| \vec{e}_x \pm |E_{0y}| \vec{e}_y) \cdot \cos(kz - \omega t + \phi)$

$$|\vec{E}| = \sqrt{|E_{0x}|^2 + |E_{0y}|^2} \cdot |\cos(kz - \omega t + \phi)|, \quad \tan \alpha = \pm \frac{|E_{0y}|}{|E_{0x}|}$$

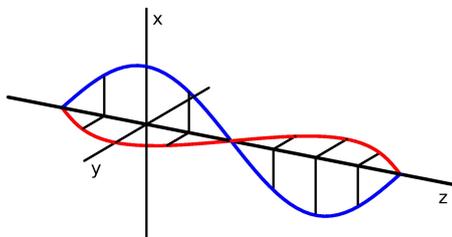


Abb. 5.4: E-Feld Komponenten

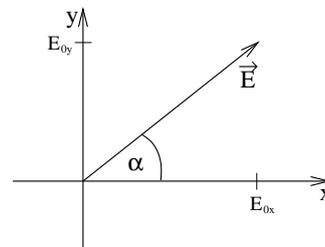


Abb. 5.5: E-Feld Ausrichtung

- **zirkular polarisiert:** $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$ und $|E_{0x}| = |E_{0y}|$

$$\vec{E} = E \{ \cos(kz - \omega t + \phi) \vec{e}_x \mp \sin(kz - \omega t + \phi) \vec{e}_y \}, |\vec{E}| = \text{const.}$$

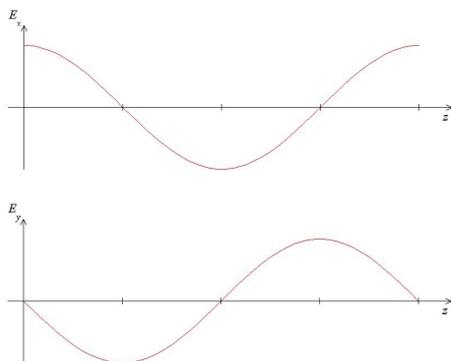


Abb. 5.6: E-Feld Komponenten

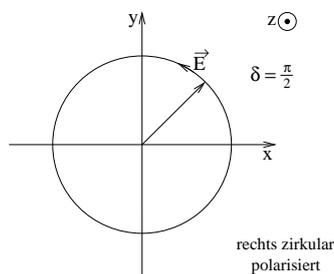


Abb. 5.7: E-Feld Ausrichtung

Blickt man in positive z -Richtung (Ausbreitungsrichtung), so dreht sich \vec{E} nach rechts.

- **elliptisch polarisiert (in x, y):** $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$ und $|E_{0x}| \neq |E_{0y}|$

$$E_x = |E_{0x}| \cos(kz - \omega t + \phi), \quad E_y = \mp |E_{0y}| \sin(kz - \omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{E_x}{|E_{0x}|} \right)^2 + \left(\frac{E_y}{|E_{0y}|} \right)^2 = 1$$

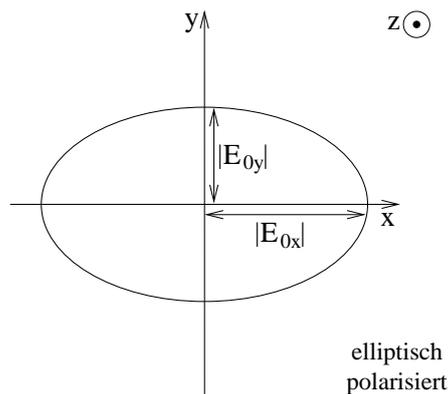


Abbildung 5.8: E-Feld Ausrichtung

- **elliptisch polarisiert (beliebig):** δ beliebig und $|E_{0x}| \neq |E_{0y}|$

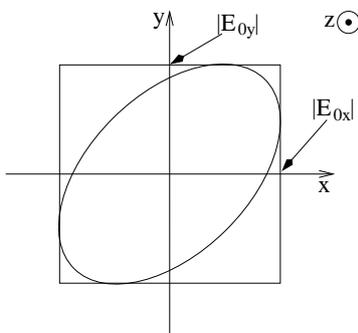


Abbildung 5.9: E-Feld Ausrichtung

6 Spezielle Relativitätstheorie: Kovariante Formulierung

6.1 Der Minkowski-Raum

Die Ergebnisse der speziellen Relativitätstheorie legen eine Erweiterung des (klassischen) 3-dim Konfigurationsraumes (z.B. $\vec{r} = (x, y, z)$) auf eine 4-dim „Raum-Zeit“ nahe:

6.1.1 Vierervektoren

Die Lorentz-Transformation kann als Drehung in einem 4-dim. Vektorraum betrachtet werden, denn es gilt:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\gamma v \\ 0 & 0 & -\gamma \frac{v}{c^2} & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\gamma \frac{v}{c} \\ 0 & 0 & -i\gamma \frac{v}{c} & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{r}' := \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ict' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}}_{\text{Drehmatrix } D_L} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix} =: D_L \vec{r}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \cos \alpha = \gamma \\ \sin \alpha = i\gamma \frac{v}{c} \end{array} \right\} \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = -\gamma^2 \frac{v^2}{c^2} + \gamma^2 = \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1 \\ \Rightarrow \det D_L = |D_L| = 1$$

Bemerkung: Der Drehwinkel α ist imaginär, da wegen $\cos \alpha = \gamma > 1$ gilt und da $\sin \alpha$ rein imaginär ist.

Da Drehungen Längen unverändert lassen, gilt weiter:

$$|\vec{r}'| = |\vec{r}| \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

Das ist gerade der Ausgangspunkt zur Herleitung der Lorentz-Transformation (siehe ?? oben).

Definition: Die 4-dim **Vierervektoren** \vec{r}, \vec{r}' sind Verallgemeinerungen der Ortsvektoren im 3-dim Konfigurationsraum. Allgemein gilt:

$$\vec{r} = (\vec{r}, ict) \quad ; \quad \vec{r}' = (\vec{r}', ict')$$

Vierervektoren heißen auch **Weltvektoren**.

Definition: Der **Minkowski-Raum** oder die **Raum-Zeit** ist der 4-dim Vektorraum, der die Vierervektoren enthält. Punkte im Minkowski-Raum sind **Ereignisse** (vgl.: Punkte im Konfigurationsraum sind Orte). Kurven im Minkowski-Raum nennt man **Weltlinien**.

Veranschaulichung:

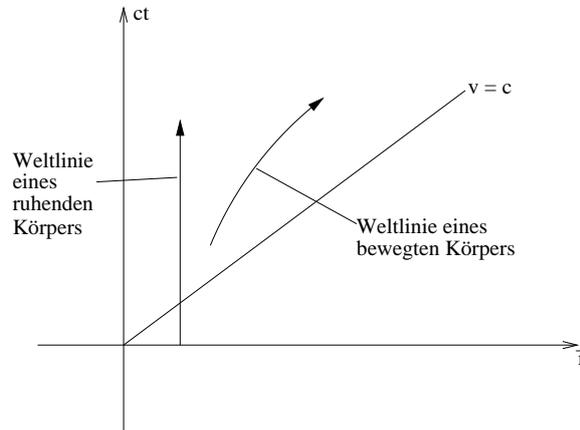


Abbildung 6.1: Minkowski-Raum

Bemerkung: Wegen $v < c$ ist die kleinste mögliche Steigung m einer Weltlinie $m = 1$.

Das Längenelement im Minkowski-Raum

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

ist invariant unter Lorentz-Transformation. Da ds^2 nicht positiv definit ist, unterscheidet man:

- (1) raumartige Abstände: $ds^2 > 0$
- (2) null- oder lichtartige Abstände: $ds^2 = 0$
- (3) zeitartige Abstände: $ds^2 < 0$

Veranschaulichung:

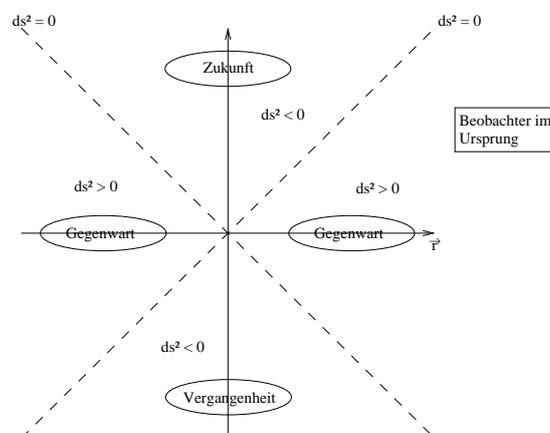


Abbildung 6.2: Längenelement im Minkowski-Raum

Für einen Beobachter im Ursprung sind Ereignisse mit

- raumartigen Abstand unerfahrbar, wegen $c < \infty$
- zeitartigen Abstand entweder in der Vergangenheit oder Zukunft

Bemerkung: Je zwei Ereignisse im raumartigen Bereich des Minkowski-Raumes können in einem geeignet gewählten Inertialsystem gleichzeitig beobachtet werden.

6.1.2 Die Eigenzeit

Um weitere Größen im Minkowski-Raum sinnvoll einführen zu können, ist die Definition einer Lorentz-invarianten Zeiteinheit $d\tau$ erforderlich. Dies erreicht man durch:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \quad \Big| : (-c^2) \\ \Rightarrow d\tau &:= \sqrt{-\frac{ds^2}{c^2}} = \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2} [dx^2 + dy^2 + dz^2]} \\ &= dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right]} \\ &= dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{dt}{\gamma} \quad \text{Eigenzeit (eines Systems)} \end{aligned}$$

Offenkundig ist $d\tau$ wegen der Lorentz-Invarianz von ds^2 und c ebenfalls invariant unter der Lorentz-Transformation.

Bemerkung: Die **Eigenzeit** $d\tau$ ist im Ruhesystem ($v = 0 \Rightarrow \gamma = 1$) identisch mit der Koordinatenzeit dt .

Bemerkung: Die Eigenzeit kann auch aus der Beziehung für die Zeitdilatation (siehe ?? oben) abgeleitet werden.

Bemerkung: Mit Hilfe der Eigenzeit lassen sich die Naturgesetze in Lorentz-invarianter Form formulieren, d.h. in allen Inertialsystemen gelten die (form-)gleichen Naturgesetze („Relativitätsprinzip“).

6.2 Vierergeschwindigkeit, Viererimpuls und Viererkraft

Die Vierergeschwindigkeit \vec{v} wird unter Verwendung der Eigenzeit $d\tau$ analog zur Newton'schen Mechanik definiert:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{d\tau} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}, ic \frac{dt}{d\tau} \right) = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{d\tau}, ic \frac{dt}{d\tau} \right) = \gamma(\vec{v}, ic) \quad \text{Vierergeschwindigkeit}$$

$\vec{r} = (\vec{r}, ict)$

$\frac{dt}{d\tau} = \gamma$

Ähnlich erfolgt die Definition des Viererimpulses:

$$\vec{p} = m_0 \vec{v} = m_0 \gamma (\vec{v}, ic) = (m\vec{v}, imc) = (\vec{p}, imc) \quad \text{Viererimpuls}$$

$$\boxed{m = m_0 \gamma}$$

Aus der letzten Gleichsetzung folgt für den dreidimensionalen Konfigurationsraum:

$$\vec{p} = m \vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}$$

d.h. die **Teilchenmasse** $m = m_0 \gamma$ **ist geschwindigkeitsabhängig**. m_0 heißt **Ruhemasse**.

Bemerkung: Die Massenzunahme bewegter Teilchen wurde tatsächlich bereits 1902 von Kaufmann experimentell nachgewiesen.

Auch die Definition der Viererkraft erfolgt in Analogie zur Newton'schen Mechanik:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}} \quad \text{Viererkraft}$$

6.3 Viererstromdichte und Viererpotential

Die im Falle der Lorentz-Eichung gegebene Formgleichheit der Potentialgleichungen (vgl. II.5.2)

$$\Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}$$

legt die Zusammenfassung der Potentiale und Ladungs- und Stromdichte zu je einem Vierervektor nahe. Wie das zu erfolgen hat, folgt aus der Kontinuitätsgleichung, die infolge der Ladungserhaltung in jedem Inertialsystem gelten muss.

Also:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad \Rightarrow \quad c \frac{\partial \rho}{\partial(ct)} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, \vec{\nabla} \right)}_{\text{4-dim. Divergenzoperator}} \cdot (c\rho, \vec{j}) = 0$$

Folglich ist $\vec{J} := (c\rho, \vec{j})^T$ eine geeignete **Viererstromdichte**. Damit und mit $\frac{1}{\epsilon_0} = c^2 \mu_0$ folgt weiter:

$$\Delta \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right) = -\mu_0 (c\rho, \vec{j})$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \vec{\Omega} = -\mu_0 \vec{J}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{\Omega} = -\mu_0 \vec{J}} \quad \text{Potentialgleichungen in Vierervektornotation}$$

mit dem **Viererpotential** $\vec{\Omega} := (\phi/c, \vec{A})^T$

Bemerkung: Die obigen kovarianten Potentialgleichungen sind die kompakteste (und eleganteste?) Formulierung der Elektrodynamik.

Mit dem Viererpotential lautet die Lorenz(t)-Eichung:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, \vec{\nabla} \right) \cdot \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right) = 0$$

und ist damit äquivalent zum Verschwinden der (4-dimensionalen) Divergenz des Viererpotentials - also eine "relativistische Coulomb-Eichung".

Bemerkung: Hier ist eine **andere** Definition eines Vierervektors (als die in 6.1.1 verwendete) erfolgt. In der Wahl des Vierervektors besteht in der Tat Freiheit, siehe z.B. die Bücher von

$$\text{Greiner: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix}; \text{ Griffiths: } \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \text{ Jackson: } \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

6.4 Der Feldstärketensor

Für das elektrische und magnetische Feld gilt bekanntlich:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

bzw. in Komponenten:

$$-\frac{E_i}{c} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\phi}{c} \right) + \frac{\partial A_i}{\partial(ct)} \quad ; \quad B_i = \frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_k}$$

Mit der Notation

$$\begin{aligned} \text{kontravarianter Vektor: } x^\mu &= (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, x_1, x_2, x_3) \\ \text{kovarianter Vektor: } x_\mu &= (-x_0, x_1, x_2, x_3) = (-ct, x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

gilt für die Lorentztransformation von Vierervektoren:

$$x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu$$

Bemerkung: Diese Notation erlaubt die Darstellung

$$x_\mu x^\mu = \sum_{\mu=0}^3 x_\mu x^\mu = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -c^2 t^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit bedeutet

$$\sum_{\mu=0}^3 x_\mu x^\mu = 0 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2$$

in allen Inertialsystemen (Kugelwellenfront!).

Insbesondere ist

$$(\Delta s)^2 := \sum_{\mu=0}^3 (\Delta x_\mu) (\Delta x^\mu) = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 - c^2 (\Delta t)^2$$

das invariante Intervall oder der Abstand zweier Ereignisse im Minkowski-Raum. Es wird unterschieden:

$$(\Delta s)^2 < 0: \text{zeitartiger Abstand}$$

$$(\Delta s)^2 > 0: \text{raumartiger Abstand}$$

$$(\Delta s)^2 = 0: \text{lichtartiger Abstand}$$

Für $(\Delta s)^2 < 0$ gibt es ein Inertialsystem, in dem die beiden Ereignisse am selben Ort stattfinden. Für $(\Delta s)^2 > 0$ gibt es eines, in dem sie gleichzeitig sind.

Da das Vektorpotential sich entsprechend transformiert, gilt:

$$A^\mu := \left(\frac{\phi}{c}, A_1, A_2, A_3 \right)$$

und damit lassen sich die obigen Gleichungen für die Felder (als 4-dimensionale Rotation) schreiben:

$$F^{\mu\nu} := \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Dieser antisymmetrische **kontravariante Feld(stärke)tensor** ist die relativistische Verallgemeinerung der elektrischen und magnetischen Felder, die somit beide in diese neue Größe vereinigt werden.

Bemerkung: Die Felder werden also nicht einfach zu einem Vierervektor verallgemeinert (was angesichts der 2×3 Komponenten ohnehin nicht möglich wäre), sondern sind als Elemente eines Tensors aufzufassen.

Die Maxwell-Gleichungen lauten in dieser Notation:

$$\sum_{\nu} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \mu_0 J^\mu \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

Bemerkung: Die Komponenten des kovarianten Tensors $F_{\mu\nu}$ ergeben sich analog zu einem Vierer-Vektor ($\hat{=}$ Minuszeichen bei $\mu = \nu = 0!$).

6.5 Die Lorentz-Transformation der Felder

... ergibt sich aus der Tatsache, dass sie als Komponenten eines Tensors aufgefasst werden müssen. Für die Transformation des Letzteren gilt

$$F'^{mn} = L_\mu^m L_\nu^n F^{\mu\nu} \quad ; \quad L_\nu^n = L_\mu^m = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

\downarrow
 $\vec{v} = v\vec{e}_x$

Demnach gilt offenbar:

$$\begin{aligned} \frac{E'_x}{c} &= (F')^{01} = L_\mu^0 L_\nu^1 F^{\mu\nu} = \gamma L_\nu^1 F^{0\nu} - \gamma\beta L_\nu^1 F^{1\nu} \\ &= -\gamma^2\beta F^{00} + \gamma^2 F^{01} + \gamma^2\beta^2 F^{10} - \gamma^2\beta F^{11} \\ &= 0 + \gamma^2 \frac{E_x}{c} - \gamma^2\beta^2 \frac{E_x}{c} - 0 \\ &= \frac{E_x}{c} \gamma^2 (1 - \beta^2) = \frac{E_x}{c} \\ \frac{E'_y}{c} &= (F')^{02} = L_\mu^0 L_\nu^2 F^{\mu\nu} = \gamma L_\nu^2 F^{0\nu} - \gamma\beta L_\nu^2 F^{1\nu} \\ &= \gamma F^{02} - \gamma\beta F^{12} = \gamma \frac{E_y}{c} - \gamma\beta B_z \end{aligned}$$

usw.

Also:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & B'_x &= B_x \\ E'_y &= \gamma(E_y - vB_z) & B'_y &= \gamma(B_y + \frac{v}{c^2}E_z) \\ E'_z &= \gamma(E_z + vB_y) & B'_z &= \gamma(B_z - \frac{v}{c^2}E_y) \end{aligned}$$

oder vektoriell:

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel} & \vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel} \\ \vec{E}'_{\perp} &= \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}) & \vec{B}'_{\perp} &= \gamma(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E}) \end{aligned}$$

d.h. also: die „Anteile“ von \vec{E} und \vec{B} sind in den verschiedenen Inertialsystemen i.A. verschieden. Es gibt zwei interessante Spezialfälle, die das illustrieren:

(a) Mit $\vec{B} = 0$ folgt:

$$\vec{B}' = \gamma \frac{v}{c^2} (E_z \vec{e}_y - E_y \vec{e}_z) = \frac{v}{c^2} (E'_z \vec{e}_y - E'_y \vec{e}_z) = -\frac{1}{c^2} (\vec{v} \times \vec{E}')$$

\downarrow
 $\vec{v} = v\vec{e}_x$

(b) Mit $\vec{E} = 0$ folgt:

$$\vec{E}' = -\gamma v (B_z \vec{e}_y - B_y \vec{e}_z) = -v (B'_z \vec{e}_y - B'_y \vec{e}_z) = \vec{v} \times \vec{B}'$$

\downarrow
 $\vec{v} = v\vec{e}_x$

Wenn also in irgendeinem Punkt im Koordinatensystem Σ $\vec{E} = 0$ oder $\vec{B} = 0$ gilt, gilt in Σ' $\vec{E}' \neq 0$ oder $\vec{B}' \neq 0$: ein reines \vec{E} - oder \vec{B} -Feld in Σ kann niemals zu einem „reinen“ Feld in Σ' werden.

Bemerkung: Die Uminterpretation von \vec{E} und \vec{B} von einem Inertialsystem (Σ) in ein anderes (Σ') unterliegt Einschränkungen durch die Invariante $\vec{E}' \cdot \vec{B}' = \vec{E} \cdot \vec{B}$ und $\vec{E}'^2 - c^2 \vec{B}'^2 = \vec{E}^2 - c^2 \vec{B}^2$ d.h. \vec{E} und \vec{B} sind in jedem Inertialsystem senkrecht zueinander und es gilt in jedem Inertialsystem $\frac{E}{B} = c$. Elektromagnetische Wellen behalten also ihre grundsätzliche Struktur.

Bemerkung: Die Maxwell-Gleichungen können noch tiefer gehend motiviert werden: es ist möglich, sie aus einem „Prinzip der extremalen Wirkung“ herzuleiten. Dann wird die Lagrange-Funktion der klass. Mechanik auf eine „Lagrange-Dichte“ verallgemeinert (siehe z.B. Landau-Lifschitz oder Schlickeiser-Skript). Diese Vorgehensweise führt dann in Richtung allgemeiner Quantenfeldtheorie.