





# **Vorlesung Theoretische Physik I (Mechanik)**

**gehalten von R. Schlickeiser**

Reinhard Schlickeiser  
Institut für Theoretische Physik  
Lehrstuhl IV: Weltraum- und Astrophysik

Grafiken von Urs Schaefer-Rolffs

3. korrigierte Auflage

2. Oktober 2009



# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
0.1	Vorbemerkung . . . . .	1
<b>1</b>	<b>Vektorrechnung</b>	<b>3</b>
1.1	Grunddefinitionen . . . . .	3
1.1.1	Skalare und Vektoren . . . . .	3
1.1.2	Einheitsvektor . . . . .	4
1.2	Vektoroperationen . . . . .	4
1.2.1	Addition von Vektoren . . . . .	4
1.2.2	Subtraktion von Vektoren und Nullvektor . . . . .	4
1.2.3	Multiplikation von Vektoren mit Skalaren . . . . .	5
1.2.4	Skalarprodukt von Vektoren . . . . .	5
1.2.5	Kreuzprodukt von Vektoren . . . . .	6
1.3	Komponentendarstellung von Vektoren in kartesischen Koordinaten . . . . .	8
1.4	Spatprodukt . . . . .	12
1.5	Transformation von Vektoren . . . . .	13
1.6	Anwendungen der Vektorrechnung . . . . .	15
1.6.1	Abstand zweier Punkte . . . . .	15
1.6.2	Geradengleichung und Ebenengleichung . . . . .	15
1.6.3	Kosinussatz . . . . .	16
1.6.4	Überlagerung von Kräften . . . . .	16
1.7	Differentiation und Integration von Vektoren . . . . .	16
1.7.1	Differentiation von Vektoren . . . . .	16
1.7.2	Integration von Vektoren . . . . .	19
1.8	Koordinatensysteme . . . . .	19
1.8.1	Koordinatenlinien und Koordinatenflächen . . . . .	19
1.8.2	Festlegung von Einheitsvektoren . . . . .	20
1.8.3	Beispiel: Zylinderkoordinaten . . . . .	20
1.9	Vektorielle Differentialoperatoren . . . . .	23
1.9.1	Gradient . . . . .	23
1.9.2	Der Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ . . . . .	26
1.9.3	Divergenz . . . . .	27
1.9.4	Rotation . . . . .	29
1.10	Rechenregeln für vektorielle Differentialoperatoren . . . . .	30
1.10.1	Summenregeln . . . . .	30
1.10.2	Produktregeln . . . . .	30

## Inhaltsverzeichnis

1.10.3	Quotientenregeln	31
1.10.4	Kombination verschiedener vektorieller Differentialoperatoren	31
1.11	Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinaten	32
1.11.1	Grundgleichungen	32
1.11.2	Gradient	33
1.11.3	Divergenz	34
1.11.4	Rotation	35
1.11.5	Laplace-Operator	36
1.11.6	Beispiel: Kugelkoordinaten	37
<b>2</b>	<b>Newtonsche Mechanik</b>	<b>39</b>
2.1	Das Physikalische Weltbild vor und nach Newton*	39
2.2	Die Newtonschen Axiome	44
2.2.1	Das Trägheitsgesetz	44
2.2.2	Das Kraftwirkungsgesetz	45
2.2.3	Das Wechselwirkungsgesetz	46
2.2.4	Das Äquivalenzprinzip	47
2.2.5	Das Superpositionsprinzip der Kraftwirkungen	47
2.2.6	Anmerkungen	49
2.3	Grundbegriffe der Mechanik	50
2.3.1	Inertialsysteme und Galilei-Transformation	50
2.3.2	Arbeit	51
2.3.3	Kinetische Energie	51
2.3.4	Konservative Kräfte	52
2.3.5	Zentralkräfte	52
2.3.6	Drehimpuls und Drehmoment	53
2.3.7	Zusammenfassung: Erhaltungssätze für einen Massenpunkt	54
2.4	Integration der Bewegungsgleichungen	55
2.4.1	Zeitabhängiges Kraftfeld $F = F(t)$	56
2.4.2	Geschwindigkeitsabhängiges Kraftfeld $F = f(\dot{x}) = f(v)$	56
2.4.3	Konservatives Kraftfeld $F = f(x)$	57
2.4.4	Harmonischer Oszillator $F = f(x)$	58
2.4.5	Senkrechter Wurf im Schwerfeld ohne Reibung	60
2.4.6	Schiefer Wurf im Schwerfeld ohne Reibung	61
2.5	Reibung	63
2.5.1	Empirische Reibungskräfte	63
2.5.2	Schräger Wurf im Schwerfeld mit Reibung nach Stokes	64
<b>3</b>	<b>Analytische Mechanik</b>	<b>67</b>
3.1	Eingeschränkte Bewegung bei Zwangsbedingungen	67
3.1.1	Beispiel 1: Schiefe Ebene	67
3.2	Beispiel 2: Das Pendel im Schwerfeld	68

\*Dieser Abschnitt ist der Vorlesung meines verehrten Lehrers Prof. Dr. Dieter Schlüter, Universität Kiel, entnommen.

3.2.1	Mathematischer Einschub: Elliptische Integrale und Elliptische Funktionen . . . . .	71
3.2.2	Schwingungsfall $E_G < 2$ . . . . .	72
3.2.3	Grenzfall extrem kleiner Auslenkungen $E_G \ll 1$ . . . . .	73
3.2.4	Fall $E_G = 2$ . . . . .	74
3.2.5	Rotationsfall $E_G > 2$ . . . . .	74
3.3	Beschreibung von Flächen und Kurven im dreidimensionalen Raum . . . . .	75
3.4	Lagrange-Gleichungen 1. Art . . . . .	76
3.4.1	Wieder Beispiel 1: Schiefe Ebene mit Lagrange I . . . . .	77
3.4.2	Allgemeiner Fall . . . . .	79
3.4.3	Kochrezept für Lagrange-Gleichungen 1.Art . . . . .	79
3.4.4	Bemerkung zu Zwangsbedingungen . . . . .	80
3.5	Energieerhaltungssatz im Fall von holonomen Zwangsbedingungen . . . . .	81
3.6	Das Prinzip von d'Alembert . . . . .	82
3.6.1	Virtuelle Verrückung $\delta\vec{r}$ eines Massenpunktes . . . . .	82
3.6.2	Allgemeiner nichtstatischer Fall . . . . .	83
3.6.3	Verallgemeinerte Koordinaten . . . . .	84
3.7	Lagrange-Gleichungen 2. Art . . . . .	85
3.8	Einfache Anwendungen . . . . .	88
3.8.1	Kräftefreie Bewegung . . . . .	88
3.8.2	Atwoodsche Fallmaschine . . . . .	89
3.8.3	Allgemeine Form der kinetischen Energie . . . . .	90
3.8.4	Kochrezept für Lagrange-Gleichungen 2.Art . . . . .	91
3.9	Weitere Anwendungen . . . . .	92
3.9.1	Schiefe Ebene . . . . .	92
3.9.2	Doppelpendel . . . . .	92
3.10	Exkurs über Variationsprinzipien . . . . .	96
3.10.1	Beispiele . . . . .	97
3.10.2	Euler-Gleichung . . . . .	99
3.10.3	Das Brachistochronen-Problem . . . . .	100
3.10.4	Verallgemeinerung auf mehrere unabhängige Variablen . . . . .	103
3.11	Hamiltonsches Prinzip . . . . .	104
3.11.1	Die $\delta$ -Notation . . . . .	104
3.11.2	Das Hamilton-Prinzip . . . . .	105
3.11.3	Erweiterung des Hamilton-Prinzips auf nichtkonservative Systeme . . . . .	105
3.11.4	Erweiterung des Hamilton-Prinzips auf nichtholonome Zwangsbedingungen . . . . .	106
3.11.5	Beispiel: Rollendes Fass . . . . .	108
3.11.6	Das Wesentliche der Lagrange-Dynamik . . . . .	110
3.12	Symmetrien und Erhaltungssätze . . . . .	111
3.12.1	Energieerhaltungssatz . . . . .	112
3.12.2	Impulssatz, Schwerpunktsystem, Schwerpunktsatz . . . . .	115
3.12.3	Drehimpulserhaltung . . . . .	118
3.12.4	Zusammenfassung . . . . .	120

## Inhaltsverzeichnis

3.12.5	Noether-Theorem für autonome Systeme . . . . .	121
3.13	Geschwindigkeitsabhängige Kräfte . . . . .	123
3.13.1	Beispiel: Lorentz-Kraft . . . . .	124
3.13.2	Reibungskräfte und Dissipationsfunktion . . . . .	126
3.14	Der Virialsatz . . . . .	128
<b>4</b>	<b>Das Zweikörper-Problem</b> . . . . .	<b>131</b>
4.1	Lagrange-Funktion des Zweikörper-Problems . . . . .	131
4.2	Relativbewegung . . . . .	133
4.2.1	Flächensatz . . . . .	134
4.2.2	Energieerhaltungssatz . . . . .	135
4.2.3	Qualitative Aussagen zur Bewegung am Beispiel $V = kr^2$ , $k = const.$ . . . . .	136
4.2.4	Lösung der Bewegungsgleichung . . . . .	136
4.2.5	Bewegungen im Zentralfeld . . . . .	138
4.3	Kepler-Problem: Planetenbewegung . . . . .	139
4.4	Mathematische Zwischenbetrachtung über Kegelschnitte in Polarkoordinaten . . . . .	141
4.4.1	Ellipse und Kreise . . . . .	141
4.4.2	Parabel . . . . .	143
4.4.3	Hyperbel . . . . .	144
4.5	Fortsetzung des Kepler-Problems . . . . .	146
4.5.1	Klassifikation der Bewegungstypen . . . . .	146
4.5.2	Keplersche Gesetze der Planetenbewegung . . . . .	148
4.5.3	Kepler's Gleichung . . . . .	149
4.5.4	Näherungslösung der Kepler-Gleichung . . . . .	153
4.6	Hyperbelbahnen . . . . .	154
4.6.1	Attraktives Potential ( $\alpha > 0$ ) . . . . .	155
4.6.2	Repulsives Potential ( $\alpha < 0$ ) . . . . .	155
4.7	Der Runge-Lenz-Vektor . . . . .	156
4.8	Das Streuproblem . . . . .	158
<b>5</b>	<b>Hamilton-Mechanik</b> . . . . .	<b>163</b>
5.1	Hamiltonsche Bewegungsgleichungen . . . . .	163
5.1.1	Mathematischer Einschub: Legendre-Transformation . . . . .	163
5.1.2	Ableitung der Hamilton-Gleichungen . . . . .	164
5.1.3	Der Phasenraum . . . . .	165
5.1.4	Bedeutung der Hamilton-Funktion . . . . .	166
5.1.5	Beispiel 1: Der eindimensionale harmonische lineare Oszillator . . . . .	166
5.1.6	Beispiel 2: Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld . . . . .	167
5.1.7	Beispiel 3: Das Pendel im Schwerfeld . . . . .	168
5.1.8	Ableitung der kanonischen Bewegungsgleichungen aus dem Hamilton-Prinzip . . . . .	169
5.2	Poisson-Klammern . . . . .	170
5.2.1	Eigenschaften der allgemeinen Poisson-Klammer . . . . .	171
5.2.2	Spezielle Fälle von Poisson-Klammern . . . . .	172

5.2.3	Poisson-Theorem . . . . .	172
5.3	Kanonische Transformationen . . . . .	173
5.3.1	Erzeugende Funktion . . . . .	174
5.3.2	Beispiele kanonischer Transformationen . . . . .	178
5.3.3	Anwendung: linearer harmonischer Oszillator . . . . .	179
5.3.4	Kriterien für Kanonizität . . . . .	180
5.4	Hamilton-Jacobi-Gleichung . . . . .	181
5.4.1	Anmerkungen zur Hamilton-Jacobi-Gleichung und Lösungsverfahren . . . . .	181
5.4.2	Beispiel des Lösungsverfahrens: Der lineare harmonische Oszillator . . . . .	183
5.4.3	Zusatzüberlegung . . . . .	185
5.5	Hamiltonsche charakteristische Funktion . . . . .	186
5.6	Separation der Variablen . . . . .	187
5.6.1	Beispiel: Ebene Bewegung eines Teilchens im Zentralfeld . . . . .	189
5.6.2	Beispiel: Teilchen im Schwerfeld . . . . .	191
5.7	Satz von Liouville . . . . .	192
5.8	Integralinvarianten von Poincare . . . . .	194
<b>6</b>	<b>Bewegung des starren Körpers</b>	<b>199</b>
6.1	Kinematik . . . . .	199
6.2	Infinitesimale Drehungen . . . . .	202
6.3	Scheinkräfte . . . . .	206
6.4	Trägheitstensor und Hauptachsentransformation . . . . .	209
6.4.1	Trägheitstensor . . . . .	209
6.4.2	Trägheitsmoment . . . . .	212
6.4.3	Satz von Steiner . . . . .	213
6.4.4	Beispiel des Würfels . . . . .	215
6.4.5	Hauptachsentransformation . . . . .	217
6.5	Das Trägheitsellipsoid . . . . .	219
6.6	Die Eulerschen Gleichungen . . . . .	220
6.6.1	Beispiel 1: Kräftefreier Kugelkreisel . . . . .	221
6.6.2	Beispiel 2: Kräftefreier symmetrischer Kreisel . . . . .	221
6.6.3	Beispiel 3: Kräftefreier asymmetrischer Kreisel . . . . .	223
6.7	Die Eulerschen Winkel . . . . .	225
6.8	Lagrange-Mechanik des starren Körpers . . . . .	228
6.8.1	Lagrange-Funktion des Kreisels . . . . .	228
6.8.2	Beispiel: Schwerer, symmetrischer Kreisel . . . . .	230
6.8.3	Nutationsfreie Präzession des schweren, symmetrischen Kreisels . . . . .	234
<b>7</b>	<b>Spezielle Relativitätstheorie</b>	<b>237</b>
7.1	Die Lorentz-Transformation . . . . .	237
7.1.1	Ableitung der Transformationsgleichungen . . . . .	237
7.1.2	Verhalten der skalaren Wellengleichung bei Galilei-Transformation . . . . .	241
7.1.3	Verhalten der skalaren Wellengleichung bei Lorentz-Transformation . . . . .	242
7.1.4	Additionstheorem der Geschwindigkeiten . . . . .	242

## Inhaltsverzeichnis

7.1.5	Längenkontraktion . . . . .	244
7.1.6	Zeitdilatation . . . . .	244
7.2	Minkowski-Raum . . . . .	245
7.2.1	Vierer-Skalare, Vierer-Vektoren und Vierer-Tensoren . . . . .	246
7.3	Lagrange-Formulierung der relativistischen Mechanik . . . . .	247
7.3.1	Freies Teilchen . . . . .	248
7.3.2	Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld . . . . .	249
<b>8</b>	<b>Kosmologie fast ohne Allgemeine Relativitätstheorie</b>	<b>251</b>
8.1	Die Friedmann-Gleichung . . . . .	251
8.2	Die Einstein-Gleichungen . . . . .	252
8.3	Dichte und Druck des Universums . . . . .	253
8.3.1	Materie . . . . .	254
8.3.2	Strahlung . . . . .	254
8.3.3	Vakuum . . . . .	254
8.3.4	Quintessenz . . . . .	255
8.4	Vakuumdruck . . . . .	255
8.5	Zeitliche Entwicklung des Universums . . . . .	256
8.5.1	Strahlung . . . . .	256
8.5.2	Materie . . . . .	256
8.5.3	Vakuum . . . . .	257
8.5.4	Quintessenz mit $w = const.$ . . . . .	257
8.5.5	Materie und Vakuum . . . . .	257
8.6	Kritische Dichte . . . . .	258
8.7	Zukünftige Beschleunigung des Universums . . . . .	258
8.8	Rotverschiebung, Lichtlaufzeit und Alter des Universums . . . . .	260
8.8.1	Strahlungsdominiertes Universum ( $\Omega_{v0} = \Omega_{m0} = 0$ ) . . . . .	262
8.8.2	Materiedominiertes Universum ( $\Omega_{v0} = \Omega_{\gamma0} = 0$ ) . . . . .	262
8.8.3	Vakuumdominiertes Universum ( $\Omega_{m0} = \Omega_{\gamma0} = 0$ ) . . . . .	263
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>265</b>
A.1	Mathematischer Anhang . . . . .	265
A.1.1	Näherungsformeln . . . . .	265
A.1.2	Eulersche Formeln und Umkehrung . . . . .	265
A.1.3	Darstellung des $\vec{\nabla}$ -Operators in verschiedenen Koordinatensystemen . . . . .	265
A.1.4	Rechenregeln für den $\vec{\nabla}$ -Operator (vgl. auch 1.10) . . . . .	266
A.2	Empfohlene Literatur . . . . .	267
A.2.1	Bücher zur Theoretischen Mechanik: . . . . .	267
A.2.2	Bücher für mathematische Formeln ("Grundausstattung"): . . . . .	267
A.2.3	Bücher für mathematische Physik ("Grundausstattung"): . . . . .	267

*Inhaltsverzeichnis*

*Inhaltsverzeichnis*

# 0 Einleitung

## 0.1 Vorbemerkung

Dieses Vorlesungsskript basiert auf Vorlesungen, die ich in den Wintersemestern 1998/1999 und 2002/2003 an der Ruhr-Universität Bochum für Studierende des Diplomstudiengangs Physik im 3. Semester gehalten habe. Bei der Ausarbeitung habe ich vieles von den Skripten gleichnamiger Vorlesungen von Herrn Prof. Dr. Dieter Schlüter (Universität Kiel) und Herrn Prof. Dr. Max Huber (Universität Bonn) übernommen.

Besonders danken möchte ich

- Herrn Dipl.-Phys. Urs Schaefer-Rolffs, der die grafischen Illustrationen zum Skript beigetragen hat,
- Frau Angelika Schmitz für ihren unermüdlichen Einsatz beim Korrigieren und Erstellen des Skripts in PDF-LATEX,
- Herrn cand. phys. Stephan Meißner, der viele Schreibfehler in einer früheren Version gefunden hat.
- Frau Hanna Döring und Herrn Martin Walzer für den Hinweis auf viele Fehler in den ersten Versionen.

Ich hoffe, dass dieses Skript vielen Studierenden beim Erlernen der Theoretischen Mechanik hilft.

Reinhard Schlickeiser

Bochum, im Oktober 2009

## *0 Einleitung*

# 1 Vektorrechnung

## 1.1 Grunddefinitionen

### 1.1.1 Skalare und Vektoren

**Skalare** sind physikalische Größen, die durch Angabe eines Zahlenwertes vollständig bestimmt sind wie z.B. Masse, Temperatur, Frequenz, Energie.

**Vektoren:** Die vollständige Beschreibung eines Vektors  $\vec{a}$  erfordert neben dem Zahlenwert, dem Betrag, noch die Angabe der Richtung des Vektors. Beispiele für physikalische Vektorgrößen sind Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Drehmoment. Ein Vektor wird geometrisch durch einen Pfeil in Richtung des Vektors dargestellt, wobei die Länge des Vektors proportional zu seinem Betrag  $a = |\vec{a}|$  ist.

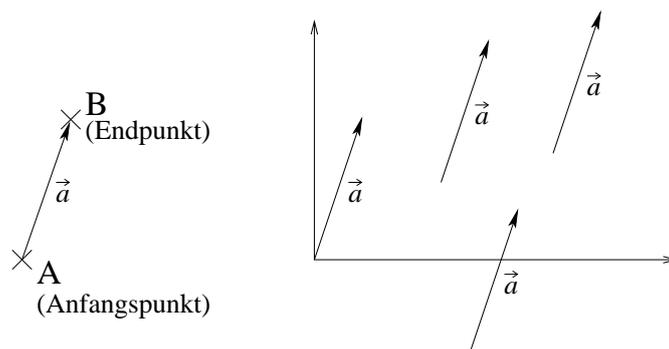


Abbildung 1.1: Geometrische Darstellung eines Vektors  $\vec{a}$

**Definition:** Zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sind **gleich**, wenn

1. deren Beträge gleich sind  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$  und
2. deren Richtungen gleichgerichtet (parallel) sind  $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ .

**Definition:** Zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sind **entgegengesetzt gleich**, wenn

1. deren Beträge gleich sind  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$  und
2. deren Richtungen entgegengerichtet (antiparallel) sind  $\vec{a} \updownarrow \vec{b}$ .

Man bezeichnet den zu  $\vec{a}$  entgegengesetzt gleichen Vektor mit  $-\vec{a}$ . Aus Definition 1 ergibt sich die **Folgerung:** Ein Vektor ist unverändert, wenn er parallel zu sich selbst verschoben wird.

## 1 Vektorrechnung

### 1.1.2 Einheitsvektor

**Definition:** Als **Einheitsvektor** bezeichnet man einen Vektor mit dem Betrag 1.

Es folgt: Ist  $\vec{a} \neq \vec{0}$  ein beliebiger vom Nullvektor verschiedener Vektor, so ist

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{a}$$

ein Einheitsvektor.

**Definition: Kartesische Einheitsvektoren** sind Einheitsvektoren, die in einem kartesischen Koordinatensystem in Richtung der positiven  $x$ -,  $y$ - oder  $z$ -Achse liegen (siehe Abb. 1.2).

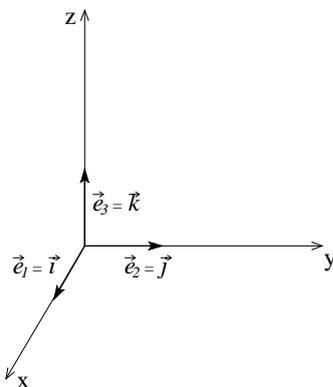


Abbildung 1.2: Darstellung von kartesischen Einheitsvektoren

## 1.2 Vektoroperationen

Wir definieren fünf Vektoroperationen: Addition, Subtraktion und drei Arten der Multiplikation.

### 1.2.1 Addition von Vektoren

Die **Addition** zweier Vektoren  $\vec{a} + \vec{b}$  erfolgt so, dass der Vektor  $\vec{b}$  so verschoben werden darf, dass sein Anfangspunkt mit dem Endpunkt des Vektors  $\vec{a}$  zusammenfällt (siehe Abb. 1.3).

Für die Addition von Vektoren gelten

- das Kommutativitätsgesetz  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  und
- das Assoziativitätsgesetz  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

### 1.2.2 Subtraktion von Vektoren und Nullvektor

Die **Subtraktion** ist definiert als die Addition des Entgegengesetzt-Vektors:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right) . \quad (1.1)$$

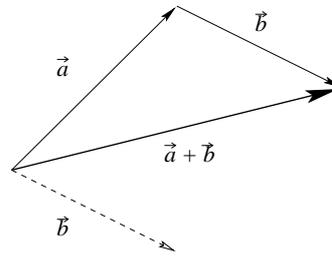


Abbildung 1.3: Geometrische Darstellung der Addition zweier Vektoren

Der **Nullvektor**  $\vec{0} \equiv \vec{a} - \vec{a}$  hat den Betrag 0 und ist richtungslos.

### 1.2.3 Multiplikation von Vektoren mit Skalaren

Sei  $p$  eine reelle Zahl. Der Vektor  $p\vec{a}$  hat die gleiche Richtung wie der Vektor  $\vec{a}$  und den Betrag  $|p\vec{a}| = |p||\vec{a}|$ .

Seien  $p, q$  reelle Zahlen. Dann gilt

$$\begin{aligned} q(p\vec{a}) &= p(q\vec{a}) = qp\vec{a} \\ (p+q)\vec{a} &= p\vec{a} + q\vec{a} \\ p(\vec{a} + \vec{b}) &= p\vec{a} + p\vec{b}. \end{aligned}$$

### 1.2.4 Skalarprodukt von Vektoren

**Definition:** Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren ( $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ ) ist definiert als die reelle Zahl

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \equiv |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \phi, \quad \phi = \angle(\vec{a}, \vec{b}), \quad (1.2)$$

wobei  $\phi$  den Winkel zwischen den Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  bezeichnet. Anschaulich (Abb. 1.4) entspricht das Skalarprodukt der Projektion des Vektors  $\vec{b}$  auf den Vektor  $\vec{a}$ , multipliziert mit dem Betrag  $|\vec{a}|$  des Vektors  $\vec{a}$ , oder der Projektion des Vektors  $\vec{a}$  auf den Vektor  $\vec{b}$ , multipliziert mit dem Betrag  $|\vec{b}|$  des Vektors  $\vec{b}$ .

Offensichtlich hat das Skalarprodukt folgende Eigenschaften:

- $\vec{a} \cdot \vec{b}$  nimmt seinen größten Wert  $|\vec{a}||\vec{b}| = ab$  für gleichgerichtete Vektoren an, so dass der Winkel  $\phi = 0$  ist.
- $\vec{a} \cdot \vec{b}$  nimmt seinen kleinsten Wert  $-|\vec{a}||\vec{b}| = -ab$  für entgegengerichtete Vektoren an, so dass der Winkel  $\phi = \pi$  ist.
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , wenn die Vektoren senkrecht aufeinander stehen, d.h.  $\phi = \pi/2$  oder  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

Für das Skalarprodukt gelten folgende Rechenregeln:

## 1 Vektorrechnung

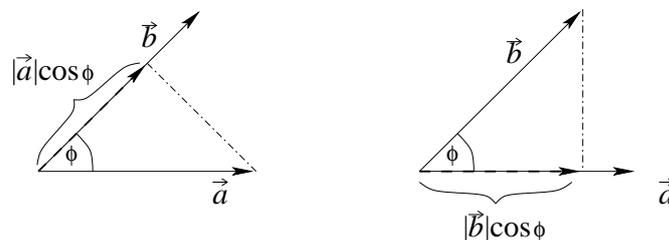


Abbildung 1.4: Geometrische Darstellung des Skalarprodukts  $\vec{a} \cdot \vec{b}$

- Kommutativitätsgesetz  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- Distributivitätsgesetz  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

Mit reeller Zahl  $p$  gilt

$$p(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (p\vec{a}) \cdot \vec{b}.$$

Da der eingeschlossene Winkel zwischen zwei jeweiligen kartesischen Einheitsvektoren entweder Null oder ein rechter ( $\phi = \pi/2$ ) Winkel ist, gelten die **Orthonormalitätsrelationen**

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1 \quad (1.3)$$

und die **Orthogonalitätsrelationen**

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0 \quad (1.4)$$

oder zusammenfassend

$$\vec{e}_\nu \cdot \vec{e}_\mu = \delta_{\nu\mu} \quad (1.5)$$

wobei das **Kronecker-Symbol**

$$\delta_{\nu\mu} \equiv \begin{cases} 0 & \text{für } \nu \neq \mu \\ 1 & \text{für } \nu = \mu \end{cases} \quad (1.6)$$

eingeführt wurde.

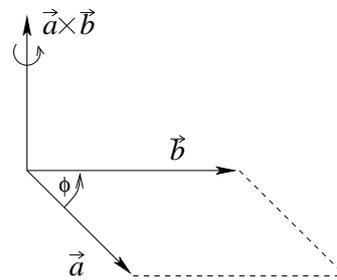
### 1.2.5 Kreuzprodukt von Vektoren

**Definition:** Das **Kreuzprodukt** oder auch **Vektorprodukt** zweier Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ist durch den Vektor

$$\vec{a} \times \vec{b} \equiv |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \phi \vec{n} \quad (1.7)$$

definiert, wobei  $\vec{n}$  den Einheitsvektor bezeichnet, der senkrecht auf der von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  festgelegten Ebene steht (Rechte-Hand-Regel). Der Betrag des Kreuzprodukts ist gleich dem Flächeninhalt des von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  gebildeten Parallelogramms (siehe Abb. 1.5).

Offensichtlich hat das Kreuzprodukt folgende Eigenschaften:

Abbildung 1.5: Geometrische Darstellung des Kreuzprodukts  $\vec{a} \times \vec{b}$ 

- (a)  $\vec{a} \times \vec{b}$  hat seinen größten Betrag  $|\vec{a} \times \vec{b}| = ab$ , wenn die Vektoren senkrecht aufeinander stehen, d.h.  $\phi = \pi/2$  oder  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .
- (b)  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ , wenn die Vektoren gleichgerichtet ( $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ ) oder entgegengesetzt ( $\vec{a} \downarrow \vec{b}$ ) gerichtet sind.
- (c) Es gilt speziell  $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ .

Mit  $\odot$  kennzeichnet man einen Vektor, der senkrecht zur Zeichenebene steht und aus ihr herausragt; mit  $\otimes$  kennzeichnet man einen Vektor, der senkrecht zur Zeichenebene steht und in sie hineinzeigt.

Für das Kreuzprodukt gelten folgende Rechenregeln:

- (d) Anti-Kommutativitätsgesetz  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ , d.h. die Reihenfolge der Verknüpfung ist wichtig.
- (e) Distributivitätsgesetz  $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$ . Dieses Gesetz lässt sich am besten geometrisch beweisen.
- (f) Keine Assoziativität:  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$
- (g) Mit reeller Zahl  $p$  gilt  $p(\vec{a} \times \vec{b}) = (p\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (p\vec{b})$ .

Für das Kreuzprodukt der kartesischen Einheitsvektoren gilt

$$\begin{aligned}
 \vec{i} \times \vec{i} &= \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}, \\
 \vec{i} \times \vec{j} &= -\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k}, \\
 \vec{j} \times \vec{k} &= -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i}, \\
 \vec{k} \times \vec{i} &= -\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j}.
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

### 1.3 Komponentendarstellung von Vektoren in kartesischen Koordinaten

Jeder Vektor kann als Linearkombination der kartesischen Einheitsvektoren dargestellt werden:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z = (a_x, a_y, a_z) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

wobei (mit  $a = |\vec{a}|$ )  $a_x = \vec{a} \cdot \vec{i} = a \cos \alpha$ ,  $a_y = \vec{a} \cdot \vec{j} = a \cos \beta$  und  $a_z = \vec{a} \cdot \vec{k} = a \cos \gamma$  die jeweiligen Projektionen auf die kartesischen Einheitsvektoren bezeichnen (siehe Abb. 1.6).

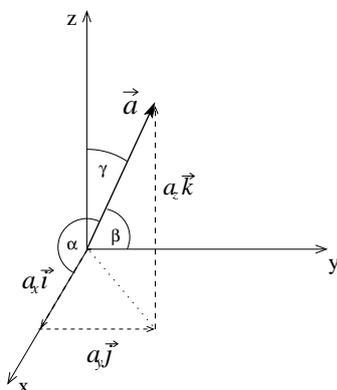


Abbildung 1.6: Darstellung der Komponentendarstellung von Vektoren

Nach dem *Satz des Pythagoras* gilt dann:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad (1.10)$$

so dass folgt

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{a_x}{a}, \\ \cos \beta &= \frac{a_y}{a}, \\ \cos \gamma &= \frac{a_z}{a}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Mit der Komponentendarstellung lassen sich die Vektoroperationen aus Kap. 1.2 anders formulieren:

(a) für die Addition gilt

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) + (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\ &= (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k}, \end{aligned}$$

d.h. Vektoren werden addiert, indem man sie komponentenweise addiert.

### 1.3 Komponentendarstellung von Vektoren in kartesischen Koordinaten

(b) Multiplikation mit Skalaren:

$$p\vec{a} = p(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) = (pa_x)\vec{i} + (pa_y)\vec{j} + (pa_z)\vec{k}.$$

(c) Für das Skalarprodukt zweier Vektoren ergibt sich unter Ausnutzung der Orthonormalitätsrelationen (1.3)

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \cdot (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) \\ &= a_x b_x \vec{i} \cdot \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \cdot \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \cdot \vec{k} \\ &\quad + a_y b_x \vec{j} \cdot \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \cdot \vec{j} + a_y b_z \vec{j} \cdot \vec{k} \\ &\quad + a_z b_x \vec{k} \cdot \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \cdot \vec{j} + a_z b_z \vec{k} \cdot \vec{k} \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\end{aligned}\quad (1.12)$$

oder mit

$$a_x = a_1, \quad a_y = a_2, \quad a_z = a_3,$$

d.h.

$$\vec{a} = \sum_{n=1}^3 a_n \vec{e}_n$$

und

$$\vec{b} = \sum_{m=1}^3 a_m \vec{e}_m$$

kurz geschrieben als

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{n=1}^3 a_n b_n. \quad (1.13)$$

Mit der Komponentendarstellung lässt sich der Winkel zwischen zwei Vektoren  $\phi$  bequem ausrechnen. Es gilt mit Gleichung (1.12)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \phi = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

$$\text{so dass} \quad \phi = \arccos \left[ \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \right]. \quad (1.14)$$

**Beispiel:** Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = 6\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$$

und

$$\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}.$$

(1.15)

Dann ist

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 12 - 12 - 9 = -9$$

$$a = \sqrt{36 + 16 + 9} = \sqrt{61} = 7.81,$$

und

$$b = \sqrt{4 + 9 + 9} = \sqrt{22} = 4.69,$$

so dass

$$\cos \phi = \frac{-9}{7.81 \cdot 4.69} = -0.246$$

und

$$\phi = 1.82 \text{ radian},$$

oder

$$\phi = 104.2 \text{ Grad}.$$

## 1 Vektorrechnung

(d) Mit der Komponentendarstellung

$$\vec{a} = \sum_{n=1}^3 a_n \vec{e}_n \quad \text{und} \quad \vec{b} = \sum_{m=1}^3 b_m \vec{e}_m$$

folgt für das Kreuzprodukt unter Ausnutzung der bisherigen Regeln

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3) \times (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3) \\ &= (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{e}_3 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{e}_2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{e}_1 \\ &= \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -a_1 b_3 + a_3 b_1 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Dieses Ergebnis lässt sich offensichtlich als Determinante darstellen, denn

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -a_1 b_3 + a_3 b_1 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Das Kreuzprodukt lässt sich auch mithilfe des **Levi-Civita-Symbols**

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{wenn mindestens zwei der Indizes } i, j, k \text{ gleich sind} \\ 1 & \text{wenn die Indizes } i, j, k \text{ eine gerade Permutation von } 1, 2, 3 \text{ sind} \\ -1 & \text{wenn die Indizes } i, j, k \text{ eine ungerade Permutation von } 1, 2, 3 \text{ sind} \end{cases} \quad (1.18)$$

darstellen. Im Einzelnen gilt

$$\begin{aligned} \epsilon_{111} &= \epsilon_{222} = \epsilon_{333} = \epsilon_{122} = \epsilon_{133} = 0 \text{ usw. ,} \\ \epsilon_{123} &= \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1, \\ \epsilon_{132} &= \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Dann gilt

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}, \quad \text{wobei} \quad c_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} a_j b_k. \quad (1.20)$$

Benutzt man die **Einsteinsche Summenkonvention**, dass über alle doppelt auftretenden Indizes in einer Gleichung summiert werden muss, schreibt sich Gleichung (1.20) kurz als

$$c_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k. \quad (1.21)$$

Für das **dreifache Kreuzprodukt** gilt

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \quad (1.22)$$

Beweis: Zum Beweis von (1.22) betrachten wir die x-Komponente des dreifachen Kreuzprodukts:

$$\begin{aligned} \left[ \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \right]_x &= a_y (\vec{b} \times \vec{c})_z - a_z (\vec{b} \times \vec{c})_y \\ &= a_y (b_x c_y - b_y c_x) - a_z (-b_x c_z + b_z c_x) \end{aligned}$$

### 1.3 Komponentendarstellung von Vektoren in kartesischen Koordinaten

und addieren auf beiden Seiten den Ausdruck

$$0 = a_x b_x c_x - a_x b_x c_x$$

dazu. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \left[ \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \right]_x &= b_x (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - c_x (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) \\ &= b_x (\vec{a} \cdot \vec{c}) - c_x (\vec{a} \cdot \vec{b}) . \end{aligned}$$

Ebenso verfährt man mit den  $y$ - und  $z$ -Komponenten, so dass die Behauptung bewiesen ist. Q.E.D.

#### Übungsaufgaben:

**(A1.3.1)** Drei Vektoren sind gegeben durch

$$\vec{P} = (3, 2, -1),$$

$$\vec{Q} = (-6, -4, 2),$$

$$\vec{R} = (1, -2, 1).$$

Berechnen Sie die Winkel zwischen diesen Vektoren, um herauszufinden, welche dieser Vektoren senkrecht zueinander stehen oder gleichgerichtet oder entgegengesetzt gleichgerichtet sind.

**(A1.3.2)** Bestimmen Sie die Seitenlängen und Winkel des Dreiecks  $ABC$ , das durch die drei Vektoren

$$\vec{A} = (1, 0, 0),$$

$$\vec{B} = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}),$$

$$\vec{C} = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

festgelegt ist. Jeder Vektor beginnt im Ursprung.

**(A1.3.3)** Die magnetische Induktion  $\vec{B}$  ist durch die Lorentz-Kraft  $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$  bestimmt. Durch drei Messungen finden wir, dass für

$$(i) \quad \vec{v} = \vec{e}_1, \quad \vec{F}/q = 2\vec{e}_3 - 4\vec{e}_2,$$

$$(ii) \quad \vec{v} = \vec{e}_2, \quad \vec{F}/q = 4\vec{e}_1 - \vec{e}_3,$$

$$(iii) \quad \vec{v} = \vec{e}_3, \quad \vec{F}/q = \vec{e}_2 - 2\vec{e}_1.$$

Bestimmen Sie die magnetische Induktion  $\vec{B}$ .

**(A1.3.4)** Beweisen Sie die Identitäten (mit Summenkonvention)

$$(a) \quad \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

## 1 Vektorrechnung

$$(b) (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{d})$$

(Hinweis: benutzen Sie Identität (a))

$$(c) \epsilon_{ijk}\delta_{ij} = 0, \epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk} = 2\delta_{il}, \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6.$$

## 1.4 Spatprodukt

Unter dem Spatprodukt versteht man das "gemischte" Produkt  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ .  
In Komponenten-Schreibweise ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= (a_1, a_2, a_3) \cdot [(b_1, b_2, b_3) \times (c_1, c_2, c_3)] \\ &= (a_1, a_2, a_3) \cdot \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ -b_1c_3 + b_3c_1 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} \\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(-b_1c_3 + b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Aufgrund der Determinantenregel über die Vertauschbarkeit von Zeilen folgt, dass das Spatprodukt zyklisch vertauschbar ist:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}). \quad (1.24)$$

Geometrisch entspricht das Spatprodukt dem Volumen eines aus den drei Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  aufgespannten Parallelepipeds (siehe Abb. 1.7).

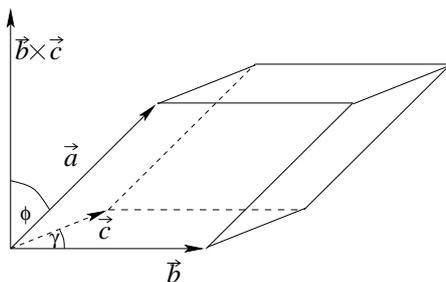


Abbildung 1.7: Darstellung des Parallelepipeds

Es ergibt sich ein verschwindendes Spatprodukt  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ , wenn alle drei Vektoren in einer Ebene liegen oder zwei der drei Vektoren auf einer Geraden liegen.

Übungsaufgabe:

(A1.4.1) Beweisen Sie die Identität von Lagrange:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2.$$

## 1.5 Transformation von Vektoren

Gemäß bisheriger Definition (siehe Kap. 1.1) ist ein Vektor "eine Größe mit Absolutwert und Richtung". Aber was heißt "Richtung" genau? Man kann nicht einfach sagen, dass ein Vektor alles mit drei Komponenten ist. Die Eigenschaft "Richtung" lässt sich aber genau festlegen durch das Transformationsverhalten von Vektoren bei "Änderung" des Koordinatensystems. Dazu führen wir zunächst den Begriff des **Ortsvektors** ein.

**Definition Ortsvektor:** Jeder Punkt  $P(x, y, z)$  in einem dreidimensionalen Koordinatensystem  $(x, y, z)$  kann durch seinen Ortsvektor  $\vec{r}$  eindeutig festgelegt werden, der als Abstandsvektor vom Ursprung  $O(0, 0, 0)$  des Koordinatensystems definiert ist:

$$\vec{r} = \overline{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = (x, y, z). \quad (1.25)$$

Nun nehmen wir an, dass es ein zweites Koordinatensystem  $(x', y', z')$  gibt, das um einen Winkel  $\phi$  relativ zum System  $(x, y, z)$  um die gemeinsame  $x$ -Achse gedreht ist (siehe Abb. 1.8)

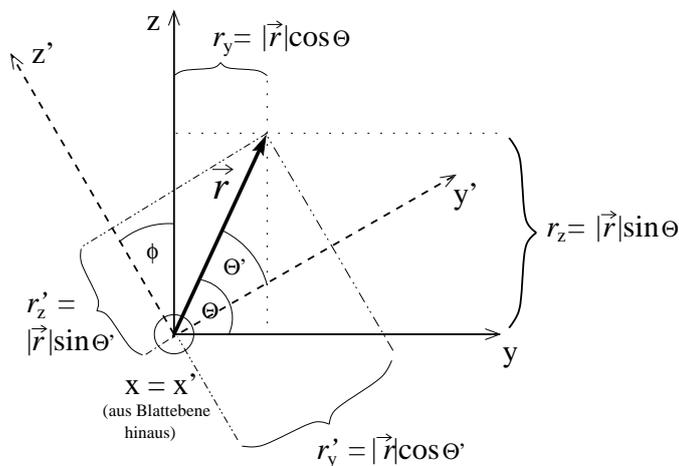


Abbildung 1.8: Der Ortsvektor in zwei zueinander gedrehten Koordinatensystemen

Bezüglich der Komponenten des Ortsvektors  $\vec{r}$  gilt im ungestrichenen Koordinatensystem

$$r_y = r \cos \Theta, \quad r_z = r \sin \Theta, \quad (1.26)$$

wobei  $r = |\vec{r}|$  der Betrag des Ortsvektors ist.

Ebenso gilt im gestrichenen Koordinatensystem

$$r'_y = r \cos \Theta', \quad r'_z = r \sin \Theta'. \quad (1.27)$$

## 1 Vektorrechnung

Weil gemäß der Abbildung 1.8  $\Theta' = \Theta - \phi$  ist folgt

$$\begin{aligned} (a) \quad r'_y &= r \cos(\Theta - \phi) = r [\cos \Theta \cos \phi + \sin \Theta \sin \phi] = r_y \cos \phi + r_z \sin \phi, \\ (b) \quad r'_z &= r \sin(\Theta - \phi) = r [\sin \Theta \cos \phi - \cos \Theta \sin \phi] = -r_y \sin \phi + r_z \cos \phi, \end{aligned} \quad (1.28)$$

wobei wir die Gleichungen (1.26) benutzt haben. Darüber hinaus gilt natürlich

$$r'_x = r_x. \quad (1.29)$$

Die Zusammenhänge (1.28)–(1.29) können wir als Matrizengleichung schreiben:

$$\begin{pmatrix} r'_x \\ r'_y \\ r'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}. \quad (1.30)$$

Verallgemeinert man diese Beziehungen auf eine Drehung um eine beliebige Achse im dreidimensionalen Raum, so erhält man

$$\begin{pmatrix} r'_x \\ r'_y \\ r'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{zx} & R_{zy} & R_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}, \quad (1.31)$$

oder kompakter geschrieben als

$$r'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} r_j, \quad (1.32)$$

wobei der Index 1 dem Index  $x$ , der Index 2 dem Index  $y$  und der Index 3 dem Index  $z$  entspricht.

Mit Gleichung (1.32) können wir jetzt formal definieren:

**Definition:** Ein Vektor (oder ein Tensor 1. Ordnung) ist eine Menge von drei Komponenten, die sich gemäß Gleichung (1.32) transformieren, also das gleiche Transformationsverhalten zeigen wie der Ortsvektor bei einer Koordinatendrehung.

Als Nebenbemerkungen vermerken wir:

1. Ein Tensor 2. Ordnung ist eine Größe mit neun Komponenten  $T_{xx}, T_{xy}, T_{xz}, T_{yx}, \dots, T_{zz}$ , die sich gemäß

$$T'_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 R_{ik} R_{jl} T_{kl} \quad (1.33)$$

transformieren.

2. Ein Skalar ist ein Tensor 0. Ordnung.

## 1.6 Anwendungen der Vektorrechnung

### 1.6.1 Abstand zweier Punkte

Der Abstandsvektor zwischen zwei Punkten  $P_1$  mit dem Ortsvektor  $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$  und  $P_2$  mit dem Ortsvektor  $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$  ist gegeben durch

$$\vec{a} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) . \quad (1.34)$$

Der Betrag des Abstandsvektors ist dann

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} . \quad (1.35)$$

### 1.6.2 Geradengleichung und Ebenengleichung

Die Punkte  $A$  und  $B$  seien durch ihre Ortsvektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  (siehe Abb. 1.9) gegeben. Wie lautet die Gleichung der Geraden durch die Punkte  $A$  und  $B$ ?

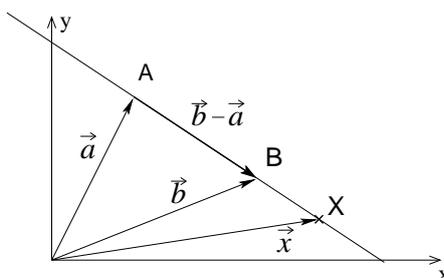


Abbildung 1.9: Geradengleichung

Die Gerade durch die Punkte  $A$  und  $B$  ist parallel zum Abstandsvektor  $\vec{b} - \vec{a}$ , und sie geht durch den Punkt  $A$ . Für jeden Ortsvektor  $\vec{x}$  eines Punktes  $X$  auf der gesuchten Geraden gilt dann

$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda (\vec{b} - \vec{a}) , \quad (1.36)$$

wobei  $\lambda$  eine beliebige reelle Zahl ist.

Sind nur ein Punkt  $P$  mit dem Ortsvektor  $\vec{a}$  und ein Richtungsvektor  $\vec{u}$  gegeben, so lautet die **Punkt-Richtungs-Form der Geradengleichung**

$$\vec{x}_G = \vec{a} + \lambda \vec{u} , \quad (1.37)$$

wobei wieder  $\lambda$  eine beliebige reelle Zahl ist.

Gibt man außer dem Ortsvektor  $\vec{a}$  und dem Richtungsvektor  $\vec{u}$  noch einen zweiten Richtungsvektor  $\vec{v}$  vor, so kann man dadurch eine Ebene im Raum genau festlegen. Für alle Punkte in dieser Ebene gilt die **Punkt-Richtungs-Form der Ebenengleichung**

$$\vec{x}_E = \vec{a} + k\vec{u} + t\vec{v} , \text{ mit } \vec{u} \neq \vec{v} , \quad (1.38)$$

wobei  $k$  und  $t$  beliebige reelle Zahlen sind.

### 1.6.3 Kosinussatz

Für das durch die drei Vektoren (siehe Abb. 1.10)  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  gebildete Dreieck gilt  $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ , so dass

$$\vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = a^2 + b^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma . \quad (1.39)$$

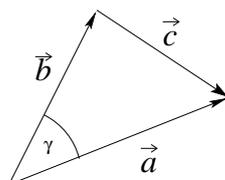


Abbildung 1.10: Zum Kosinussatz

### 1.6.4 Überlagerung von Kräften

Vier in einer Ebene liegende Kräfte, jeweils in der Einheit N ( $1\text{N} = 1\text{kg m s}^{-2}$ ) gemessen,

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= (-95.3, 53) , \\ \vec{F}_2 &= (-150.4, -54.7) , \\ \vec{F}_3 &= (71, 71) , \\ \vec{F}_4 &= (80, 0) , \end{aligned}$$

wirken auf den Punkt  $O$ .

Für die Gesamtkraft ergibt sich

$$\vec{F}_G = \sum_{i=1}^4 \vec{F}_i = (-94.7, 69.3) .$$

Der Betrag der Gesamtkraft ist  $F_G = \sqrt{94.7^2 + 69.3^2} = 117.3$  N und die Kraft wirkt in Richtung des Winkels  $\beta = 143.8$  Grad zur  $x$ -Achse, wobei  $\beta$  aus

$$\tan \beta = \frac{F_{G,y}}{F_{G,x}} = -\frac{69.3}{94.7} = -0.732$$

berechnet wird.

## 1.7 Differentiation und Integration von Vektoren

### 1.7.1 Differentiation von Vektoren

Der Vektor  $\vec{A}$  kann eine Funktion des skalaren Parameters  $u$  sein, d.h.  $\vec{A} = \vec{A}(u)$ . In Komponentenschreibweise gilt dann

$$\vec{A}(u) = A_x(u)\vec{e}_1 + A_y(u)\vec{e}_2 + A_z(u)\vec{e}_3 . \quad (1.40)$$

## 1.7 Differentiation und Integration von Vektoren

Da die kartesischen Einheitsvektoren  $\vec{e}_i$  nicht variabel sind, definiert man das **Differential** des Vektors als

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}(u)}{du} &\equiv \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\vec{A}(u + \Delta u) - \vec{A}(u)}{\Delta u} \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left[ \frac{A_x(u + \Delta u) - A_x(u)}{\Delta u} \vec{e}_1 + \frac{A_y(u + \Delta u) - A_y(u)}{\Delta u} \vec{e}_2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_z(u + \Delta u) - A_z(u)}{\Delta u} \vec{e}_3 \right], \end{aligned} \quad (1.41)$$

so dass 
$$\frac{d\vec{A}(u)}{du} = \frac{dA_x(u)}{du} \vec{e}_1 + \frac{dA_y(u)}{du} \vec{e}_2 + \frac{dA_z(u)}{du} \vec{e}_3. \quad (1.42)$$

Analog ergeben sich höhere Ableitungen zu

$$\frac{d^n \vec{A}(u)}{du^n} = \frac{d^n A_x(u)}{du^n} \vec{e}_1 + \frac{d^n A_y(u)}{du^n} \vec{e}_2 + \frac{d^n A_z(u)}{du^n} \vec{e}_3. \quad (1.43)$$

Es gelten folgende Regeln, die man leicht über die Komponentendarstellung (1.40) beweist:

(a) 
$$\frac{d}{du} (\vec{A} + \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{du} + \frac{d\vec{B}}{du} \quad (1.44)$$

(b) 
$$\frac{d}{du} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{du} + \frac{d\vec{A}}{du} \cdot \vec{B} \quad (1.45)$$

(c) 
$$\frac{d}{du} (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{du} + \frac{d\vec{A}}{du} \times \vec{B}. \quad (1.46)$$

(d) Falls  $\Phi(u)$  eine skalare Funktion bezeichnet gilt

$$\frac{d}{du} (\Phi \vec{A}) = \Phi \frac{d\vec{A}}{du} + \frac{d\Phi}{du} \vec{A}. \quad (1.47)$$

Wichtige physikalische Vektoren, die als Ableitungen von Vektoren definiert sind, sind die Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t), \quad (1.48)$$

als Zeitableitung des Ortsvektors  $\vec{r}(t)$  eines Punktteilchens und die Beschleunigung

$$\vec{a}(t) \equiv \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t), \quad (1.49)$$

als Zeitableitung des Geschwindigkeitsvektors  $\vec{v}(t)$  und somit als zweite zeitliche Ableitung des Ortsvektors  $\vec{r}(t)$ .

Betrachten wir als **Beispiel** die Bewegung eines Teilches auf einer Kreisbahn

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (R \cos(\omega t), R \sin(\omega t), 0), \quad (1.50)$$

mit dem Radius  $R$  und der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  (siehe Abb. 1.11). In einer Umlaufzeit  $T = 2\pi/\omega$  hat das Teilchen einen kompletten Umlauf absolviert. Durch Ableitung des

## 1 Vektorrechnung

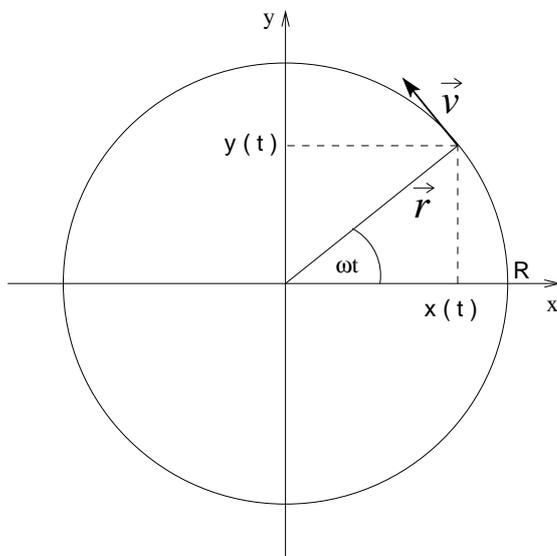


Abbildung 1.11: Kreisbewegung

Ortsvektors (1.50) nach der Zeit  $t$  erhalten wir für die Teilchengeschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = R\omega (-\sin(\omega t), \cos(\omega t), 0) \quad (1.51)$$

und durch nochmaliges Ableiten für die Teilchenbeschleunigung

$$\vec{a}(t) = -R\omega^2 (\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0) = -\omega^2 \vec{r}(t) . \quad (1.52)$$

Man erkennt sofort, dass die Beschleunigung in Richtung vom Ortsvektor  $\vec{r}(t)$  wirkt, was man als "Zentripetalbeschleunigung" bezeichnet. Darüber hinaus folgt für alle Zeiten  $t$ , dass

$$\vec{v}(t) \cdot \vec{r}(t) = R^2\omega (-\sin(\omega t)\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\cos(\omega t)) = 0 , \quad (1.53)$$

d.h. dass der Geschwindigkeitsvektor senkrecht zum Ortsvektor ( $\vec{v} \perp \vec{r}$ ) steht.

Für den Betrag der Geschwindigkeit erhält man

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{\omega^2 R^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)} = \omega R = \frac{2\pi R}{T} . \quad (1.54)$$

Dies entspricht gerade dem Verhältnis aus Kreisumfang ( $2\pi R$ ) zur Umlaufzeit  $T$ .

Für den Betrag der Beschleunigung ergibt sich

$$a = |\vec{a}| = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} . \quad (1.55)$$

### 1.7.2 Integration von Vektoren

Analog zur Definition der Ableitung (1.41) eines Vektors definiert man das Integral eines Vektors  $\vec{A}(u)$  über die Integrale seiner Komponenten

$$\begin{aligned} \int du \vec{A}(u) &\equiv \int du [A_x(u)\vec{e}_1 + A_y(u)\vec{e}_2 + A_z(u)\vec{e}_3] \\ &= \int du A_x(u) \vec{e}_1 + \int du A_y(u) \vec{e}_2 + \int du A_z(u) \vec{e}_3 . \end{aligned} \quad (1.56)$$

Als **Beispiel** betrachten wir den Vektor  $\vec{A}(u) = (3u^2 - 1, 2u - 3, 6u^2 - 4u)$  und berechnen das Integral  $\int_0^2 du \vec{A}(u)$ . Entsprechend der Definition (1.56) ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_0^2 du \vec{A}(u) &= \int_0^2 du (3u^2 - 1, 2u - 3, 6u^2 - 4u) \\ &= [u^3 - u, u^2 - 3u, 2u^3 - 2u^2]_0^2 = (6, -2, 8) . \end{aligned} \quad (1.57)$$

## 1.8 Koordinatensysteme

Bisher haben wir nur mit **kartesischen Koordinaten**  $x, y, z$  gearbeitet.  $x, y, z$  eines Punktes  $P$  sind definiert als die Projektionen des Ortsvektors  $\vec{r} = \overline{OP}$  auf die Achsen  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ , d.h.

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 , \quad \text{mit} \quad |\vec{e}_i| = 1 , \quad i = 1, 2, 3 . \quad (1.58)$$

Wir betrachten jetzt zusätzlich **neue Koordinatensysteme**  $q_1, q_2, q_3$  mit den Transformationsgleichungen

$$q_1 = q_1(x, y, z) , \quad q_2 = q_2(x, y, z) , \quad q_3 = q_3(x, y, z) \quad (1.59)$$

und der Umkehrtransformation

$$x = x(q_1, q_2, q_3) , \quad y = y(q_1, q_2, q_3) , \quad z = z(q_1, q_2, q_3) . \quad (1.60)$$

Der Ortsvektor  $\vec{r}$  des Punktes  $P$  kann dann mittels Gleichung (1.60) als Funktion der krummlinigen Koordinaten  $q_i$  aufgefasst werden:

$$\vec{r}(q_1, q_2, q_3) = (x(q_1, q_2, q_3) , \quad y(q_1, q_2, q_3) , \quad z(q_1, q_2, q_3)) . \quad (1.61)$$

### 1.8.1 Koordinatenlinien und Koordinatenflächen

Hält man zwei dieser drei neuen Koordinaten konstant und variiert man nur die dritte neue Koordinate, so erhält man drei **Koordinatenlinien**:

$$\begin{aligned} L_1 : \quad \vec{r} &= \vec{r}(q_1, q_2 = c_2, q_3 = c_3) \\ L_2 : \quad \vec{r} &= \vec{r}(q_1 = c_1, q_2, q_3 = c_3) \\ L_3 : \quad \vec{r} &= \vec{r}(q_1 = c_1, q_2 = c_2, q_3) \end{aligned}$$

## 1 Vektorrechnung

Ist eine dieser Koordinatenlinien keine Gerade, so spricht man von **krummlinigen Koordinaten**.

Hält man nur eine neue Koordinate fest und variiert jeweils die beiden anderen, so erhält man **Koordinatenflächen**:

$$\begin{aligned} F_1 : \quad \vec{r} &= \vec{r}(q_1 = c_1, q_2, q_3) \\ F_2 : \quad \vec{r} &= \vec{r}(q_1, q_2 = c_2, q_3) \\ F_3 : \quad \vec{r} &= \vec{r}(q_1, q_2, q_3 = c_3) . \end{aligned} \tag{1.62}$$

Die Koordinatenlinien  $L_i$  entstehen jeweils durch Schnitt jeweils zwei dieser Koordinatenflächen.

### 1.8.2 Festlegung von Einheitsvektoren

Als normierten Basisvektor oder Einheitsvektor  $\vec{e}_{q_1}$  im Punkt  $P$  wählen wir einen Vektor vom Betrag 1 tangential zur Koordinatenlinie  $L_1$  ( $q_2 = c_2, q_3 = c_3$ ) im Punkt  $P$ . Seine Richtung soll dem Durchlaufsinne der Koordinatenlinie bei wachsendem  $q_1$  entsprechen:

$$\vec{e}_{q_1} \equiv \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \right|}, \quad \text{oder für } i = 1, 2, 3 \tag{1.63}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = h_i \vec{e}_{q_i} \tag{1.64}$$

mit dem Skalenfaktor 
$$h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right|. \tag{1.65}$$

Dies führen wir am Beispiel der Zylinderkoordinaten vor.

### 1.8.3 Beispiel: Zylinderkoordinaten

Gemäß Abb. 1.12 werden als neue Koordinaten gewählt:

$\phi$ : der Winkel zwischen der Projektion des Ortsvektors auf die  $x - y$ -Ebene und der  $x$ -Achse,

$\rho$ : der Abstand des Punktes  $P$  von der  $z$ -Achse,

$z$ : die Länge der Projektion des Ortsvektors auf die  $z$ -Achse.

Aus Abb. 1.12 erhalten wir als Transformationsgleichungen

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad z = z \tag{1.66}$$

und als Umkehrtransformation

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z, \tag{1.67}$$

mit den Einschränkungen  $\rho \geq 0$  und  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Man erkennt, dass jedem Tripel  $(\rho, \phi, z)$  exakt nur ein Raumpunkt zugeordnet ist.

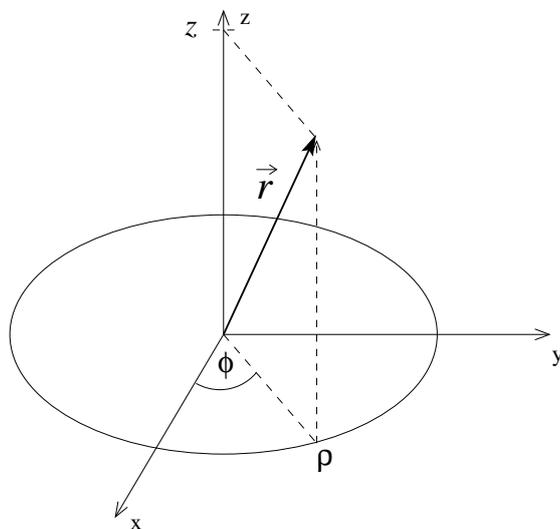


Abbildung 1.12: Zur Einführung der Zylinderkoordinaten

Abbildung 1.13 zeigt, dass die Koordinatenfläche für  $\rho = \text{const.}$  einem Kreiszyylinder um die  $z$ -Achse entspricht. Die Koordinatenfläche für  $\phi = \text{const.}$  ergibt eine Halbebene, die die  $z$ -Achse enthält, während die Koordinatenfläche für  $z = \text{const.}$  eine Ebene parallel zur  $x - y$ -Ebene ergibt.

Gemäß der Definition (1.63) erhalten wir mit

$$\vec{r} = (x, y, z) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z)$$

für die drei Einheitsvektoren

$$\vec{e}_\rho = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right|} = (\cos \phi, \sin \phi, 0) \quad (1.68)$$

$$\vec{e}_\phi = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right|} = (-\sin \phi, \cos \phi, 0) \quad (1.69)$$

$$\vec{e}_z = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right|} = (0, 0, 1) . \quad (1.70)$$

Offensichtlich ist  $\vec{e}_\rho$  parallel zur  $x - y$ -Ebene und zeigt weg von der  $z$ -Achse;  $\vec{e}_\phi$  ist ebenfalls parallel zur  $x - y$ -Ebene und ist die Tangente an den Kreis  $z = \text{const.}$  und  $\rho = \text{const.}$ ;  $\vec{e}_z$  entspricht dem kartesischen Einheitsvektor  $\vec{e}_3$ .

Aus den Beziehungen (1.68)–(1.69) erhält man

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_\rho \cos \phi - \vec{e}_\phi \sin \phi , \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_\rho \sin \phi + \vec{e}_\phi \cos \phi . \quad (1.71)$$

## 1 Vektorrechnung

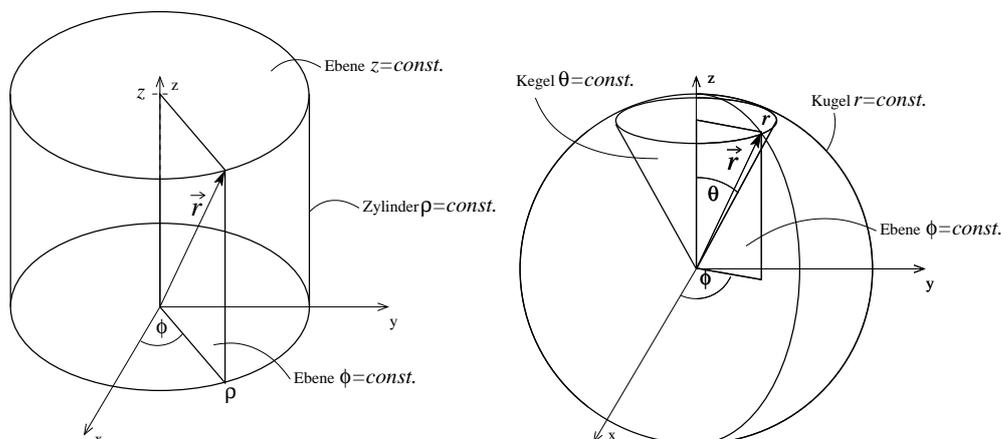


Abbildung 1.13: Koordinatenflächen und Koordinatenlinien für Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten

Durch Berechnung des Spatprodukts mit Gleichung (1.23)

$$\vec{e}_\rho \cdot (\vec{e}_\phi \times \vec{e}_z) = \begin{vmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$$

lässt sich sofort überprüfen, dass die Zylinderkoordinaten ein orthogonales Koordinatensystem mit variablen Einheitsvektoren bilden.

Aufgrund der Variabilität der Einheitsvektoren folgt für die totalen zeitlichen Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} &= \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dt} + \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= 0 + (-\sin \phi, \cos \phi) \dot{\phi} + 0 = \dot{\phi} \vec{e}_\phi, \end{aligned} \quad (1.72)$$

$$\frac{d\vec{e}_\phi}{dt} = 0 + (-\cos \phi, -\sin \phi) \dot{\phi} + 0 = -\dot{\phi} \vec{e}_\rho \quad (1.73)$$

$$\frac{d\vec{e}_z}{dt} = 0. \quad (1.74)$$

Gleichungen (1.72)-(1.74) stimmen mit dem allgemeinen Ergebnis

$$\frac{d\vec{e}_j}{dt} \perp \vec{e}_j \quad (1.75)$$

überein, das sofort aus  $\vec{e}_j \cdot \vec{e}_j = \text{const.}$  durch Differentiation nach  $t$  folgt:

$$\frac{d\vec{e}_j}{dt} \cdot \vec{e}_j = 0. \quad (1.76)$$

Abschließend berechnen wir den Geschwindigkeitsvektor und den Beschleunigungsvektor in Zylinderkoordinaten. Gegeben sei der Ortsvektor eines Punkts auf der Bahnkurve  $\vec{r}(t) =$

$(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z)$ . Mit Gleichung (1.69) folgt

$$\vec{r}'(t) \cdot \vec{e}_\phi = -\rho \cos \phi \sin \phi + \rho \sin \phi \cos \phi = 0 ,$$

so dass der Ortsvektor keine Komponente parallel zu  $\vec{e}_\phi$  hat. Deshalb gilt die Darstellung

$$\vec{r}(t) = \rho(t)\vec{e}_\rho(t) + z(t)\vec{e}_z(t) . \quad (1.77)$$

Wegen der Zeitvariabilität der Einheitsvektoren  $\vec{e}_\rho(t)$  und  $\vec{e}_z(t)$  folgt mit Gleichung (1.72) und (1.74)

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\vec{e}}_\rho + \dot{z}\vec{e}_z + z\dot{\vec{e}}_z = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\vec{e}_\phi + \dot{z}\vec{e}_z . \quad (1.78)$$

Daraus erhält man drei Anteile für den Beschleunigungsvektor

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) = \dot{\vec{v}} &= \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\vec{e}}_\rho + \dot{\rho}\dot{\phi}\vec{e}_\phi + \rho\ddot{\phi}\vec{e}_\phi + \rho\dot{\phi}\dot{\vec{e}}_\phi + \ddot{z}\vec{e}_z + \dot{z}\dot{\vec{e}}_z \\ &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) \vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}) \vec{e}_\phi + \ddot{z}\vec{e}_z . \end{aligned} \quad (1.79)$$

Übungsaufgabe:

**(A1.8.1)** Berechnen Sie die Einheitsvektoren sowie den Geschwindigkeitsvektor und Beschleunigungsvektor in Kugelkoordinaten

$$x = r \cos \phi \sin \theta , \quad y = r \sin \phi \sin \theta , \quad z = r \cos \theta .$$

Drücken Sie  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\theta$  und  $\vec{e}_\phi$  als Funktion der kartesischen Einheitsvektoren  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_3$  aus. Verifizieren Sie dabei folgende Ergebnisse:

$$\vec{e}_r = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (1.80)$$

$$\vec{e}_\theta = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta) \quad (1.81)$$

$$\vec{e}_\phi = (-\sin \phi, \cos \phi, 0) \quad (1.82)$$

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\phi}\vec{e}_\phi \quad (1.83)$$

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \left( \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) \vec{e}_r \\ &\quad + \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) - r \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \right] \vec{e}_\theta \\ &\quad + \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) \right] \vec{e}_\phi . \end{aligned} \quad (1.84)$$

## 1.9 Vektorielle Differentialoperatoren

### 1.9.1 Gradient

Wir definieren zunächst skalare Felder und vektorielle Felder.

## 1 Vektorrechnung

**Definition Skalare Felder:** Unter einem skalaren Feld versteht man eine skalare Funktion  $\psi(x, y, z)$ , die jedem Punkt  $P(x_0, y_0, z_0)$  den skalaren Wert  $\psi(x_0, y_0, z_0)$  zuordnet, wie z. B. Temperaturfelder, Massendichte und Ladungsdichte.

**Definition Vektorielle Felder:** Unter einem vektoriellen Feld versteht man eine Vektorfunktion  $\vec{A}(x, y, z)$ , die jedem Punkt  $P(x_0, y_0, z_0)$  den Vektor  $\vec{A}(x_0, y_0, z_0)$  zuordnet, wie z.B. Geschwindigkeitsfelder in Flüssigkeiten und Feldstärkevektoren  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  in der Elektrodynamik. Gegeben seien nun ein Punkt  $P(x_0, y_0, z_0)$  und ein Skalarfeld  $\psi(x, y, z)$ .

**Definition Gradient:**  $\text{grad } \psi(x_0, y_0, z_0) = \vec{\nabla} \psi(x_0, y_0, z_0)$  ist der Vektor, der in Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion  $\psi$  zeigt und dessen Betrag die Änderung von  $\psi$  pro Wegstrecke in Richtung des stärksten Anstiegs im Punkt  $P(x_0, y_0, z_0)$  ist. (Beispiel: Höhenlinien auf Wanderkarten)

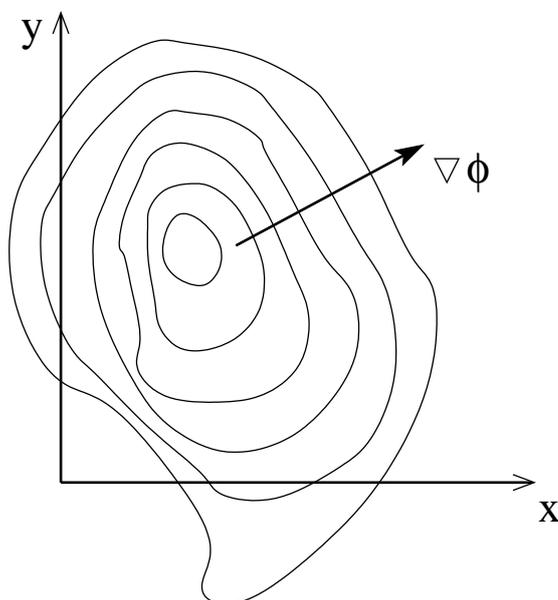


Abbildung 1.14: Gradient in einer Höhenlinienkarte

Jedem Punkt eines Skalarfeldes ordnet man so einen Gradientenvektor zu. Die Gesamtheit aller Gradientenvektoren bildet ein dem Skalarfeld zugeordnetes Vektorfeld, dass sich mathematisch durch

$$\vec{A}(x, y, z) = \text{grad } \psi(x, y, z) = \vec{\nabla} \psi(x, y, z) = \vec{e}_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + \vec{e}_3 \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (1.85)$$

darstellen lässt. Wir können also den Nabla-Operator  $\vec{\nabla}$  schreiben als

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} . \quad (1.86)$$

Beweis : Zum Beweis der Beziehungen (1.85) und (1.86) berechnen wir das totale Differential der Funktion  $\psi$ , dass sich durch Taylor-Entwicklung der Funktion  $\psi(x+dx, y+dy, z+dz)$

bis zur ersten Ordnung ergibt:

$$d\psi = \psi(x + dx, y + dy, z + dz) - \psi(x, y, z) \simeq \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy + \frac{\partial\psi}{\partial z} dz .$$

Mit  $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$  lässt sich  $d\psi$  auch als Skalarprodukt schreiben

$$d\psi = \vec{\nabla}\psi \cdot d\vec{r} = \left( \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial z} \right) \cdot (dx, dy, dz) = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy + \frac{\partial\psi}{\partial z} dz , \quad (1.87)$$

womit die Behauptungen bewiesen sind. Q.E.D.

**Definition Äquipotentialfläche:** Flächen, auf denen  $\psi(x, y, z) = \text{const.}$  ist, werden als Äquipotentialflächen bezeichnet.

$\psi(x, y, z) = \text{const.}$  ist äquivalent zu einem verschwindenden totalen Differential ( $d\psi = 0$ ), so dass mit Gleichung (1.87) für Äquipotentialflächen folgt

$$d\psi = 0 = \vec{\nabla}\psi \cdot d\vec{r}_{AF} . \quad (1.88)$$

Es folgt der für die klassische Mechanik wichtige Satz: **Der Gradient von  $\psi$  steht stets senkrecht auf den Äquipotentialflächen von  $\psi$ :**

$$\vec{\nabla}\psi \perp d\vec{r}_{AF} \quad (1.89)$$

(Der Gradientenvektor  $\vec{\nabla}\psi$  zeigt immer in Richtung des stärksten Zuwachses von  $\psi$ , weil dann der Zuwachs  $d\psi$  parallel zu  $d\vec{r}$  ist, so dass das Skalarprodukt  $\vec{\nabla}\psi \cdot d\vec{r}$  maximal ist.)  
Bildet man das Skalarprodukt des Gradientenvektor mit einem beliebigen zweiten Vektor  $\vec{B}$ , so erhält man den neuen Operator

$$\left( \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \right) = \sum_{i=1}^3 B_i \frac{\partial}{\partial x_i} . \quad (1.90)$$

Angewandt auf ein Skalarfeld  $\Phi$  erhält man das skalare Feld  $\vec{B} \cdot (\vec{\nabla}\Phi)$ :

$$\left( \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \right) \Phi = \sum_{i=1}^3 B_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi = \sum_{i=1}^3 B_i \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} = \vec{B} \cdot \left( \vec{\nabla}\Phi \right) . \quad (1.91)$$

Angewandt auf den Vektor  $\vec{C}$  erhält man

$$\left( \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{C} = \sum_{i=1}^3 B_i \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{C} = \left( \sum_{i=1}^3 B_i \frac{\partial C_1}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^3 B_i \frac{\partial C_2}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^3 B_i \frac{\partial C_3}{\partial x_i} \right) \quad (1.92)$$

einen neuen Vektor.

Bei der Rechnung (1.92) ist die Reihenfolge wichtig:

$$\left( \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{C} \neq \vec{C} \left( \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \right) .$$

## 1 Vektorrechnung

Der Ausdruck  $\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \vec{C})$  ist nicht definiert.

Neben der skalaren Verknüpfung (1.90) können wir auch das Kreuzprodukt bilden:

$$\left(\vec{B} \times \vec{\nabla}\right)_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} B_j \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (1.93)$$

Die Anwendung dieses Operators auf ein Skalarfeld  $\Phi$  ergibt

$$\left[\left(\vec{B} \times \vec{\nabla}\right) \Phi\right]_i = \left[\vec{B} \times \left(\vec{\nabla} \Phi\right)\right]_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} B_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}. \quad (1.94)$$

Die Zweifachanwendung des Gradienten-Operators

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \equiv \nabla^2 \equiv \Delta \quad (1.95)$$

ergibt den skalaren sogenannten **Laplace-Operator**  $\Delta$ , der sowohl auf Skalare als auch auf Vektoren angewandt werden kann:

$$\Delta \Phi = \nabla^2 \Phi = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} \quad (1.96)$$

$$\Delta \vec{B} = \nabla^2 \vec{B} = \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 B_1}{\partial x_i^2}, \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 B_2}{\partial x_i^2}, \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 B_3}{\partial x_i^2} \right). \quad (1.97)$$

### 1.9.2 Der Nabla-Operator $\vec{\nabla}$

Der Vektor-Operator (1.86)

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

erhält Bedeutung, wenn er auf irgendetwas wirken kann.  $\vec{\nabla} T$  ist kein Produkt, sondern eine Vorschrift zur Ableitung des Skalars  $T(\vec{r})$ , d.h.  $\vec{\nabla}$  **ist ein Vektor-Operator, der auf  $T$  wirkt**.  $\vec{\nabla}$  verhält sich dann wie ein normaler Vektor, wenn wir "Produkt" mit "wirkt auf" ersetzen.

Nach Kap. 1.2 existieren drei Möglichkeiten der Multiplikation eines Vektors  $\vec{a}$ :

1. Produkt mit einem Skalar  $p$ :  $p\vec{a}$ ,
2. Skalarprodukt mit einem anderen Vektor  $\vec{b}$ :  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ,
3. Kreuzprodukt mit einem anderen Vektor  $\vec{b}$ :  $\vec{a} \times \vec{b}$ .

Entsprechend kann der Nabla-Operator auf drei Weisen wirken:

1. auf eine skalare Funktion  $T(\vec{r})$ :  $\vec{\nabla}T(\vec{r})$  ("Gradient"),
2. auf eine Vektorfunktion  $\vec{A}$  über das Skalarprodukt:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$  ("Divergenz"),
3. auf eine Vektorfunktion  $\vec{A}$  über das Kreuzprodukt:  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$  ("Rotation").

Der Gradient wurde bereits ausführlich diskutiert, so dass wir nun die Divergenz und die Rotation näher untersuchen.

### 1.9.3 Divergenz

Sei das Vektorfeld  $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = (A_1, A_2, A_3)$  gegeben.

**Definition Divergenz:** Als  $\text{div } \vec{A}$  bezeichnet man das Skalarprodukt zwischen dem Nabla-Operator und dem Vektor  $\vec{A}$ :

$$\text{div } \vec{A} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} A_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_i}{\partial x_i}. \quad (1.98)$$

Es folgt sofort mit Gleichung (1.95), dass man den Laplace-Operator als

$$\Delta = \text{div grad} = \text{div } \vec{\nabla} \quad (1.99)$$

darstellen kann.

Physikalisch interpretieren kann man die Divergenz eines Vektorfeldes als den Fluss eines Vektorfeldes durch ein Volumenelement  $dV$ .  $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$  repräsentiere die Flussrate (pro Einheitsfläche) einer Strömung durch eine Seitenfläche (siehe Abb. 1.15).

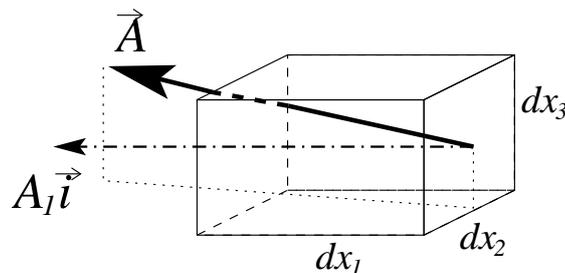


Abbildung 1.15: Zur physikalischen Deutung der Divergenz

Wir betrachten die Flussrate in  $x_1$ -Richtung durch den infinitesimal kleinen Quader mit den Seitenlängen  $dx_1, dx_2$  und  $dx_3$ , die gegeben ist aus dem Produkt aus  $A_1$  und der Seitenfläche  $dx_2 dx_3$ . Am Ort  $x_1$  ist die Flussrate gleich  $A_1 dx_2 dx_3$  und am Ort  $x_1 + dx_1$  gleich

$$\left( A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3.$$

## 1 Vektorrechnung

Der Nettofluss ergibt sich als Differenz der beiden Flussraten zu

$$\left( A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 - A_1 dx_2 dx_3 = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} dV .$$

Analog berechnet man den Nettofluss in  $x_2$ - und  $x_3$ -Richtung und nach Addition findet man für den Gesamtfluss durch den Quader

$$dV \left( \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \right) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_i}{\partial x_i} dV = \left( \operatorname{div} \vec{A} \right) dV .$$

Das Volumenelement  $dV$  stellt eine "Quelle" des Vektorfeldes dar falls  $\operatorname{div} \vec{A} > 0$ ; es stellt eine "Senke" des Vektorfeldes dar falls  $\operatorname{div} \vec{A} < 0$ .

Geometrisch kann man die Divergenz als Maß für das Auseinanderlaufen eines Vektors an einem Punkt  $P$  interpretieren. Betrachten wir als erstes Beispiel die Vektorfunktion

$$\vec{A}_1 = \vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 , \quad (1.100)$$

die in Abb. 1.16 a schematisch dargestellt ist. Wir erhalten sofort einen relativ hohen Wert für die Divergenz,

$$\operatorname{div} \vec{A}_1 = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3 .$$

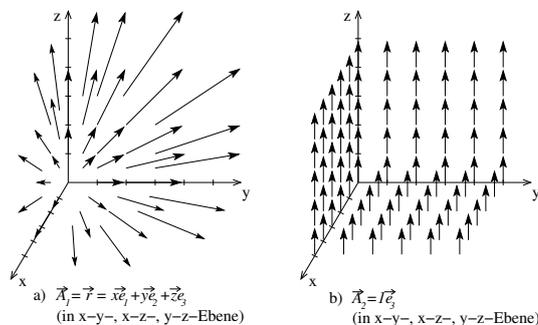


Abbildung 1.16: Divergenz zweier spezieller Vektorfunktionen

Als zweites Beispiel betrachten wir den Einheitsvektor in  $z$ -Richtung:

$$\vec{A}_2 = 1\vec{e}_3 , \quad (1.101)$$

der in Abb. 1.16 b schematisch dargestellt ist. Hier verschwindet die Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{A}_2 = \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(1) = 0 .$$

### 1.9.4 Rotation

Wieder sei das Vektorfeld  $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = (A_1, A_2, A_3)$  gegeben.

**Definition Rotation:** Als  $\text{rot } \vec{A}$  (in englischer Literatur auch oft  $\text{curl } \vec{A}$ ) bezeichnet man das Kreuzprodukt zwischen dem Nabla-Operator und dem Vektor  $\vec{A}$ :

$$\text{rot } \vec{A} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (1.102)$$

so dass für die  $i$ -Komponente des resultierenden Vektors

$$\left[ \text{rot } \vec{A} \right]_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j}, \quad (1.103)$$

wobei beim letzten Schritt die Summenkonvention benutzt wurde.

Mit Gleichung (1.103) schreibt sich Gleichung (1.102) als

$$\text{rot } \vec{A} = \epsilon_{ijk} \vec{e}_i \frac{\partial A_k}{\partial x_j} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}. \quad (1.104)$$

Die Rotation lässt sich geometrisch als ein Maß für die Wirbelstärke (Rotation) eines Vektorfeldes  $\vec{A}$  im Punkt  $P$  interpretieren. Betrachten wir als Beispiel die Vektorfunktion

$$\vec{A}_3 = -y\vec{e}_1 + x\vec{e}_2,$$

die in Abb. 1.17 schematisch skizziert ist.

Nach Gleichung (1.104) erhalten wir für die Rotation dieses Vektorfeldes

$$\text{rot } \vec{A}_3 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\vec{e}_3.$$

Ebenso weist man leicht nach, dass für die Beispiele (1.100) und (1.101) die Rotation jeweils verschwindet.

#### Übungsaufgaben:

**(A1.9.1)** Zeigen Sie, dass die Definition (1.102) äquivalent ist zur Darstellung

$$\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{A} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{A} \cdot d\vec{s}}{\Delta F}, \quad (1.105)$$

wobei  $\vec{n}$  den Einheits-Normalenvektor bezeichnet, der senkrecht auf der von der Kurve  $s$  umrandeten Fläche  $\Delta F$  steht.

**(A1.9.2)** Berechnen Sie die Rotation des Vektorfeldes

$$\vec{g} = 3x^2y\vec{e}_1 + yz^2\vec{e}_2 - xz\vec{e}_3.$$

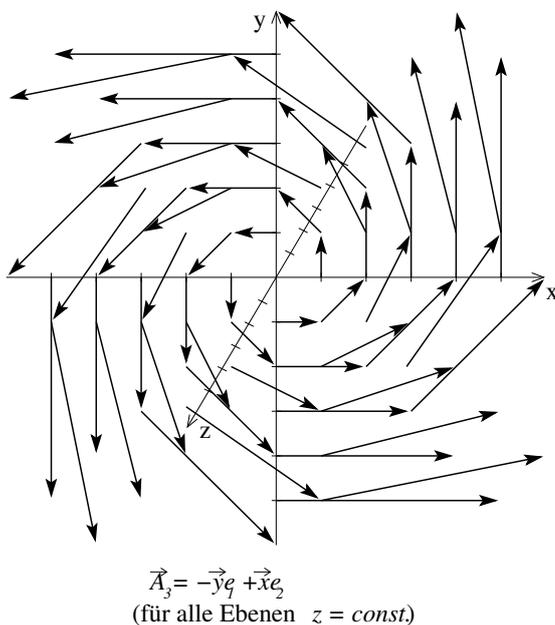


Abbildung 1.17: Rotation einer speziellen Vektorfunktion

## 1.10 Rechenregeln für vektorielle Differentialoperatoren

### 1.10.1 Summenregeln

Aus den Definitionen der vektoriellen Differentialoperatoren folgen die Summenregeln

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla}(f + g) &= \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g \\
 \vec{\nabla} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{a} + \vec{\nabla} \cdot \vec{b} \\
 \vec{\nabla} \times (\vec{a} + \vec{b}) &= \vec{\nabla} \times \vec{a} + \vec{\nabla} \times \vec{b}.
 \end{aligned}$$

### 1.10.2 Produktregeln

Hier ist zu bedenken, dass es zwei Arten von Skalaren aus dem Produkt  $fg$  zweier Skalare und aus dem Produkt  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  zweier Vektoren geben kann. Ebenso kann es zwei Arten von Vektoren aus den Produkten  $f\vec{a}$  und  $\vec{a} \times \vec{b}$  geben. Daher existieren sechs verschiedene Produktregeln:

## 1.10 Rechenregeln für vektorielle Differentialoperatoren

jeweils zwei für Gradienten, Divergenzen und Rotationen:

$$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f \quad (1.106)$$

$$\vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) + (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} \quad (1.107)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{a}) = f(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) + \vec{a} \cdot (\vec{\nabla}f) \quad (1.108)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b}) \quad (1.109)$$

$$\vec{\nabla} \times (f\vec{a}) = f(\vec{\nabla} \times \vec{a}) - \vec{a} \times (\vec{\nabla}f) \quad (1.110)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} + \vec{a}(\vec{\nabla} \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) . \quad (1.111)$$

Diese Regeln lassen sich leicht mit der Komponentendarstellung der Vektoren beweisen.

### 1.10.3 Quotientenregeln

Mit Hilfe der Produktregeln erhalten wir

$$\vec{\nabla} \left( \frac{f}{g} \right) = \frac{g\vec{\nabla}f - f\vec{\nabla}g}{g^2} \quad (1.112)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{a}}{g} \right) = \frac{g(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla}g)}{g^2} \quad (1.113)$$

$$\vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{a}}{g} \right) = \frac{g(\vec{\nabla} \times \vec{a}) + \vec{a} \times (\vec{\nabla}g)}{g^2} . \quad (1.114)$$

### 1.10.4 Kombination verschiedener vektorieller Differentialoperatoren

1.  $\vec{\nabla}\Phi$  ist ein Vektor. Von diesem Vektor können wir die Divergenz  $\text{div } \vec{\nabla}\Phi$  und die Rotation  $\text{rot } \vec{\nabla}\Phi$  berechnen.
2.  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$  ist ein Skalar, dessen Gradient wir bilden können.
3.  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$  ist ein Vektor, dessen Divergenz  $\text{div } (\vec{\nabla} \times \vec{A})$  und Rotation  $\text{rot } (\vec{\nabla} \times \vec{A})$  wir berechnen können.

Mehr Kombinationsmöglichkeiten gibt es nicht! Aber nicht alle ergeben etwas Neues, wie wir jetzt zeigen werden.

Für die Kombination verschiedener vektorieller Differentialoperatoren beweisen wir die folgenden wichtigen Rechenregeln:

- (a) Wir wiederholen Gleichung (1.99):

$$\text{div grad } \Phi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\Phi) = \nabla^2\Phi = \Delta\Phi . \quad (1.115)$$

## 1 Vektorrechnung

(b) Ein Gradientenfeld ist wirbelfrei:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \Phi) = \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (1.116)$$

(c) Ein Rotationsfeld besitzt keine Quellen und Senken, denn unter Ausnutzung von Gleichung (1.23) gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{g} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{g}) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g_x & g_y & g_z \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial g_z}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial z} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial g_z}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial z} \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y} \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.117)$$

(d) Unter Ausnutzung des dreifachen Kreuzprodukts (1.22) gilt

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{g}) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{g}) = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{g}) - \Delta \vec{g} \quad (1.118)$$

$$(e) \quad \operatorname{div} (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\operatorname{rot} \vec{B}) - \vec{B} \cdot (\operatorname{rot} \vec{C}). \quad (1.119)$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= \frac{\partial}{\partial x} (B_y C_z - B_z C_y) + \frac{\partial}{\partial y} (B_z C_x - B_x C_z) + \frac{\partial}{\partial z} (B_x C_y - B_y C_x) \\ &= C_x \left( \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + C_y \left( \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + C_z \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \\ &\quad - B_x \left( \frac{\partial C_z}{\partial y} - \frac{\partial C_y}{\partial z} \right) - B_y \left( \frac{\partial C_x}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial x} \right) - B_z \left( \frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} \right) \\ &= \vec{C} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{C}). \end{aligned}$$

Q.E.D.

## 1.11 Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinaten

### 1.11.1 Grundgleichungen

Neben den kartesischen Koordinaten  $x_i = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$  betrachten wir die allgemeinen krummlinigen Koordinaten  $q_i = (q_1, q_2, q_3)$ . Nach Kap. (1.8.2) bilden wir die neuen

## 1.11 Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinaten

Einheitsvektoren

$$\vec{e}_{q_i} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}, \quad (1.120)$$

mit dem Skalenfaktor

$$h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right|. \quad (1.121)$$

Wir nehmen an, dass die neuen Einheitsvektoren  $\vec{e}_{q_1}$ ,  $\vec{e}_{q_2}$  und  $\vec{e}_{q_3}$  ein rechtshändiges orthogonales Koordinatensystem bilden, d.h.

$$\vec{e}_{q_\nu} \cdot \vec{e}_{q_\mu} = \delta_{\nu\mu}, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3. \quad (1.122)$$

Aus  $\vec{r} = \vec{r}(q_i)$  folgt mit Gleichung (1.120)

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 \\ &= h_1 dq_1 \vec{e}_{q_1} + h_2 dq_2 \vec{e}_{q_2} + h_3 dq_3 \vec{e}_{q_3} \\ &= \sum_{i=1}^3 h_i dq_i \vec{e}_{q_i}. \end{aligned} \quad (1.123)$$

Für das Quadrat der Bogenlänge erhalten wir dann unter Ausnutzung von Gleichung (1.122)

$$\begin{aligned} (ds)^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} &= \sum_{\nu=1}^3 \sum_{\mu=1}^3 h_\nu h_\mu dq_\nu dq_\mu \vec{e}_{q_\nu} \cdot \vec{e}_{q_\mu} \\ &= \sum_{\mu=1}^3 h_\mu^2 dq_\mu^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2, \end{aligned} \quad (1.124)$$

während für das Volumenelement gilt

$$\begin{aligned} dV = d^3r &= |h_1 dq_1 \vec{e}_{q_1} \cdot [h_2 dq_2 \vec{e}_{q_2} \times h_3 dq_3 \vec{e}_{q_3}]| \\ &= h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3 |\vec{e}_{q_1} \cdot (\vec{e}_{q_2} \times \vec{e}_{q_3})| \\ &= h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3. \end{aligned} \quad (1.125)$$

### 1.11.2 Gradient

Gemäß Gleichung (1.87) gilt

$$d\psi = \vec{\nabla} \psi \cdot d\vec{r} = \frac{\partial \psi}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \psi}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \psi}{\partial q_3} dq_3. \quad (1.126)$$

Nach Gleichung (1.123) gilt

$$d\vec{r} = h_1 dq_1 \vec{e}_{q_1} + h_2 dq_2 \vec{e}_{q_2} + h_3 dq_3 \vec{e}_{q_3}. \quad (1.127)$$

Wir setzen als Ansatz an

$$\vec{\nabla} \Phi = \lambda_1 \vec{e}_{q_1} + \lambda_2 \vec{e}_{q_2} + \lambda_3 \vec{e}_{q_3} \quad (1.128)$$

## 1 Vektorrechnung

und bestimmen die Werte der  $\lambda_i$  durch Einsetzen von (1.127) und (1.128) in die Beziehung (1.126):

$$\frac{\partial\psi}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial\psi}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial\psi}{\partial q_3}dq_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1dq_1 \\ h_2dq_2 \\ h_3dq_3 \end{pmatrix} = h_1\lambda_1dq_1 + h_2\lambda_2dq_2 + h_3\lambda_3dq_3 .$$

Der Koeffizientenvergleich in dieser Gleichung ergibt

$$\lambda_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial\psi}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.129)$$

und somit für die Ansatzgleichung (1.128):

$$\vec{\nabla}\Phi = \vec{e}_{q_1} \frac{1}{h_1} \frac{\partial\psi}{\partial q_1} + \vec{e}_{q_2} \frac{1}{h_2} \frac{\partial\psi}{\partial q_2} + \vec{e}_{q_3} \frac{1}{h_3} \frac{\partial\psi}{\partial q_3} .$$

Wir finden also für den Gradienten in den krummlinigen Koordinaten die Darstellung

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_{q_1} \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \vec{e}_{q_2} \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \vec{e}_{q_3} \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} . \quad (1.130)$$

Angewandt auf die speziellen Skalare  $q_1, q_2$  und  $q_3$  folgt

$$\vec{\nabla}q_1 = \frac{\vec{e}_{q_1}}{h_1}, \quad \vec{\nabla}q_2 = \frac{\vec{e}_{q_2}}{h_2}, \quad \vec{\nabla}q_3 = \frac{\vec{e}_{q_3}}{h_3}, \quad (1.131)$$

wobei für den Betrag gilt

$$\left| \vec{\nabla}q_\nu \right| = \frac{1}{h_\nu}, \quad \nu = 1, 2, 3 . \quad (1.132)$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \vec{e}_{q_1} &= h_2h_3\vec{\nabla}q_2 \times \vec{\nabla}q_3, \\ \vec{e}_{q_2} &= h_3h_1\vec{\nabla}q_3 \times \vec{\nabla}q_1, \\ \vec{e}_{q_3} &= h_1h_2\vec{\nabla}q_1 \times \vec{\nabla}q_2. \end{aligned} \quad (1.133)$$

Beweis: Zum Beweis von (1.133) nutzen wir die Gleichungen (1.131):

$$h_2h_3\vec{\nabla}q_2 \times \vec{\nabla}q_3 = h_2h_3 \left( \frac{\vec{e}_{q_2}}{h_2} \times \frac{\vec{e}_{q_3}}{h_3} \right) = \vec{e}_{q_2} \times \vec{e}_{q_3} = \vec{e}_{q_1} .$$

Q.E.D.

### 1.11.3 Divergenz

Zur Berechnung von

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A} &= \vec{\nabla} \cdot (A_1\vec{e}_{q_1} + A_2\vec{e}_{q_2} + A_3\vec{e}_{q_3}) \\ &= \vec{\nabla} \cdot (A_1\vec{e}_{q_1}) + \vec{\nabla} \cdot (A_2\vec{e}_{q_2}) + \vec{\nabla} \cdot (A_3\vec{e}_{q_3}) \end{aligned}$$

## 1.11 Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinaten

benutzen wir die Darstellungen (1.133). Wir erhalten für

$$\vec{\nabla} \cdot (A_1 \vec{e}_{q_1}) = \vec{\nabla} \cdot (A_1 h_2 h_3 \vec{\nabla} q_2 \times \vec{\nabla} q_3) .$$

Mit der Produktregel (1.108) folgt

$$\vec{\nabla} \cdot (A_1 \vec{e}_{q_1}) = [\vec{\nabla} (A_1 h_2 h_3)] \cdot (\vec{\nabla} q_2 \times \vec{\nabla} q_3) + A_1 h_2 h_3 \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} q_2 \times \vec{\nabla} q_3) .$$

Der zweite Term in dieser Gleichung verschwindet, denn nach Anwendung der Produktregel (1.109) gilt

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} q_2 \times \vec{\nabla} q_3) = \vec{\nabla} q_3 \cdot \text{rot grad } q_2 - \vec{\nabla} q_2 \cdot \text{rot grad } q_3 = 0$$

gemäß Gleichung (1.116). Es verbleibt unter Ausnutzung von (1.131)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (A_1 \vec{e}_{q_1}) &= [\vec{\nabla} (A_1 h_2 h_3)] \cdot (\vec{\nabla} q_2 \times \vec{\nabla} q_3) \\ &= [\vec{\nabla} (A_1 h_2 h_3)] \cdot \left( \frac{\vec{e}_{q_2}}{h_2} \times \frac{\vec{e}_{q_3}}{h_3} \right) \\ &= [\vec{\nabla} (A_1 h_2 h_3)] \cdot \frac{\vec{e}_{q_1}}{h_2 h_3} . \end{aligned}$$

Jetzt benutzen wir die Darstellung (1.130) für  $\text{grad } (A_1 h_2 h_3)$  und erhalten aufgrund der Orthogonalitätsrelation (1.122)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (A_1 \vec{e}_{q_1}) &= \left[ \vec{e}_{q_1} \frac{1}{h_1} \frac{\partial (A_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \vec{e}_{q_2} \frac{1}{h_2} \frac{\partial (A_1 h_2 h_3)}{\partial q_2} + \vec{e}_{q_3} \frac{1}{h_3} \frac{\partial (A_1 h_2 h_3)}{\partial q_3} \right] \cdot \frac{\vec{e}_{q_1}}{h_2 h_3} \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 h_2 h_3) . \end{aligned} \quad (1.134)$$

Ebenso berechnen wir

$$\vec{\nabla} \cdot (A_2 \vec{e}_{q_2}) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_2} (A_2 h_1 h_3)$$

und

$$\vec{\nabla} \cdot (A_3 \vec{e}_{q_3}) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} (A_3 h_1 h_2) ,$$

so dass

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (A_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (A_3 h_1 h_2) \right] . \quad (1.135)$$

### 1.11.4 Rotation

Zur Berechnung von

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \times (A_1 \vec{e}_{q_1} + A_2 \vec{e}_{q_2} + A_3 \vec{e}_{q_3}) = \vec{\nabla} \times (A_1 \vec{e}_{q_1}) + \vec{\nabla} \times (A_2 \vec{e}_{q_2}) + \vec{\nabla} \times (A_3 \vec{e}_{q_3})$$

## 1 Vektorrechnung

benutzen wir die Darstellungen (1.131). Wir erhalten für

$$\vec{\nabla} \times (A_1 \vec{e}_{q_1}) = \vec{\nabla} \times (A_1 h_1 \vec{\nabla} q_1) = \vec{\nabla} (A_1 h_1) \times \vec{\nabla} q_1 + A_1 h_1 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} q_1 ,$$

wobei wir die Produktregel (1.110) nutzen. Der zweite Term in dieser Gleichung verschwindet gemäß Gleichung (1.116) und mit Gleichung (1.131) folgt

$$\vec{\nabla} \times (A_1 \vec{e}_{q_1}) = \vec{\nabla} (A_1 h_1) \times \frac{\vec{e}_{q_1}}{h_1} .$$

Jetzt benutzen wir die Darstellung (1.130) für  $\text{grad} (A_1 h_1)$  und erhalten

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (A_1 \vec{e}_{q_1}) &= \left[ \vec{e}_{q_1} \frac{1}{h_1} \frac{\partial (A_1 h_1)}{\partial q_1} + \vec{e}_{q_2} \frac{1}{h_2} \frac{\partial (A_1 h_1)}{\partial q_2} + \vec{e}_{q_3} \frac{1}{h_3} \frac{\partial (A_1 h_1)}{\partial q_3} \right] \times \frac{\vec{e}_{q_1}}{h_1} \\ &= \frac{\vec{e}_{q_2}}{h_1 h_3} \frac{\partial (A_1 h_1)}{\partial q_3} - \frac{\vec{e}_{q_3}}{h_1 h_2} \frac{\partial (A_1 h_1)}{\partial q_2} . \end{aligned} \quad (1.136)$$

Ebenso verfahren wir mit  $\vec{\nabla} \times (A_2 \vec{e}_{q_2})$  und  $\vec{\nabla} \times (A_3 \vec{e}_{q_3})$  und erhalten

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{A} &= \frac{\vec{e}_{q_1}}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_2} (A_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (A_2 h_2) \right] + \frac{\vec{e}_{q_2}}{h_1 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_3} (A_1 h_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (A_3 h_3) \right] \\ &\quad + \frac{\vec{e}_{q_3}}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (A_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (A_1 h_1) \right] \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{e}_{q_1} & h_2 \vec{e}_{q_2} & h_3 \vec{e}_{q_3} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ A_1 h_1 & A_2 h_2 & A_3 h_3 \end{vmatrix} . \end{aligned} \quad (1.137)$$

### 1.11.5 Laplace-Operator

Mit Gleichung (1.115) und der Gradientendarstellung (1.130) gilt für den Laplace-Operator

$$\Delta \psi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \psi) = \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{e}_{q_1}}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \frac{\vec{e}_{q_2}}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} + \frac{\vec{e}_{q_3}}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_3} \right) . \quad (1.138)$$

Die Anwendung der Divergenzdarstellung (1.135) für

$$A_\nu = \frac{1}{h_\nu} \frac{\partial \psi}{\partial q_\nu}$$

ergibt dann

$$\Delta \psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_3} \right) \right] . \quad (1.139)$$

Nach diesen allgemeinen Herleitungen betrachten wir nun als Beispiel Kugelkoordinaten.

### 1.11.6 Beispiel: Kugelkoordinaten

Mit Kugelkoordinaten  $(r, \theta, \phi)$  gilt für den Ortsvektor

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = r \sin \theta \cos \phi \vec{e}_1 + r \sin \theta \sin \phi \vec{e}_2 + r \cos \theta \vec{e}_3 = \vec{r}(r, \theta, \phi) , \quad (1.140)$$

mit  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  und  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Als neue Koordinaten wählen wir also  $q_1 = r$ ,  $q_2 = \theta$  und  $q_3 = \phi$ .

Zur Berechnung der neuen Einheitsvektoren (1.120) und Skalenfaktoren (1.121) benötigen wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} &= (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) , \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} &= r (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta) \\ \text{und} \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} &= r (-\sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi, 0) , \end{aligned}$$

$$\text{so dass} \quad h_1 = h_r = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| = 1 ,$$

$$h_2 = h_\theta = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| = r ,$$

$$h_3 = h_\phi = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right| = r \sin \theta \quad (1.141)$$

$$\text{und} \quad \vec{e}_{q_1} = \vec{e}_r = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) ,$$

$$\vec{e}_{q_2} = \vec{e}_\theta = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta) ,$$

$$\vec{e}_{q_3} = \vec{e}_\phi = (-\sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi, 0) . \quad (1.142)$$

Durch Einsetzen dieser Ergebnisse in den allgemeinen Ausdruck (1.130) erhalten wir für den Gradienten in Kugelkoordinaten

$$\vec{\nabla} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \vec{e}_\phi . \quad (1.143)$$

Gemäß Gleichung (1.135) ergibt sich für die Divergenz in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (A_r r^2 \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta r \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \phi} (A_\phi r) \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (A_r r^2) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (A_\phi) , \quad (1.144) \end{aligned}$$

## 1 Vektorrechnung

während Gleichung (1.137) für die Rotation in Kugelkoordinaten auf

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \vec{A} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & r \sin \theta \vec{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & A_\theta r & A_\phi r \sin \theta \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi r \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \phi} (A_\theta r) \right) e_r \right. \\
 &\quad + \left( \frac{\partial}{\partial \phi} (A_r) - \frac{\partial}{\partial r} (A_\phi r \sin \theta) \right) r\vec{e}_\theta \\
 &\quad \left. + \left( \frac{\partial}{\partial r} (A_\theta r) - \frac{\partial}{\partial \theta} (A_r) \right) r \sin \theta \vec{e}_\phi \right] \quad (1.145)
 \end{aligned}$$

führt.

Gemäß Gleichung (1.139) erhalten wir für den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}
 \Delta \psi &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2}. \quad (1.146)
 \end{aligned}$$

### Übungsaufgaben:

**(A1.11.1)** Berechnen Sie den Gradienten, die Divergenz, die Rotation und den Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten.

**(A1.11.2)** Berechnen Sie den Gradienten, die Divergenz, die Rotation und den Laplace-Operator in parabolischen Zylinderkoordinaten.

## 2 Newtonsche Mechanik

Die klassische Mechanik stellt zugleich den Beginn und die Grundlage nicht nur der heutigen Physik, sondern in hohem Maße der modernen Naturwissenschaft überhaupt dar. Begründet wird sie durch ein Buch, das durch seine Folgen die Welt wohl stärker verändert hat als das *Neue Testament*, der *Koran* oder *Das Kapital* von Marx. Dieses Buch erschien 1687 in Cambridge, England:

**Isaac Newton: Philosophiae Naturalis Principia Mathematica.**

Um die Bedeutung dieser Neuerung einzuschätzen, ist es sinnvoll, sich mit den vorhergehenden Anschauungen zu beschäftigen.

### 2.1 Das Physikalische Weltbild vor und nach Newton\*

Das ursprüngliche Weltbild ist in allen Kulturen ein magisch-religiöses. Die Vorgänge in der Natur, also in der den Menschen umgebenden Welt, werden gedeutet als Folgen bewusster Handlungen übernatürlicher Wesen: Götter, Geister, Dämonen. Die "Wissenden" sind daher Priester, auch wenn die Naturbeobachtung, wie in Babylon, schon quantitativ ist. Raum und Zeit haben eine absolute Bedeutung. Die Welt ist flach und begrenzt. Das Zentrum der eigenen Kultur ist zugleich auch das der Welt, sei es nun Ägypten, Babylon, Rom oder China (das "Reich der Mitte"). Darüber wölbt sich die recht flache Scheibe des Himmels, die am Weltrand aufliegt. Quantitative Angaben, soweit sie überhaupt gemacht werden, sind rein spekulativ. Der Raum ist also inhomogen, zugleich aber auch anisotrop: "oben" und "unten" sind absolute Kategorien. Auch die Zeit ist im Allgemeinen absolut und inhomogen: Sie hat einen Anfang und ein Ende.

Zu einem völligen Umbruch, der einen fast an das Auftreten einer neuen Menschenart glauben lassen könnte, und damit zum Beginn dessen, was wir heute Naturwissenschaft nennen, kommt es um das Jahr 700 vor Christus herum mit dem Auftreten der griechischen Naturphilosophen, die eine ganz neue Haltung gegenüber der Welt einnehmen. Bezeichnenderweise sind sie keine Priester, sondern praktisch tätige, weitgereiste und weitgehend vorurteilsfreie Männer. Sie stellen sich bewusst als Subjekt der Natur als Objekt gegenüber, betrachten die Welt gewissermaßen von außen. Das Naturgeschehen ist für sie nicht eine Folge willkürlicher Akte übernatürlicher Wesen, sondern von inneren Gesetzmäßigkeiten beherrscht, die der Mensch mit seiner Vernunft erkennen kann. Ihr Weltbild ist also rational, aber anders als unser heutiges nicht kausal, sondern final, teleologisch. Das Weltgeschehen hat für sie einen Zweck, einen Sinn. Es wird beherrscht durch universelle Entwicklungs- und Ordnungsprinzipien ("Kosmos").

---

\*Dieser Abschnitt ist der Vorlesung meines verehrten Lehrers Prof. Dr. Dieter Schlüter, Universität Kiel, entnommen.

## 2 Newtonsche Mechanik

Zusammengefasst und in einem gewissen Sinn abgeschlossen wird diese idealistische Naturphilosophie durch das Werk von Aristoteles, dessen Weltbild erst durch das von Newton begründete abgelöst wurde. Danach ist die Welt im Wesentlichen kugelförmig, hat ein Zentrum und eine äußere Berandung, die Fixsternsphäre. Außerhalb ihrer befindet sich nichts, auch kein leerer Raum, der als denkunmöglich angesehen wird. Der Raum ist also nach wie vor inhomogen und anisotrop. Es gibt eine Vorzugsrichtung, hin zum Weltmittelpunkt, aber um diese Welt herum ist die Welt im Wesentlichen isotrop. Die Begriffe "oben" und "unten" sind also relativ. Das Universum war schon immer und wird immer sein. Die Zeit hat weder einen Anfang noch ein Ende, sie ist absolut, aber homogen.

Die Welt zerfällt in zwei Teile, den irdischen und den himmlischen, die aber beide rational betrachtet werden. Die quantitative Beschreibung von Bewegungen in Raum und Zeit (Kinematik) ist für beide die gleiche, insbesondere gelten auch im himmlischen Bereich die Gesetze der Geometrie, verschieden ist die Erklärung der Ursachen der Bewegung (Dynamik). Im heutigen Verständnis bilden Kinematik und Dynamik zusammen die Mechanik, für Aristoteles bleiben sie getrennt. Wegen ihres quantitativen geometrischen Charakters zählt für ihn – und bis in die Zeit von Kepler – die Kinematik zur Mathematik, die nicht-quantitative Dynamik und die damit zusammenhängende Struktur der Materie zur Physik.

Diese Struktur ist nun in beiden Teilen der Welt wesentlich verschieden. Die irdische Materie ist aus vier Elementen (Erde, Wasser, Luft, Feuer) aufgebaut und hat, je nach ihrer Zusammensetzung, Anteil an deren Eigenschaften. Sie ist zum Beispiel absolut schwer oder leicht, dabei ist "leicht" nicht ein geringerer Grad von "schwer", sondern ihm entgegengesetzt. Es gibt keine Bewegung ohne Beweger. Schwere Körper streben auf Grund einer inneren oder "lebendigen" Kraft zum Weltmittelpunkt. Ihre freie Bewegung ist also stets abwärts gerichtet, sie suchen dort ihren "natürlichen Ort". Sie fallen umso schneller, je schwerer sie sind. Umgekehrt strebt absolute leichte Materie stets aufwärts und steigt äußerstenfalls bis zur inneren Begrenzung des Himmels, der Sphäre des Mondes, auf. Jede seitliche Bewegung eines Körpers muss dagegen erzwungen werden durch eine äußere oder "tote" Kraft und hört ohne Antrieb auf. Die irdische oder sublunare Welt ist unvollkommen und ständigem Wandel unterworfen. Im Gegensatz dazu besteht die himmlische Materie aus dem fünften Grundstoff, der schwerelosen "quinta essentia". Sie ist vollkommen und unwandelbar. Das gleiche gilt von ihrer Bewegung. Diese erfolgt daher gleichmäßig in Kreisen und auf Kugelschalen um den Weltmittelpunkt herum.

Die Erde ist kugelförmig und, wie Aristoteles sagt, "nicht sehr groß". Eratosthenes hat auf geistreiche Weise (Brunnen von Syene) ihren Umfang zu 252.000 Stadien gemessen. Da die Länge eines Stadions nicht einheitlich festgelegt war, kann man bei entsprechender Auswahl zu einem Wert des Erdumfangs von 39.690 km kommen, der fast exakt mit dem modernen Wert von 40.075 km übereinstimmt, realistisch dürfte eine Genauigkeit von etwa zehn Prozent sein. Keine andere Kultur, unabhängig von der griechischen, ist zu dieser umwälzenden Erkenntnis fähig gewesen. Da der Erdkörper aus schwerer Materie besteht, fällt sein Mittelpunkt mit dem der Welt zusammen, nicht umgekehrt! Die Himmelskörper sind ebenfalls Kugeln mit messbaren Radien. Die Phasen des Mondes und Mond- und Sonnenfinsternisse werden geometrisch als Beleuchtungs- und Schatteneffekte gedeutet und zur Bestimmung von Radien und Entfernungen benutzt, wiederum eine einzig darstehende Leistung der Griechen. Wegen der unzureichenden Messgenauigkeit werden allerdings Radius und Entfernung

## 2.1 Das Physikalische Weltbild vor und nach Newton<sup>†</sup>

der Sonne und damit die Dimension des Sonnensystems um einen Faktor 25 unterschätzt. Zur Physik des Aristoteles gibt es in der griechischen Naturphilosophie durchaus Gegenmeinungen. Nach Demokrit ist alle Materie aus verschiedenen Arten von nicht weiter zerlegbaren Teilchen, den Atomen, aufgebaut, die sich ziellos im unbegrenzten leeren Raum bewegen und bei Zusammenstößen wechselwirken. Das Naturgeschehen verläuft also kausal, nicht final. Dieses rational-materialistische Weltbild steht im scharfen Gegensatz zu dem rational-idealistischen des Aristoteles und gilt sogar bei den sehr freigeistigen Griechen als atheistisch. Ebenfalls im Gegensatz zu Aristoteles steht die viel später von Kopernikus wieder aufgenommene Lehre des Aristarch von Samos, dass sich die Erde bewegt. Da diese konkurrierenden Auffassungen rein spekulativ sind und keine Stütze in damals bekannten Naturerscheinungen finden, bleiben sie in einer Außenseiterrolle. Das ist nicht der Fall mit den kinematischen Theorien von Hipparch und Ptolemäus. Die sehr genauen astronomischen Beobachtungen zeigen, dass die Bewegung der Himmelskörper, speziell der Sonne, um die Erde und damit um den Weltmittelpunkt herum keine gleichförmige Kreisbewegung sein kann. Um die Beobachtungen darzustellen, "die Phänomene zu retten", werden exzentrische Kreise und Bewegungsmittelpunkte oder Epizykel verwendet, was notwendigerweise die Veränderung des Abstandes vom Weltmittelpunkt zur Folge hat. Dieser Widerspruch zur Theorie des Aristoteles wird zwar gesehen, aber nicht ernst genommen, da man die Bahnen ohnehin nur als mathematische Konstruktionen betrachtet. Ihren Höhepunkt erreicht diese Kinematik der Himmelskörper um das Jahr 150 herum im zusammenfassenden Werk "matematike syntaxis" des Ptolemäus, woraus die Zeitgenossen zunächst "megale syntaxis", dann sogar "megiste syntaxis" machen. Bei der Übersetzung ins Arabische wird daraus "al magisti" und schließlich bei der Übertragung ins Lateinische "almagestum". Zwischen der "syntaxis" und dem "Almagest" liegt ein Jahrtausend ohne nennenswerten Fortschritt. Das ist im Wesentlichen darauf zurückzuführen, dass sich im niedergehenden römischen Reich, etwa ab dem Jahr 300, eine weltabgewandte, wissenschaftsfeindliche und extrem intolerante Ideologie durchsetzt und im Jahr 394 zur Staatsreligion wird: Das fundamentalistische Christentum. Für die geistigen Führer dieser Bewegung, die Kirchenväter, insbesondere Lactantius, Augustinus und Hieronymus, handelt es sich bei der griechischen Naturwissenschaft um die "törichte Weisheit der heidnischen Philosophen", die sowohl dem gesunden Menschenverstand, als auch, und das ist entscheidend, der "Heiligen Schrift" widerspricht. Insbesondere können sie sich nicht von der Vorstellung eines absoluten "oben" und "unten" lösen. Sie stellen dem ein eigenes Weltbild entgegen, das aus Bibelstellen begründet wird und seine Zusammenfassung um 500 herum in der "Topographia Christiana", der christlichen Weltbeschreibung des Cosmas Indicopleustes, findet. Danach ist die Erde flach und viereckig. Die Welt ähnelt einer Truhe, deren gewölbter Deckel einerseits die "Wasser über der Feste" enthält und andererseits den Wohnsitz der himmlischen Heerscharen bildet. Sonne, Mond und Sterne werden von Engeln herumgetragen, und das Dunkel der Nacht entsteht dadurch, dass die Sonne sich hinter einem hohen Berg im Norden befindet. Es handelt sich also um eine primitive Version des tausend Jahre älteren babylonischen Weltbildes. Gleichzeitig wird, besonders im weströmischen Reich, die philosophische und wissenschaftliche Literatur der Antike bis auf ein paar Werke lateinischer Kompilatoren fast vollständig vernichtet. Es beginnt im Jahr 391 mit der Niederbrennung des Museion, der weltberühmten Bibliothek von Alexandria, an der unter anderen Eratosthenes und Ptolemäus gewirkt haben, und führt

## 2 Newtonsche Mechanik

dazu, dass um das Jahr 700 im gesamten Abendland weder die Werke von Aristoteles und Ptolemäus noch die von Euklid und Apollonius oder Hippokrates und Galenus mehr zu finden sind.

Dass das Erbe der antiken Kultur nicht unwiederbringlich verloren ist, verdanken wir dem Auftreten einer konkurrierenden Ideologie, des Islam, der zwar ähnlich intolerant, aber nicht in gleichem Maße mystisch-irrational eingestellt ist. Ab dem Jahr 700 beginnen die Kalifen Al Mansur, Harun al Raschid und Al Mamun in Bagdad mit dem systematischen Sammeln aller Reste der griechischen Wissenschaft; dabei wird insbesondere der *Almagest* auf dem Umweg über das Syrische ins Arabische übersetzt und intensiv studiert.

Ab der Mitte des 10. Jahrhunderts setzt sich auch im Abendland durch den Kontakt mit der arabischen Welt die Lehre von der Kugelgestalt der Erde wieder durch, und von 1100 bis 1300 werden die Werke von Aristoteles, Euklid und Ptolemäus neben vielen anderen aus dem Arabischen ins Lateinische übersetzt. Es kommt zu einer Wiedergeburt – „Renaissance“ – der antiken Kultur. Auf die Herabwürdigung folgt eine kritiklose Überschätzung insbesondere der Schriften des Aristoteles, zunächst der über die Logik, dann der über Naturphilosophie. „Der Philosoph“ wird zur unumstrittenen Autorität in allen außer Glaubensfragen. Sein Weltbild wird nur insofern modifiziert, als jetzt außerhalb der Fixsternsphäre der Wohnsitz Gottes und der Engel, innerhalb der Erde die Hölle angesiedelt wird.

In den folgenden zwei Jahrhunderten kommt es aber auch gerade durch die Beschäftigung mit der aristotelischen Logik zur Kritik an den Einzelheiten seiner Naturphilosophie. Nikolaus von Kues erörtert z.B. spekulativ-philosophisch die Möglichkeit eines unendlich ausgedehnten Raumes ohne Mittelpunkt und Berandung. Im Besonderen ist Gegenstand der Kritik aber die Lehre von der Wurfbewegung, die schon im Altertum als nicht sehr überzeugend angesehen wurde. Dazu trägt unter anderem auch die Entwicklung der Artillerie nach der Erfindung des Schießpulvers bei. Im 17. Jahrhundert wird schließlich die These von der Unmöglichkeit eines leeren Raumes („horror vacui“) von Torricelli und von Guericke widerlegt, was zur Neubewertung des Atomismus führt.

Noch wichtiger sind die Entwicklungen in der Kinematik der Himmelskörper. Um 1500 greift Kopernikus die Lehre von der Bewegung der Erde wieder auf, nimmt die Sonne als im Weltzentrum befindlich an und ersetzt die Rotation der Fixsternsphäre durch die der Erde. Obwohl das neue Weltbild dem alten kinematisch fast völlig äquivalent ist und auch für die Positionsberechnungen keine wesentliche Verbesserung darstellt, sind seine dynamischen Konsequenzen revolutionär. Die Erde verliert ihre Sonderstellung und wird ein Planet unter anderen. Die Fixsterne müssen nicht mehr von einer Sphäre getragen werden und brauchen daher auch nicht im gleichen Abstand zum Mittelpunkt zu stehen, sondern können im Raum verteilt sein. Im noch stärkeren Gegensatz zum antiken Weltbild stehen die Keplerschen Gesetze, wonach die relativen Bewegungen der Himmelskörper nicht aus gleichförmigen Kreisbewegungen, sondern aus ungleichförmig durchlaufenen Ellipsen zusammengesetzt sind. Gleichzeitig, also zu Beginn des 17. Jahrhunderts, widerlegt Galilei sowohl durch seine quantitativen Fallversuche als auch durch seine Beobachtungen mit dem Teleskop (Berge auf dem Mond) das Dogma vom grundsätzlichen Unterschied zwischen himmlischer und irdischer Materie. Er gibt auch die Trennung zwischen Kinematik und Dynamik auf: „Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben“.

Die Kirche fühlt, durchaus nicht ohne Grund, die Basis ihrer Anschauungen bedroht und

## 2.1 Das Physikalische Weltbild vor und nach Newton<sup>‡</sup>

versucht mit Hilfe der Inquisition die neuen Erkenntnisse zu unterdrücken, aber erfolglos. Schon 12 Jahre nach dem Prozess gegen Galilei (1633) kommt es in London zur Gründung einer Vorläuferin der späteren Royal Society. Hier nimmt auch die Trennung der beiden Kulturen, wie C. P. Snow sie später genannt hat, – nämlich der literarisch-philosophischen und der naturwissenschaftlich-technischen – ihren Anfang, denn das Programm der Royal Society ist: “To improve the knowledge of natural things, and all useful Arts, Manufactures, Mechanick Practices, Engynes and Inventions by Experiments (not meddling with Divinity, Metaphysics, Moralls, Politicks, Grammar, Rhetorick or Logicks)”. Im Jahr 1672 wird der 1642 – also im Todesjahr Galileis – geborene Isaac Newton Fellow und 1703 Präsident dieser Gesellschaft. Ihr langjähriger Sekretär Edmund Halley bringt ihn mit vieler Mühe 1687 dazu, die “Principia” auf Kosten der Gesellschaft zu veröffentlichen. Die Wirkung auf seine Zeitgenossen geben die Verse von Alexander Pope wieder:

“Nature and Nature’s Laws, Lay hid in Night, God said: Let Newton be!, And all was Light.”

Damit ist das neue Weltbild weitgehend vollendet und bildet eine Grundlage des folgenden Jahrhunderts der Aufklärung. Auf dem Kontinent werden Newtons Arbeiten nach 1738 populär durch die “Elemens de la philosophie de Newton” von Voltaire und Emilie du Chatelet, die später auch die “Principia” ins Französische übersetzt. Es folgt, hauptsächlich in Frankreich und der Schweiz, eine stürmische Entwicklung der theoretischen Mechanik und ihrer analytischen Grundlagen durch eine Reihe genialer Mathematiker: die Bernoullis, Leibniz, Euler, Clairaut, d’Alembert, Lagrange, Laplace, Legendre. Sie tragen wesentlich zur Entwicklung eines mechanistisch-rationalistischen Weltbildes bei, einer der Grundlagen der französischen Revolution. Zu einer kurzlebigen Gegenreaktion kommt es um 1800 mit der “romantischen Physik”, der spekulativen Naturphilosophie der Vertreter des deutschen Idealismus, insbesondere Hegel, die aber eher ein Kuriosum bleibt. Gleichzeitig wird die analytische Mechanik weiterentwickelt durch Gauß, Jacobi und Hamilton und erreicht einen gewissen Abschluss um 1900 herum mit den Arbeiten von Poincare, die schon in Verbindung mit der speziellen Relativitätstheorie einerseits und dem Stabilitätsverhalten nichtlinearer Systeme (Chaos-Theorie) andererseits stehen.

Die wissenschaftliche Methode Newtons, die bis heute die der Naturwissenschaft geblieben ist, unterscheidet sich grundlegend von der der idealistischen Naturphilosophie, sowohl seines Vorgängers Aristoteles, als auch seines Zeitgenossen Descartes und seines Nachfolgers Hegel. Während diese der Meinung waren, die Naturgesetze durch reines Denken aus allgemeinen metaphysischen Grundsätzen logisch ableiten zu können, ist für Newton die Erfahrung, sowohl die zufällige, als auch die durch systematische Experimente gewonnene, die einzige Quelle naturwissenschaftlicher Erkenntnisse. Eine Erklärung aus philosophischen Prinzipien lehnt er ab: “Hypotheses non fingo”. Seine induktive-deduktive Methode besteht darin, zunächst aus gesammelten Erfahrungen induktiv auf Gesetzmäßigkeiten zu schließen. Aus ihrer Annahme werden dann weitere Phänomene vorhergesagt und die Theorie im Experiment überprüft. Bei einer Falsifikation muss sie aufgegeben oder modifiziert werden.

Gegenstand der Physik sind ausschließlich Erscheinungen, die sich zumindest prinzipiell messen lassen. Physikalische Größen werden durch Messprozesse definiert, nicht verbal (“Wortgeklingel”), wie etwa in der Naturphilosophie von Hegel und Schelling. Da die Erfahrungen als Ergebnisse von Messungen in der Regel als Zahlen vorliegen, sind die Gesetzmäßigkeiten in der physikalischen Theorie notwendig mathematische Beziehungen, aus denen ebenfalls

quantitative Vorhersagen abgeleitet werden. Die Welt der Erfahrungen wird so auf eine mathematische Modellwelt abgebildet, an die als einzige Bedingung die der logischen Konsistenz gestellt wird. Sie braucht nicht "höheren Prinzipien" oder dem "gesunden Menschenverstand" zu genügen, sofern sie nur in der Lage ist, die Gesamtheit der Erfahrungen im Rahmen der Messgenauigkeit zu reproduzieren.

### 2.2 Die Newtonschen Axiome

Für Newton bilden Kinematik und Dynamik – im Gegensatz zu Aristoteles, aber in Übereinstimmung mit Galilei – eine Einheit: die quantitative, also mathematisierte, Mechanik. Er baut sie nach dem Muster der "Elemente" des Euklid ("more geometrico") auf, geht also aus von einer Reihe von Begriffserklärungen (Scholien) und Axiomen (Bewegungsgesetze). Diese folgen letztlich induktiv aus der Erfahrung, dem Experiment, und nicht aus metaphysischen Überlegungen. Sie werden bestätigt (oder falsifiziert), indem aus ihnen deduktiv Voraussagen hergeleitet und mit weiteren Experimenten verglichen werden.

Newton beginnt mit Aussagen über Raum und Zeit (Kinematik):

1. Der absolute Raum ist leer, unendlich ausgedehnt, homogen und isotrop. In seinen Worten: "Der absolute Raum bleibt vermöge seiner Natur und ohne eine Beziehung zu einem äußeren Gegenstand stets gleich und unbeweglich". Durch die Einführung eines Koordinatensystems werden den Raumpunkten – letztlich durch Messungen mit Maßstäben – Zahlentripel  $\vec{r}$  zugeordnet. Der Raum wird dadurch auf ein mathematisches Objekt, einen dreidimensionalen affinen Vektorraum  $\mathbb{R}^3$ , abgebildet.
2. Die absolute Zeit ist homogen. In seinen Worten: "Die absolute, wahre und mathematische Zeit verfließt an sich und vermöge ihrer Natur gleichförmig und ohne Beziehung zu einem äußeren Gegenstand." Das bedeutet, dass die Zeit in allen Koordinatensystemen gleich und invariant ist.

Durch Messungen mit Uhren werden den Zeitpunkten die Elemente  $t$  eines eindimensionalen Raumes  $\mathbb{R}^1$  zugeordnet und damit den Ereignissen  $(\vec{r}, t)$  das Kroneckerprodukt in  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^1$ . Die Eigenschaften von Raum und Zeit selbst sind auf diese Weise grundsätzlich Gegenstand von Experimenten (Messungen) und somit der Erfahrung und – im Gegensatz etwa zur Auffassung von Kant – keine a-priori-Kategorien.

Es folgen drei Axiome über die Bewegung materieller Körper und ihre Ursachen (Dynamik):

- Lex I: das Trägheitsgesetz,
- Lex II: die dynamische Grundgleichung, und
- Lex III: das Wechselwirkungsgesetz.

#### 2.2.1 Das Trägheitsgesetz

Materielle Objekte sind aus Massenpunkten, von Newton "Körper" genannt, aufgebaut, die in vielen Eigenschaften mit den Atomen von Demokrit übereinstimmen, aber von beliebiger Größe und Form sein können. Sie haben einen wohldefinierten Ort, beschrieben durch

einen Ortsvektor  $\vec{r}(t)$ . Die Ursache für ihre Bewegung ist nicht final, sondern kausal. Sie agieren nicht auf Grund eines inneren Bestrebens, wie bei Aristoteles, sondern reagieren nur auf äußere Einwirkungen, von Newton "Kräfte" genannt, die letztlich von anderen Körpern ausgeübt werden, sind also "träge" (inert). Im völligen Gegensatz zur aristotelischen Physik können sie sich aber auch ohne Bewegung bewegen:

**LEX I: Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.**

### 2.2.2 Das Kraftwirkungsgesetz

Liegt eine solche Einwirkung vor, dann wird durch sie primär nicht der Ort verändert – das geschieht ja auch bei der geradlinig-gleichförmigen Bewegung – sondern die Geschwindigkeit. Während alle Vorgänger, auch Demokrit, davon ausgingen, dass eine Kraft auf einen Körper nur bei direktem Kontakt wirken kann, nimmt Newton an, dass die Kraftwirkung wie beim Magnetismus durch den leeren Raum hindurch erfolgt (Fernkraft, "action at a distance"). Sie muss daher momentan vor sich gehen. Die entsprechende Geschwindigkeitsänderung geschieht nicht sprungweise, wie zum Beispiel bei einzelnen Stößen, deren Wahrscheinlichkeit für punktförmige Körper ohnehin verschwindend klein ist, sondern kontinuierlich. Eine solche veränderliche Geschwindigkeit kann exakt nur durch einen Grenzwertprozess definiert werden, nämlich als Differentialquotient

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} . \quad (2.1)$$

Zur Formulierung der Newtonschen Theorie sind deshalb die Infinitesimalrechnung und vektorielle Differentialoperatoren (siehe Kap. 1.9) erforderlich, was einerseits mathematischen Laien den Zugang sehr erschwert, und andererseits die mathematischen Betrachtungen von Kapitel 1 nachträglich rechtfertigt.

Wie die experimentelle Erfahrung zeigt, ist bei gleicher äußerer Einwirkung die Geschwindigkeitsänderung für verschiedene Massenpunkte unterschiedlich. Newton schreibt deshalb den Körpern eine invariante innere Eigenschaft zu: die träge Masse  $m$ . Er definiert sie als "Menge der Materie" oder als Produkt von Volumen und Dichte. Das ist zunächst eine Zirkeldefinition und keine Messvorschrift. Sie erhält einen Sinn, wenn man bedenkt, dass vom atomistischen Standpunkt aus jeder Körper aus einer bestimmten Anzahl gleichartiger Elementarteilchen aufgebaut ist. Die Masse ist dann proportional zu dieser Anzahl. Je größer die Masse  $m$  eines Körpers ist, desto kleiner fällt die durch die gegebene Einwirkung  $\vec{F}$  erzeugte Geschwindigkeitsänderung aus. Es gilt also

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F} . \quad (2.2)$$

Mit der Bewegungsgröße  $m\vec{v} = \vec{p}$ , die als "Impuls", "Linearimpuls" oder "linearer Impuls" bezeichnet wird, lautet dann das für die Newtonsche Mechanik grundlegende Kraftwirkungsgesetz, die dynamische Grundgleichung:

**LEX II: Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.**

## 2 Newtonsche Mechanik

Da nach Newton die Masse eines Körpers als invariante Größe  $m = \text{const.}$  betrachtet wird, kann man die Änderung des Linearimpulses durch die Beschleunigung  $\vec{a}$  ersetzen:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\vec{a}, \quad (2.3)$$

d.h. die Beschleunigung  $\vec{a}$  eines Massenpunktes ist der auf ihn einwirkenden Kraft direkt proportional und fällt mit der Richtung der Kraft zusammen.

Die auf den Körper von den umgebenden Objekten ausgeübte Kraft kann nur von seinem relativen Ort  $\vec{r}$  und seiner relativen Geschwindigkeit  $\vec{v}$  in Bezug auf diese Umgebung abhängen, da der leere Raum einerseits homogen ist und andererseits nicht selbst auf den Körper einwirken kann. Es gilt daher

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \left( \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t \right). \quad (2.4)$$

Wenn also der Ort  $\vec{r}$  und die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  eines Körpers zu einem Zeitpunkt  $t$  gegeben sind, folgt daraus zwangsläufig zunächst die Änderung  $\Delta\vec{v}$  der Geschwindigkeit und damit die Änderung  $\Delta\vec{r}$  des Ortes im Zeitintervall  $\Delta t$ . Damit sind Ort und Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  gegeben. Dieses Verfahren kann unbegrenzt fortgesetzt werden. Die Bahn  $\vec{r}(t)$  ist also durch die kausale Wechselwirkung  $\vec{F}$  und die Anfangswerte  $\vec{r}_0$  und  $\vec{v}_0$  für alle Zeiten eindeutig festgelegt, determiniert. Die Bewegungsgleichung hat eine völlig andere Bedeutung als etwa das Ohmsche Gesetz  $U = RI$ . Es handelt sich nicht um eine überprüfbare Beziehung zwischen zwei messbaren physikalischen Größen, sondern um eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung mit Randbedingungen, der die gesuchte Bahn  $\vec{r}(t)$  bei gegebener Wechselwirkung genügen muss. Sie ist also auch nicht etwa eine bloße Definitionsgleichung für  $\vec{F}$ . Die Unschärfe des Begriffs "Kraft", die noch dadurch verstärkt wird, dass dieses Wort umgangssprachlich in sehr verschiedener Bedeutung gebraucht wird (Muskelkraft, Ausdruckskraft, Manneskraft, Atomkraft usw.), spielt zwar bei der Anwendung der Bewegungsgleichung in konkreten Situationen keine Rolle, hat aber langwierige methodische und philosophische Diskussionen ausgelöst. In der Lagrange- und Hamilton-Formulierung der Mechanik wird der Begriff der Wechselwirkungskraft deshalb ersetzt durch den präzisen Begriff der Wechselwirkungsenergie.

### 2.2.3 Das Wechselwirkungsgesetz

Über die Natur der auf einen Körper einwirkenden Objekte wurde bisher keine Annahme gemacht. Entsprechend dem Newtonschen Weltbild muss es sich dabei natürlich um Aggregate von Massenpunkten handeln. Das einfachste physikalische System, in dem eine Einwirkung stattfindet, besteht daher aus zwei Körpern mit den Massen  $m_1$  und  $m_2$ . Wenn der Körper 2 auf den Körper 1 eine Kraft  $\vec{F}_{12}$  ausübt:

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{12}, \quad (2.5)$$

muss aus Symmetriegründen auch gelten

$$m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{21}. \quad (2.6)$$

Newton postuliert daher als drittes Axiom das Wechselwirkungsgesetz "actio = reactio":

**LEX III: Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich, oder die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.**

Dieses Reaktionsprinzip "actio = reactio" führt im vorliegenden Fall zu

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} . \quad (2.7)$$

Mit dem 2. Axiom folgt dann

$$\frac{d}{dt}\vec{p}_1 = m_1\vec{a}_1 = -\frac{d}{dt}\vec{p}_2 = -m_2\vec{a}_2 , \quad (2.8)$$

also

$$\frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|} = \frac{m_2}{m_1} . \quad (2.9)$$

Spezifiziert man  $m_1$  als Einheitsmasse und misst man das Verhältnis der Beschleunigungen, so lässt sich damit die Masse  $m_2$  des Körpers 2 bestimmen. Für diese Messung benötigt man Uhren und Messbänder und man muss ein geeignetes Koordinatensystem auswählen.

### 2.2.4 Das Äquivalenzprinzip

Häufig geschieht die Massenbestimmung durch Wiegen: In der durch das Gravitationsfeld ausgeübten Beschleunigung  $\vec{g}$  ist das Gewicht

$$\vec{W} = m_s\vec{g} , \quad (2.10)$$

gerade gleich der auf den Körper wirkenden Kraft

$$\vec{F} = m_t\vec{a} . \quad (2.11)$$

Gemäß des **Äquivalenz-Prinzips**  $m_s = m_t$  wird nun angenommen, dass die "schwere" Masse  $m_s$  in Gleichung (2.10) exakt gleich ist zur "trägen" Masse  $m_t$  im Kraftgesetz (2.11).

Die träge Masse (Inertialmasse)  $m_t$  ist gerade die Masse, die die Beschleunigung eines Körpers bei Wirkung einer gegebenen Kraft bestimmt. Die schwere Masse (Gravitationsmasse)  $m_s$  ist die Masse, die in das Gravitationsgesetz (2.10) eingeht, oder allgemeiner die Masse, die die Gravitationskräfte zwischen verschiedenen Körpern bestimmt. Bisherige Experimente (Galilei, Newton, Eötvös, Dicke u. a.) bestätigen das Äquivalenzprinzip zur Gleichheit von träger und schwerer Masse mit einer Genauigkeit von  $10^{-12}$ . Die europäische Weltraumorganisation ESA wird mit dem Satellitenexperiment *STEP* das Äquivalenzprinzip mit weit höherer Genauigkeit überprüfen.

### 2.2.5 Das Superpositionsprinzip der Kraftwirkungen

Die Überlegungen zum Wechselwirkungsgesetz von zwei Körpern lassen sich ohne Änderung auf den Fall von  $N$  wechselwirkenden Massenpunkten übertragen. Es muss dann gelten:

$$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki} . \quad (2.12)$$

## 2 Newtonsche Mechanik

Bei mehr als zwei Körpern entsteht das Problem der Überlagerung von mehreren gleichzeitigen Einwirkungen auf einen Massenpunkt. Dass die Kräfte Vektoren im physikalischen Sinn, also gegenüber Drehungen des Koordinatensystems im Raum invariante Größen (siehe Kap. 1.6) mit Richtung und Betrag sind, bedeutet nicht notwendig, dass sie auch einen linearen Vektorraum im mathematischen Sinn bilden. Ein Gegenbeispiel liefert die Darstellung durch "Drehvektoren", deren Richtung mit der Drehachse übereinstimmt und deren Betrag gleich dem Tangens des halben Drehwinkels ist, die wir später (Kap. 6.1) noch ausführlich betrachten werden. Da diese Drehungen, außer für infinitesimale Drehwinkel nicht miteinander kommutieren, erhält man den Drehvektor einer zusammengesetzten Drehung im Allgemeinen nicht durch Vektoraddition (Parallelogrammkonstruktion) aus den Drehvektoren der beiden Teildrehungen. In entsprechender Weise könnten sich auch Kräfte bei der Zusammensetzung gegenseitig beeinflussen. Die Bewegung unter dem Einfluss der resultierenden Kraft müsste nicht notwendig durch lineare Zusammensetzung der beiden Teilbewegungen entstehen. Nach Aristoteles stören sich sogar verschiedene Bewegungen grundsätzlich; ein Körper kann daher in jedem Augenblick nicht mehr als eine Bewegung ausführen. Von gleicher Bedeutung wie die ersten drei Axiome ist deshalb Newtons Zusatz zu den Bewegungssätzen:

**LEX IV: Wirken auf einen Körper zwei Kräfte gleichzeitig, so setzen sie sich zur Diagonale des Parallelogramms zusammen.**

Gemäß dieses Superpositionsprinzips der Kraftwirkungen (oder Prinzip der ungestörten Überlagerung) erzeugen Teilkräfte also unabhängige Teilbewegungen. Umgekehrt kann eine Kraft in beliebiger Weise in Komponenten zerlegt werden.

Für ein System von  $N$  Massenpunkten lauten die Bewegungsgleichungen dann

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j, \vec{v}_i - \vec{v}_j, t), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.13)$$

Das ist ein System von  $3N$  gekoppelten (simultanen) gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung. Mit den Anfangsbedingungen

$$\vec{r}_i(0) = \vec{r}_{i0}, \quad \vec{v}_i(0) = \vec{v}_{i0}$$

ergeben sich daraus nach dem Existenz- und Eindeigkeitssatz die vollständig determinierten Bahnen

$$\vec{r}_i = \vec{r}(\vec{r}_{i0}, \dots, \vec{r}_{iN}, \vec{v}_{i0}, \dots, \vec{v}_{iN}, t). \quad (2.14)$$

Wenn man sich auf den extremen Standpunkt des Demokrit ("Wirklich sind nur Atome und Leeres") stellt, dass die Welt ausschließlich aus einer sehr großen Anzahl wechselwirkender Massenpunkte aufgebaut ist, ließe das Geschehen in der Welt also wie ein Uhrwerk ab (mechanistisches Weltbild) und ließe zum Beispiel die Existenz eines freien Willens nicht zu. Die einzige, allerdings recht umfangreiche Aufgabe der Mechanik wäre dann die Integration dieses riesigen Systems von Differentialgleichungen.

Eine solche Behandlung der Welt als Ganzes ist natürlich unmöglich. Man zerlegt sie daher in einen Teil, für den man sich im Wesentlichen interessiert, das physikalische System, und den Rest, die Umgebung. Wenn zwischen beiden keine Wechselwirkung besteht, nennt man das System abgeschlossen. Seine zeitliche Entwicklung verläuft dann genauso, als ob es sich

allein im leeren Raum befände. Exakt ist dieser Fall natürlich nie realisiert. Wenn die Wechselwirkung mit der Umgebung nicht vernachlässigbar ist, kann man versuchen, das System durch Hinzunahme derjenigen Massenpunkte der Umgebung, mit denen es wechselwirkt, zu erweitern, aber auch dieses Verfahren ist nie exakt möglich und führt zudem im Allgemeinen zu einer wesentlichen Komplizierung. Häufig ist zwar eine erhebliche Einwirkung der Umgebung auf das System vorhanden, während die Rückwirkung des Systems auf die Umgebung vernachlässigt werden kann. Für das betrachtete System ist der umgebende Raum dann im Allgemeinen weder homogen noch isotrop und, da die Vorgänge in der Umgebung von ihm unbeeinflusst ablaufen, die Zeit nicht mehr homogen. Die Bewegungsgleichungen nehmen dann die Form an:

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j, \vec{v}_i - \vec{v}_j, t) + \vec{F}_i^{(e)}(\vec{r}_i, \vec{v}_i, t) . \quad (2.15)$$

Hier stellen die  $\vec{F}_i^{(e)}$  die einseitige Wechselwirkung mit der Umgebung (äußere Kräfte) dar.

### 2.2.6 Anmerkungen

Zunächst ist sofort einsichtig, dass das 1. Axiom als Spezialfall des 2. Axioms aufgefasst werden kann. Wenn  $\vec{F} = \vec{0}$  ist, dann ist  $m\vec{v} = \text{const.}$  und weil  $m$  unabhängig von  $\vec{v}$  ist, folgt  $\vec{v} = \text{const.}$

Hinsichtlich der Annahmen von Newton über

- (a) die Existenz der absoluten Zeit,
- (b) die Existenz des absoluten Raumes,
- (c) der Unabhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit und
- (d) der Aussage, dass die Masse eines abgeschlossenen Systems von Körpern unabhängig ist von den in diesem System ablaufenden Prozessen gleich welcher Art, ist anzumerken, dass diese nach der heutigen Physik insbesondere bei hohen Geschwindigkeiten von der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit und bei atomaren Prozessen zu modifizieren sind.

Die spezielle Relativitätstheorie von Einstein (Kap. 7) modifiziert die Annahmen (a)–(c), insbesondere verliert die Zeit ihren absoluten Charakter und wird bei der Lorentz-Transformation in gleicher Weise wie die Raumkoordinaten behandelt. Inelastische Kernstöße wie  $p + p \rightarrow p + p + \pi^+ + \pi^- + \pi^0$  verletzen Annahme (d) über die Unabhängigkeit der Masse im subatomaren Bereich.

Wir schließen hier mit der Bemerkung, dass die Newtonsche Mechanik begrifflich nicht einfach ist. Der Kosmologe Hermann Bondi hat hierzu treffend formuliert: "Einstein's contribution has a name for being difficult, but this is quite wrong. Einstein's contribution is very easy to understand, but unfortunately it rests on the theories of Galilei and Newton which are very difficult to understand."

## 2.3 Grundbegriffe der Mechanik

### 2.3.1 Inertialsysteme und Galilei-Transformation

Nach dem Trägheitsprinzip zeichnen sich Koordinatensysteme im absolut leeren Raum dadurch aus, dass sich in Bezug auf sie wechselwirkungsfreie Körper geradlinig-gleichförmig bewegen. Das ist aber auch der Fall bezüglich Systemen, die sich gegenüber dem absoluten Raum mit konstanter Geschwindigkeit  $\vec{V} = \text{const.}$  bewegen. Auch in ihnen gilt also das Trägheitsgesetz; sie heißen daher *Inertialsysteme*.

Da außerdem Wechselwirkungen zwischen Körpern nur von ihren relativen Positionen und Geschwindigkeiten abhängen können, führt die *Galilei-Transformation*

$$\vec{r}_i^* = \vec{r}_i - \vec{V}t, \quad t^* = t \quad (2.16)$$

auf ein anderes, mit der konstanten Geschwindigkeit  $\vec{V}$  bewegtes, Inertialsystem zu keiner Änderung der Form der Bewegungsgleichungen eines abgeschlossenen Systems. Gehen wir von der dynamischen Grundgleichung (2.13)

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j, \vec{v}_i - \vec{v}_j, t),$$

mittels der Transformationsgleichung (2.16) auf das bewegte Inertialsystem über, so folgt mit

$$\vec{v}_i^* = \frac{d}{dt} \vec{r}_i^* = \frac{d}{dt} \vec{r}_i - \vec{V} = \vec{v}_i - \vec{V}$$

dass

$$\frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{r}_i^*}{dt^2},$$

so dass die dynamische Grundgleichung im bewegten System dieselbe Form

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i^*}{dt^{*2}} = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i^* - \vec{r}_j^*, \vec{v}_i^* - \vec{v}_j^*, t^*) \quad (2.17)$$

annimmt. Die dynamische Grundgleichung ist also invariant bei Galilei-Transformation zwischen Inertialsystemen. Kein Experiment gibt daher Aufschluss über die verschiedenen Koordinatensysteme, die aus den Galilei-Transformationen hervorgehen. Inertialsysteme sind also im Rahmen der Newtonschen Mechanik grundsätzlich ununterscheidbar und das ursprüngliche Newtonsche Konzept eines absoluten Raumes verliert damit seinen physikalischen Sinn. In der vierdimensionalen Raumzeit der Ereignisse  $(\vec{r}, t)$  wird durch die Galilei-Transformation (2.16) der Raum relativiert, während die Zeit absolut bleibt (Galilei-Relativität). Im Gegensatz dazu behalten in der speziellen Relativitätstheorie Einsteins zwar die Inertialsysteme ihre Sonderrolle bei, aber die Zeit verliert ihren absoluten Charakter und wird bei der Lorentz-Transformation ebenso wie die Raumkoordinaten behandelt (siehe Kap. 7.1).

### 2.3.2 Arbeit

Wenn eine Kraft  $\vec{F}$  die Verschiebung eines Massenpunktes um ein Wegelement  $d\vec{r}$  hervorruft, so nennen wir das Skalarprodukt

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = |\vec{F}| |d\vec{r}| \cos(\vec{F}, d\vec{r}), \quad (2.18)$$

die von der Kraft  $\vec{F}$  geleistete differentielle *Arbeit*. Die Arbeit hat die Einheit  $\text{erg} = \text{g cm}^2 \text{s}^{-2}$  im cgs-System und Newtonmeter  $\text{Nm} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$  im MKS-System; offensichtlich entspricht  $1 \text{Nm} = 10^7 \text{erg}$ .

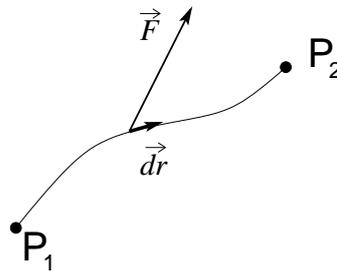


Abbildung 2.1: Zur Illustration des Begriffs der Arbeit

Die gesamte Arbeit  $W$  entlang eines Wegs  $\overline{P_1 P_2}$  zwischen zwei Punkten  $P_1$  und  $P_2$  ist dann durch das Integral

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2.19)$$

gegeben.

### 2.3.3 Kinetische Energie

Multiplizieren wir die dynamische Grundgleichung (2.2) in der Form

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad (2.20)$$

skalar mit  $d\vec{r} = \dot{\vec{r}}dt$ , so folgt

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}dt = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}^2) dt = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) dt. \quad (2.21)$$

Wir definieren deshalb die *kinetische Energie* des Massenpunktes

$$T = E_{\text{kin}} \equiv \frac{1}{2} m v^2. \quad (2.22)$$

Gleichung (2.21) schreibt sich dann mit Gleichung (2.18) zu

$$dT = \vec{F} \cdot d\vec{r} = dW \quad (2.23)$$

oder

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = T(P_2) - T(P_1). \quad (2.24)$$

Offensichtlich erhöht sich die kinetische Energie um die von außen am Massenpunkt geleistete Arbeit.

### 2.3.4 Konservative Kräfte

Ein Kraftfeld  $\vec{F}$  heisst *konservativ*, wenn es sich als Gradient eines Potentials

$$\vec{F} = - \text{grad } V(x, y, z) \quad (2.25)$$

darstellen lässt. Aufgrund der Beziehung (1.116),  $\text{rot grad } V = 0$ , ist die Definition (2.25) äquivalent zur Forderung

$$\text{rot } \vec{F} = 0 . \quad (2.26)$$

In diesem Fall erhalten wir für das Wegintegral in Gleichung (2.24)

$$\begin{aligned} \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= - \int_{P_1}^{P_2} \text{grad } V \cdot d\vec{r} \\ &= - \int_{P_1}^{P_2} \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} \\ &= - \int_{P_1}^{P_2} dV = - (V(P_2) - V(P_1)) = - (V_2 - V_1) , \end{aligned} \quad (2.27)$$

wobei wir Gleichung (1.87) für das totale Differential benutzt haben. Das Integral (2.19) zur Berechnung der Arbeit ist in diesem Fall unabhängig vom Integrationsweg und durch die Differenz des Potentials an den Endpunkten gegeben:

$$W = V_1 - V_2 . \quad (2.28)$$

$V(x, y, z)$  wird *potentielle Energie*, *skalares Potential*, oder kurz *Potential* genannt.

Kombiniert man die Gleichungen (2.28) und (2.24) so erhält man den Energiesatz

$$T_2 + V_2 = T_1 + V_1 = E = \text{const.} \quad (2.29)$$

für konservative Kräfte, wobei  $E$  die Gesamtenergie bezeichnet.

### 2.3.5 Zentralkräfte

Eine wichtige Gruppe von konservativen Kraftfeldern sind *Zentralkräfte*, die von einem Zentrum aus stets in radialer Richtung wirken:

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \frac{\vec{r}}{r} , \quad (2.30)$$

wobei  $r = |\vec{r}|$  und  $f(r)$  eine beliebige Funktion des Abstands  $r$  ist.

In diesem Fall ergibt sich die potentielle Energie nach (2.27) durch das Wegintegral entlang eines beliebigen Wegs  $\vec{s}$  zu

$$-V(r) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{P_1}^{P_2} f(r) \frac{\vec{r} \cdot d\vec{s}}{r} = \int_{P_1}^{P_2} f(r) dr = f(P_2) - f(P_1) . \quad (2.31)$$

Für die elastische Kraft

$$\vec{F} = k\vec{r} = kr\frac{\vec{r}}{r}$$

folgt speziell

$$V(r) = -\int_{r_0}^r dr kr = -\frac{k(r^2 - r_0^2)}{2}. \quad (2.32)$$

Für die Gravitationskraft

$$\vec{F} = GMm\frac{\vec{r}}{r^3} \quad (2.33)$$

folgt für das Potential

$$V(r) = -GMm\int_{r_0}^r dr r^{-2} = GMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right). \quad (2.34)$$

### 2.3.6 Drehimpuls und Drehmoment

Mit Hilfe des Ortsvektors  $\vec{r}$  definieren wir bezüglich jedes festen Punktes den *Drehimpuls*

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (2.35)$$

und das *Drehmoment*

$$\vec{D} \equiv \vec{r} \times \vec{F}. \quad (2.36)$$

Für die zeitliche Ableitung des Drehimpulses folgt dann

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}} = \frac{d\vec{L}}{dt} &= m\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) \\ &= m\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= m\vec{v} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = m\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Bilden wir das Kreuzprodukt des Ortsvektors  $\vec{r}$  mit der dynamischen Grundgleichung (2.20), so folgt

$$\vec{r} \times (m\ddot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{D}, \quad (2.38)$$

und unter Verwendung von (2.37) ergibt sich sofort der Drehimpulssatz

$$\dot{\vec{L}} = \vec{D}, \quad (2.39)$$

dass die zeitliche Änderung des Drehimpulses am Ort  $\vec{r}$  durch das dortige Drehmoment  $\vec{D}$  bestimmt ist.

Für **Zentralkräfte** ist speziell  $\vec{D} = 0$ , weil das Kraftfeld  $\vec{F} \parallel \vec{r}$  parallel zu  $\vec{r}$  wirkt. Nach dem Drehimpulssatz (2.39) folgt dann sofort die zeitliche Konstanz des Drehimpulses für Zentralkräfte:

$$\vec{L} = \text{const.} \quad (2.40)$$

## 2 Newtonsche Mechanik

Der Drehimpuls  $\vec{L}$  und das Drehmoment  $\vec{D}$  hängen von der Wahl des Bezugspunkts  $\vec{r}$  ab. Verschiebt man diesen von  $\vec{r}$  zu  $\vec{r} + \vec{u}$ , so erhalten wir für den Drehimpuls bezogen auf den neuen Punkt

$$\vec{L}' = (\vec{r} + \vec{u}) \times m (\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{u}}) . \quad (2.41)$$

Speziell bei der Transformation in ein anderes Inertialsystem, die einer Verschiebung mit  $\ddot{u} = 0$  entspricht, folgt aus Gleichung (2.41)

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}'}{dt} &= \left( \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt} \right) \times m (\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{u}}) + (\vec{r} + \vec{u}) \times m \ddot{\vec{r}} \\ &= m \left[ \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{u}} + \dot{\vec{u}} \times \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{u}} \times \dot{\vec{u}} \right] + m (\vec{r} + \vec{u}) \times \ddot{\vec{r}} . \end{aligned}$$

Die eckige Klammer ergibt keinen Beitrag, weil der erste und der vierte Term verschwinden und der dritte Term wegen der Antisymmetrie des Kreuzprodukts

$$\left( \dot{\vec{u}} \times \dot{\vec{r}} = -\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{u}} \right)$$

gerade gleich dem negativen Wert des zweiten Terms ist. Man erhält also

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = m (\vec{r} + \vec{u}) \times \ddot{\vec{r}} = \frac{d\vec{L}}{dt} + m\vec{u} \times \ddot{\vec{r}} . \quad (2.42)$$

Führen wir das Drehmoment ebenfalls bezogen auf den neuen Punkt  $\vec{r} + \vec{u}$  als

$$\vec{D}' = (\vec{r} + \vec{u}) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} + \vec{u} \times \vec{F} = \vec{D} + m\vec{u} \times \ddot{\vec{r}} , \quad (2.43)$$

so schreibt sich Gleichung (2.42) als

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{D}' . \quad (2.44)$$

Der Drehimpulssatz gilt also für jeden beliebigen inertialen Bezugspunkt, oder anders ausgedrückt, der Drehimpulssatz ist invariant gegenüber der Galilei-Transformation zwischen Inertialsystemen.

### 2.3.7 Zusammenfassung: Erhaltungssätze für einen Massenpunkt

Fassen wir die in diesem Abschnitt gewonnenen Erhaltungssätze für die Bewegung eines Massenpunktes in einem abgeschlossenen System zusammen:

- (a) Für konservative Kräfte ( $\text{rot } \vec{F} = 0$ ) ist die Gesamtenergie  $E = T + V$  erhalten.
- (b) Für Zentralkräfte ( $\vec{r} \times \vec{F} = 0$ ) ist der Drehimpuls  $\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$  erhalten.
- (c) Gemäß des Trägheitsgesetzes ist bei verschwindender Kraft ( $\vec{F} = 0$ ) der lineare Impuls  $\vec{p} = m\vec{v}$  erhalten.

## 2.4 Integration der Bewegungsgleichungen

Ein allgemeines Verfahren zur Lösung (Integration) der Bewegungsgleichungen eines Systems von Massenpunkten existiert nicht. Das gilt auch für den Sonderfall eines abgeschlossenen ( $\vec{F}^{(e)} = 0$ ) Systems, bei dem die Wechselwirkungen nur von den relativen Abständen abhängen, das sogenannte  $N$ -Körper-Problem. Gemäß (2.15) gilt

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} f_{ij} (|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}. \quad (2.45)$$

Für  $N = 1$  ist seine Lösung trivial und folgt schon aus LEX I:  $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$ .

Die Lösung des Zweikörperproblems ( $N = 2$ ) ist das erste und wichtigste Beispiel der Newton-Mechanik und bildet einen wesentlichen Teil der "Principia". Da es sich aber besonders einfach in sphärischen Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten) darstellen lässt, wird seine Behandlung auf Kapitel 4 verschoben.

Das Dreikörperproblem ( $N = 3$ ) war der Anlass vieler Untersuchungen, die wesentlich zur Entwicklung der theoretischen Mechanik beitrugen. Zu seiner analytischen Lösung sind mindestens 16 unabhängige Bewegungsintegrale erforderlich, von denen 10 aus den Symmetrieeigenschaften von Raum und Zeit folgen. Nach Vorarbeiten von Lagrange und Poincare hat Bruns aber gezeigt, dass im allgemeinen Fall keine weiteren Bewegungsintegrale in analytischer Form existieren. In diesem Sinn ist das Dreikörperproblem also unlösbar.

Wir betrachten jetzt das nichtabgeschlossene Einkörperproblem

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t), \quad \vec{r}(t=0) = \vec{r}_0, \quad \vec{v}(t=0) = \vec{v}_0. \quad (2.46)$$

Es handelt sich also um ein System von drei gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung. Seine Lösung erfordert in der Regel die Separation in drei unabhängige Gleichungen für  $x(t)$ ,  $y(t)$  und  $z(t)$ . Diese ist immer möglich für ein lineares System

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \alpha(t) \frac{d\vec{r}}{dt} + \beta(t) \vec{r} + \vec{F}(t). \quad (2.47)$$

Für ein zeitabhängiges homogenes Kraftfeld ( $\alpha(t) = \beta(t) = 0$ ) folgt zum Beispiel durch Integration der Bewegungsgleichung

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \int_0^t dt' \vec{F}(t'), \quad (2.48)$$

d.h. die Änderung des Impulses ist gleich dem Kraftstoß. Durch weitere Integration von (2.48) ergibt sich

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{m} \int_0^t dt^* \int_0^{t^*} dt' \vec{F}(t'). \quad (2.49)$$

Das Problem ist damit auf Quadraturen zurückgeführt und insofern gelöst.

Wenn die Separation möglich ist, führt sie auf drei Bewegungsgleichungen für jeweils ein eindimensionales System, deren erste lautet

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t), \quad (2.50)$$

## 2 Newtonsche Mechanik

mit den Anfangsbedingungen  $x(0) = x_0$  und  $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$  zur Zeit  $t = 0$ .

Ein generelles Lösungsverfahren für diese allgemeinste Form der gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Art gibt es nicht. Wir untersuchen deshalb Sonderfälle.

### 2.4.1 Zeitabhängiges Kraftfeld $F = F(t)$

Der Fall eines rein zeitabhängigen oder konstanten Kraftfeldes wurde schon in Gleichung (2.49) behandelt.

Im Beispiel einer konstanten Kraft  $F = mg$  ergibt sich sofort die Lösung

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + \dot{x}_0 t + x_0 . \quad (2.51)$$

### 2.4.2 Geschwindigkeitsabhängiges Kraftfeld $F = f(\dot{x}) = f(v)$

Im Fall einer geschwindigkeitsabhängigen Kraft ist die Bewegungsgleichung eine Differentialgleichung 1. Ordnung für  $v(t)$ :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m}f(v) ,$$

die sich durch Trennung der Variablen lösen lässt:

$$\int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \frac{dv}{f(v)} = \frac{1}{m} \int_0^t dt' = \frac{t}{m} . \quad (2.52)$$

Durch Auflösen nach  $\dot{x}$  ergibt sich

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = G(\dot{x}_0, t)$$

und dann durch weitere Integration nach der Zeit

$$x(t) = x_0 + \int_0^t dt' G(\dot{x}_0, t') . \quad (2.53)$$

Dies illustrieren wir am Beispiel einer Kraft  $F = -av^2$ , wobei  $a = \text{const.}$  In diesem Fall lautet die Gleichung (2.52)

$$\frac{a}{m}t = - \int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \frac{dv}{v^2} = \frac{1}{\dot{x}} - \frac{1}{\dot{x}_0} .$$

Das Auflösen nach  $\dot{x}$  führt auf

$$\frac{dx}{dt} = \left[ \frac{a}{m}t + \frac{1}{\dot{x}_0} \right]^{-1}$$

und die nochmalige Integration über die Zeit ergibt die Lösung

$$x(t) = x_0 + \frac{m}{a} \ln \left[ 1 + \frac{a}{m} \dot{x}_0 t \right] .$$

**2.4.3 Konservatives Kraftfeld**  $F = f(x)$ 

Jedes rein ortsabhängige Kraftfeld  $f(x)$  ist ein konservatives Kraftfeld (2.25), da wir es als Gradient

$$f(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$$

des Potentialfeldes

$$V(x) = -\int_0^x dx' f(x') \quad (2.54)$$

darstellen können.

Multiplizieren wir die Bewegungsgleichung mit  $\dot{x}$ , so folgt

$$m\ddot{x}\dot{x} = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}^2) = f(x)\dot{x} = f(x) \frac{dx}{dt} .$$

Durch Integration über die Zeit folgt mit (2.54)

$$\begin{aligned} \frac{m}{2}v^2 - \frac{m}{2}v_0^2 &= \int_{x_0}^x dx' f(x') = -V(x) + V(x_0) , \\ \text{oder} \quad \frac{m}{2}v^2 + V(x) &= \frac{m}{2}v_0^2 + V(x_0) = E = \text{const.} \end{aligned} \quad (2.55)$$

der Energiesatz (2.29) für dieses spezielle konservative Kraftfeld. Die Summe aus kinetischer und potentieller Energie ist also ein Bewegungsintegral bzw. eine Erhaltungsgröße.

Durch Auflösen von Gleichung (2.55) nach  $v$  erhalten wir

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x))}$$

und daraus durch Trennung der Variablen

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{ds}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V(s))}} . \quad (2.56)$$

Das Problem lässt sich also auf Quadraturen (Integrale) zurückführen und ist damit vollständig gelöst.

Unabhängig von der speziellen Form des konservativen Kraftfeldes  $f(x)$  oder des Potentialverlaufs  $V(x)$  lassen sich aus den Lösungen (2.55)–(2.56) allgemeine Aussagen zur Bewegungsform ableiten, insbesondere lassen sich Bedingungen für eine oszillierende Bewegung aufstellen. Jedes Teilchen im Potentialfeld  $V(x)$  beginnt seine Bewegung am Ort  $x_0$  mit der Geschwindigkeit  $\dot{x}_0$ :

1. Damit es zu diesem Ort zurückkehrt, muss sich die Geschwindigkeit an irgendeinem anderen Punkt  $U_1$  (sog. Umkehrpunkt) umkehren, d.h. dort gilt  $\dot{x}_{U_1} = 0$ . Es durchläuft dann den Anfangspunkt mit entgegengesetzter Geschwindigkeit und damit es nach dem Durchlaufen wieder an den Anfangspunkt zurückkehrt, braucht man einen zweiten Umkehrpunkt  $U_2$  mit ebenfalls  $\dot{x}_{U_2} = 0$ . Des Weiteren muss bei den Umkehrpunkten die Kraft  $(dV/dx)_{U_1, U_2} \neq 0$  nichtverschwindend sein.

## 2 Newtonsche Mechanik

2. Gemäß Gleichung (2.55) gelten an den Umkehrpunkten wegen  $v_{U_1} = v_{U_2} = 0$  die Beziehungen

$$V(x_{U_1}) = V(x_{U_2}) = E. \quad (2.57)$$

Existieren keine zwei Punkte, die die Gleichungen (2.57) erfüllen, so ist keine Schwingungsbewegung möglich.

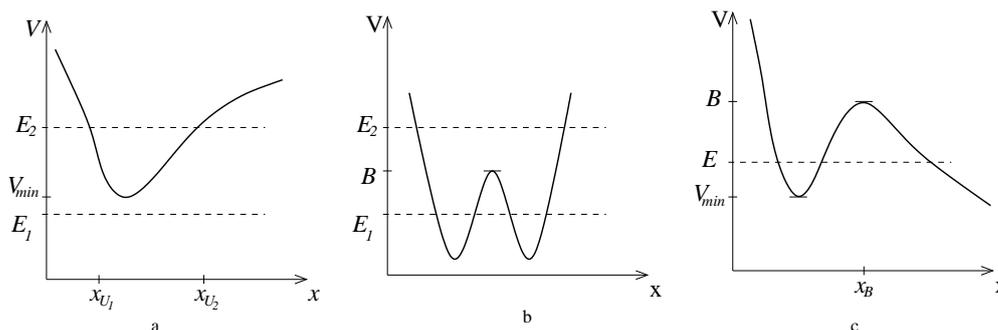


Abbildung 2.2: Bewegungsformen für drei Beispielpotentiale

Dieser Befund lässt sich an den drei in Abb. 2.2 gezeigten Potentialbeispielen verdeutlichen. Das in Teilabbildung 2.2 a gezeigte Potential hat ein Minimum  $V_{min}$ . Ist die Gesamtenergie  $E = E_1 < V_{min}$ , gibt es keine oszillierende Bewegung. Für Werte  $E = E_2 > V_{min}$  existieren zwei Umkehrpunkte, und man erhält Schwingungsbewegungen mit Amplituden, die mit wachsendem  $E$  ansteigen.

Das in Abb. 2.2 b illustrierte Potential hat bei  $x_B$  die Barriere  $B$ . Ist die Gesamtenergie  $E = E_1 < B$ , aber größer als die Potentialminima, so ergeben sich Schwingungsbewegungen auf beiden Seiten der Barriere. Ist  $E = E_2 > B$ , so erstrecken sich die Schwingungen über die gesamte Breite des Potentialtopfs. Im Fall  $E = B$  bleibt das Teilchen genau auf der Potentialspitze liegen, aber infinitesimal kleine Änderungen machen die Bewegung wieder oszillierend.

Das in Abb. 2.2 c gezeigte Potential erlaubt oszillierende Bewegungen nur für Teilchen, die links  $x < x_B$  von der Spitze liegen, wenn  $V_{min} < E < B$  ist.

### 2.4.4 Harmonischer Oszillator $F = f(x)$

Wir betrachten jetzt das spezielle eindimensionale Potential  $V(x) = 1/2kx^2$  mit  $k > 0$  des harmonischen Oszillators, dass auf das rücktreibende Hookesche Kraftgesetz

$$F(x) = -\frac{dV}{dx} = -kx \quad (2.58)$$

führt.

## 2.4 Integration der Bewegungsgleichungen

Dieses Kraftgesetz hat eine besondere Bedeutung in der Physik, da man komplizierte beliebige Kraftfelder  $F(x)$  oft durch Taylor-Entwicklung um einen Punkt  $x_0$  entwickelt

$$F(x) \simeq F(x_0) + x \left( \frac{dF}{dx} \right)_{x=x_0} + \frac{x^2}{2} \left( \frac{d^2F}{dx^2} \right)_{x=x_0} + \dots \quad (2.59)$$

Bei kleinen Auslenkungen  $|x - x_0| \ll x_0$  berücksichtigt man nur den Term 1. Ordnung in der Entwicklung, und nach Berücksichtigung von  $F(x_0)$  in einer erneuten Normierung ergibt sich gerade das Hookesche Kraftgesetz

$$F(x) - F(x_0) \simeq -kx, \quad \text{mit} \quad k = - \left( \frac{dF}{dx} \right)_{x=x_0}. \quad (2.60)$$

Als Anfangsbedingung benutzen wir, dass für  $t = 0$  das Teilchen an der Stelle  $a$  ruht  $\dot{x} = v = 0$  (siehe Abb. 2.3). Die rüctreibende Kraft (2.58) sorgt dann zunächst für die Bewegung des Teilchens zum Punkt  $x = 0$  hin.

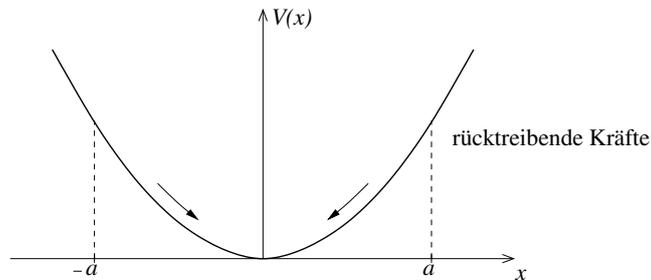


Abbildung 2.3: Zum harmonischen Oszillator

Das Kraftgesetz (2.58) ist konservativ, da es sich als Ableitung des Potentials  $V(x) = 1/2kx^2$  darstellen lässt. Deshalb gilt der Energiesatz (2.55) oder (2.29) in der Form

$$T + V = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{k}{2} x^2 = E = \text{const.} \quad (2.61)$$

Aus der Anfangsbedingung erschließen wir

$$T(t=0) = \frac{m}{2} \dot{x}_{x=a}^2 = 0,$$

so dass die Gesamtenergie  $E$  durch

$$E = \frac{k}{2} a^2 \quad (2.62)$$

gegeben ist. Der Energiesatz (2.61) reduziert sich dann auf

$$\frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{k}{2} (a^2 - x^2)$$

oder

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{k}{m} (a^2 - x^2)}. \quad (2.63)$$

## 2 Newtonsche Mechanik

Wählen wir das positive Vorzeichen der Quadratwurzel und integrieren wir über die Zeit, so erhalten wir mit der Integrationskonstanten  $c_1$

$$\int^x \frac{ds}{\sqrt{a^2 - s^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}}t + c_1 .$$

Die Substitution  $s = ay$  führt auf

$$\int^{\frac{x}{a}} \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) = \sqrt{\frac{k}{m}}t + c_1 . \quad (2.64)$$

Nutzen wir die zweite Anfangsbedingung  $x(t = 0) = a$  aus, so folgt für den Wert der Integrationskonstanten

$$c_1 = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

und die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung lautet

$$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{k}{m}}t . \quad (2.65)$$

Bilden wir den sin dieser Gleichung, so folgt

$$\begin{aligned} \sin\left[\arcsin\left(\frac{x(t)}{a}\right)\right] &= \frac{x(t)}{a} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ &= \sin\frac{\pi}{2} \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \cos\frac{\pi}{2} \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t = \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t \end{aligned}$$

$$\text{oder} \quad x(t) = a \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t = a \cos\omega t = a \cos\frac{2\pi t}{T} . \quad (2.66)$$

Das Teilchen führt eine periodische Schwingungsbewegung mit der Frequenz

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

aus. Diese Frequenz wird oftmals als Federkonstante bezeichnet.

### 2.4.5 Senkrechter Wurf im Schwerfeld ohne Reibung

Wir untersuchen jetzt die Bewegungsgleichung im Kraftfeld

$$\vec{F}_G = -mg\vec{e}_3 , \quad \text{mit} \quad g = \frac{GM_E}{R_E^2} = 9.81 \text{ ms}^{-2} . \quad (2.67)$$

In diesem Fall reduziert sich die dynamische Grundgleichung (2.3) auf

$$m\ddot{z}_3 = -mg\vec{e}_3 , \quad (2.68)$$

also auf

$$\ddot{z}(t) = -g . \quad (2.69)$$

## 2.4 Integration der Bewegungsgleichungen

Mit den Anfangsbedingungen  $z(t=0) = 0$  und  $\dot{z}(t=0) = V_0 > 0$  für den senkrechten Wurf nach oben, ergeben die Integrationen von Gleichung (2.69) nach der Zeit

$$\dot{z}(t) = v(t) = V_0 - gt, \quad z(t) = V_0 t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (2.70)$$

Bezeichnet  $T$  die Steigzeit bis zum Umkehrpunkt  $\dot{z}(T) = 0$ , so ergibt sich aus Gleichung (2.70a) diese zu  $T = V_0/g$ . Gemäß Gleichung (2.70b) berechnet man die maximale Steighöhe  $h$  dann zu

$$h = z(T) = V_0 T - \frac{g}{2}T^2 = \frac{V_0^2}{g} - \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{g} = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{g} \quad (2.71)$$

Drückt man gemäß (2.70a) die Zeit  $t = (V_0 - v)/g$  durch die Geschwindigkeit aus und setzt dies in Gleichung (2.70b) ein, so folgt

$$z(t) = \frac{1}{2g} [2V_0(V_0 - v) - (V_0 - v)^2] = \frac{V_0^2 - v^2}{2g} = h - \frac{v^2}{2g}, \quad (2.72)$$

oder der Zusammenhang

$$v(z) = \sqrt{2g(h - z)}. \quad (2.73)$$

### 2.4.6 Schiefer Wurf im Schwerfeld ohne Reibung

Im Unterschied zum gerade behandelten Fall des senkrechten Wurfs untersuchen wir jetzt den schrägen Wurf, d.h. die Anfangsgeschwindigkeit hat zwei Komponenten gemäß

$$\dot{\vec{r}}(t=0) = \vec{v}_0 = V_0 (\cos \alpha \vec{e}_2 + \sin \alpha \vec{e}_3), \quad V_0 > 0, \quad (2.74)$$

wobei  $\alpha$  den Abwurfwinkel bezeichnet (siehe Abb. 2.4). Im Fall  $\alpha = \pi/2$  ergibt sich gerade wieder der Fall des senkrechten Wurfs.

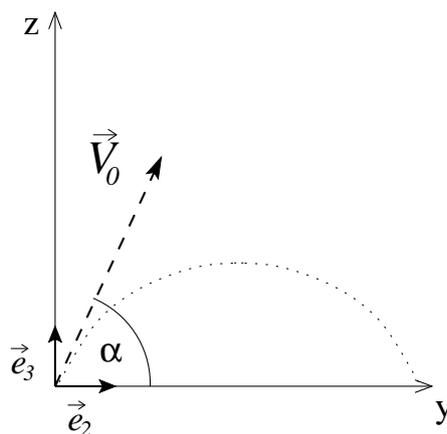


Abbildung 2.4: Schräger Wurf

## 2 Newtonsche Mechanik

Die dynamische Bewegungsgleichung ist wieder durch Gleichung (2.68) gegeben

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{e}}_3 &= -mg\vec{e}_3, \\ \text{oder} \quad \frac{d\vec{v}}{dt} &= -g\vec{e}_3. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Die Integration dieser Gleichung führt sofort auf

$$\vec{v}(t) = -gt\vec{e}_3 + \vec{c}_2,$$

mit dem zeitlich konstanten Vektor  $\vec{c}_2$ . Aus der Anfangsbedingung (2.74) erschließt man

$$\begin{aligned} \vec{c}_2 &= \vec{v}_0 = V_0(\cos\alpha\vec{e}_2 + \sin\alpha\vec{e}_3), \\ \text{so dass} \quad \vec{v}(t) &= (V_0\sin\alpha - gt)\vec{e}_3 + V_0\cos\alpha\vec{e}_2. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Die Steigzeit  $T$  ergibt sich aus der Bedingung  $\vec{v}(t = T) \cdot \vec{e}_3 = 0$  zu  $T = V_0\sin\alpha/g$ . Durch nochmalige Integration von Gleichung (2.76) ergibt sich mit der Anfangsbedingung  $\vec{r}(t = 0) = \vec{0}$  die Lösung der Bewegungsgleichung zu

$$\vec{r}(t) = (0, y(t), z(t)) = \left[ V_0(\sin\alpha)t - \frac{g}{2}t^2 \right] \vec{e}_3 + V_0(\cos\alpha)t\vec{e}_2. \quad (2.77)$$

Aus der Gleichung für die  $y$ -Komponente der Bewegung

$$\begin{aligned} y(t) &= tV_0\cos\alpha \\ \text{folgt} \quad t &= \frac{y}{V_0\cos\alpha}. \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Gleichung für die  $z$ -Komponente der Bewegung folgt die Parabelgleichung

$$z(t) = V_0(\sin\alpha)t - \frac{g}{2}t^2 = y(t)\tan\alpha - \frac{g}{2}\left(\frac{y(t)}{V_0\cos\alpha}\right)^2 \quad (2.78)$$

für den Zusammenhang  $z = z(y)$ , der in Abb. 2.5 illustriert ist.

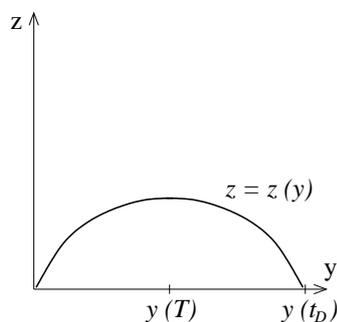


Abbildung 2.5: Höhe-Weite-Verlauf beim schrägen Wurf

Die Wurfdauer ergibt sich aus der Bedingung  $z(t_D) = 0$  zu dem Doppelten der Steigzeit  $t_D = 2V_0 \sin \alpha / g = 2T$ . Die Wurfweite ist dann durch

$$y(t_D) = t_D V_0 \cos \alpha = \frac{2V_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad (2.79)$$

gegeben. Die maximale Wurfweite bei konstantem  $V_0$  wird für den Abwurfwinkel  $\alpha = \pi/4$  erreicht, weil dann  $\sin 2\alpha = 1$  seinen maximalen Wert annimmt. Natürlich gelten diese Rechnungen nur bei Vernachlässigung der Luftreibung, die als nächstes betrachtet wird.

## 2.5 Reibung

### 2.5.1 Empirische Reibungskräfte

Die Wechselwirkung eines bewegten Körpers mit seiner ruhenden Umgebung führt zur Abbremsung des Körpers. Die Reibungskräfte sind stets der Bewegungsrichtung entgegengesetzt und *nicht* konservativ, so dass der Energiesatz (2.29) nicht gilt. Die kinetische Energie des Körpers wird in Wärme des Umgebungsmediums umgesetzt.

Für die Reibungskräfte bei Geschossen in zähen Medien macht man den allgemeinen Ansatz einer Geschwindigkeitsabhängigkeit

$$\vec{F}_R = -F(v) \frac{\vec{v}}{v} \quad (2.80)$$

und bestimmt die Proportionalitätsfunktion  $F(v)$  empirisch. Als Annäherung verstehen sich die Fälle der

#### (a) Stokesschen Reibung

$$\vec{F}_R = -\beta \vec{v}, \quad \beta = \text{const.} > 0, \quad (2.81)$$

die für schnell bewegte Geschosse in zähen Medien gilt, und der

#### (b) Newtonschen Reibung

$$\vec{F}_R = -\gamma v \vec{v}, \quad \gamma = \text{const.} > 0, \quad (2.82)$$

die für langsam bewegte Geschosse in zähen Medien gilt.

Bei der Reibung zwischen festen Körpern unterscheidet man zwischen zwei Arten der Reibung: Gleitreibung und Haftreibung.

In Abb. 2.6 drückt der bewegte ( $\vec{v} \neq \vec{0}$ ) Körper 1 mit der Kraftkomponente  $\vec{F}^\perp$  auf seine Unterlage und die Gleitreibung

$$\vec{F}_R = -\mu_g \left| \vec{F}^\perp \right| \frac{\vec{v}}{v} \quad (2.83)$$

ist proportional zu dieser Kraftkomponente. Der Wert des konstanten Gleitreibungskoeffizienten  $\mu_g$  hängt von den Materialien der Körper 1 und 2 ab.

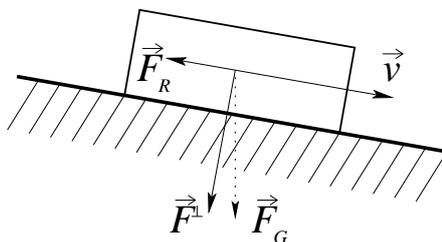


Abbildung 2.6: Zur Illustration der Gleitreibung

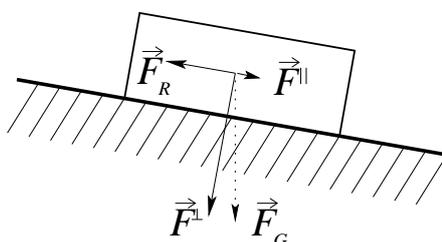


Abbildung 2.7: Zur Illustration der Haftreibung

In Abb. 2.7 verharrt Körper 1 in Ruhe ( $\vec{v} = \vec{0}$ ), wenn die parallel angreifenden Kräfte gerade durch die Haftreibung kompensiert werden. Körper 1 bewegt sich nicht, solange

$$|\vec{F}^{\parallel}| < \mu_h |\vec{F}^{\perp}|, \quad (2.84)$$

wobei der konstante Haftreibungskoeffizient  $\mu_h$  wieder materialabhängig ist.

### 2.5.2 Schräger Wurf im Schwerfeld mit Reibung nach Stokes

Wir betrachten jetzt den Einfluss der Stokesschen Reibung auf den schrägen Wurf. Als Anfangsbedingung benutzen wir wieder Gleichung (2.74). Mit Gleichung (2.81) lautet die dynamische Bewegungsgleichung jetzt aber

$$m\ddot{\vec{r}} = -\beta\dot{\vec{r}} - mg\vec{e}_3 \quad (2.85)$$

oder

$$\dot{\vec{v}} + \frac{\beta}{m}\vec{v} = -g\vec{e}_3. \quad (2.86)$$

Wegen (integrierender Faktor)

$$e^{-\beta t/m} \frac{d}{dt} [\vec{v}(t)e^{\beta t/m}] = \dot{\vec{v}} + \frac{\beta}{m}\vec{v}$$

folgt

$$\frac{d}{dt} [\vec{v}(t)e^{\beta t/m}] = -g\vec{e}_3 e^{\beta t/m}$$

und durch direkte Integration

$$\begin{aligned}\vec{v}(t)e^{\beta t/m} &= -g\vec{e}_3 \int ds e^{\beta s/m} + \vec{c}_3 = -\frac{mg}{\beta} e^{\beta t/m} \vec{e}_3 + \vec{c}_3, \\ \text{also} \quad \vec{v}(t) &= -\frac{mg}{\beta} \vec{e}_3 + \vec{c}_3 e^{-\beta t/m}.\end{aligned}\quad (2.87)$$

Mit der Anfangsbedingung (2.74) folgt

$$\begin{aligned}\vec{v}(t=0) &= -\frac{mg}{\beta} \vec{e}_3 + \vec{c}_3 = V_0 (\cos \alpha \vec{e}_2 + \sin \alpha \vec{e}_3), \\ \text{also} \quad \vec{c}_3 &= \vec{v}(t=0) + \frac{mg}{\beta} \vec{e}_3 = V_0 \cos \alpha \vec{e}_2 + \left( V_0 \sin \alpha + \frac{mg}{\beta} \right) \vec{e}_3.\end{aligned}\quad (2.88)$$

Setzen wir dieses Ergebnis in Gleichung (2.87) ein, erhalten wir

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = V_0 \cos \alpha e^{-\beta t/m} \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \left[ -\frac{mg}{\beta} + \left( V_0 \sin \alpha + \frac{mg}{\beta} \right) e^{-\beta t/m} \right]. \quad (2.89)$$

Für große Zeiten  $t \gg m/\beta$  ist  $e^{-\beta t/m} \ll 1$  und der Geschwindigkeitsverlauf (2.89) lässt sich gut durch

$$\vec{v} \left( t \gg \frac{m}{\beta} \right) \simeq -\frac{mg}{\beta} \vec{e}_3 \quad (2.90)$$

approximieren, das dem senkrechten Fall mit der konstanten Geschwindigkeit ( $mg/\beta$ ) entspricht.

Durch nochmalige Integration von Gleichung (2.89) erhalten wir für den Ort

$$\vec{r}(t) = \vec{c}_4 - \frac{V_0 m}{\beta} \cos \alpha e^{-\beta t/m} \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \left[ -\frac{mg}{\beta} t - \frac{m}{\beta} \left( V_0 \sin \alpha + \frac{mg}{\beta} \right) e^{-\beta t/m} \right]. \quad (2.91)$$

Aus der Anfangsbedingung  $\vec{r}(t=0) = \vec{0}$  folgt

$$\vec{c}_4 = \frac{V_0 m}{\beta} \cos \alpha \vec{e}_2 + \frac{m}{\beta} \left( V_0 \sin \alpha + \frac{mg}{\beta} \right) \vec{e}_3$$

und eingesetzt in Gleichung (2.91) ergibt sich als vollständige Lösung

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= (0, y(t), z(t)) \\ &= \frac{V_0 m}{\beta} \cos \alpha (1 - e^{-\beta t/m}) \vec{e}_2 \\ &\quad + \left[ -\frac{mg}{\beta} t + \frac{m}{\beta} \left( V_0 \sin \alpha + \frac{mg}{\beta} \right) (1 - e^{-\beta t/m}) \right] \vec{e}_3.\end{aligned}\quad (2.92)$$

Für die  $y$ -Komponente erhalten wir

$$y(t) = \frac{V_0 m}{\beta} \cos \alpha (1 - e^{-\beta t/m}), \quad (2.93)$$

## 2 Newtonsche Mechanik

die für große Zeiten  $t \gg m/\beta$  asymptotisch gegen die maximale Entfernung

$$y \left( t \gg \frac{m}{\beta} \right) \rightarrow \frac{V_0 m}{\beta} \cos \alpha \quad (2.94)$$

konvergiert. Gemäß Gleichung (2.93) erhalten wir für die Zeit

$$t = -\frac{m}{\beta} \ln \left[ 1 - \frac{\beta}{m} \frac{y}{V_0 \cos \alpha} \right]. \quad (2.95)$$

Setzen wir dies in die  $z$ -Komponente der Bewegungsgleichung

$$z(t) = -\frac{mg}{\beta} t + \frac{m}{\beta} \left( V_0 \sin \alpha + \frac{mg}{\beta} \right) \left( 1 - e^{-\beta t/m} \right)$$

ein, so folgt für die Bahngleichung

$$z(y) = \frac{m^2 g}{\beta^2} \ln \left[ 1 - \frac{\beta}{m} \frac{y}{V_0 \cos \alpha} \right] + \left( V_0 \sin \alpha + \frac{mg}{\beta} \right) \frac{y}{V_0 \cos \alpha}. \quad (2.96)$$

### Übungsaufgabe:

**(A2.5.1)** Berechnen Sie die Bewegungsgleichung und die Bahnkurve für den schiefen Wurf im Schwerfeld mit Newtonscher Reibung.

## 3 Analytische Mechanik

### 3.1 Eingeschränkte Bewegung bei Zwangsbedingungen

Im vorherigen Kapitel wurde die Bewegung eines freien Massenkörpers unter dem Einfluss äußerer Kräfte untersucht. Sind dessen Bewegungsmöglichkeiten hingegen durch gewisse Nebenbedingungen auf eine bestimmte Fläche oder Linie beschränkt, so spricht man von "eingeschränkter" Bewegung. Es muss dann eine "Zwangskraft" auf den Körper vorliegen, die ihn auf der vorgeschriebenen Bahn hält.

#### 3.1.1 Beispiel 1: Schiefe Ebene

Als erstes Beispiel der eingeschränkten Bewegung betrachten wir die in Abb. 3.1 skizzierte schiefe Ebene.

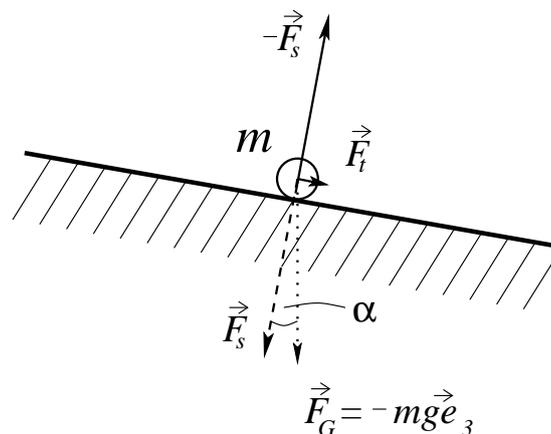


Abbildung 3.1: Beispiel: Eingeschränkte Bewegung auf der schiefen Ebene

Die in  $z$ -Richtung einwirkende Schwerkraft  $m\vec{g} = -mg\vec{e}_3$  zerlegen wir in die Tangential- und Senkrechtkomponenten  $\vec{F}_t$  und  $\vec{F}_s$ . Gleichzeitig muss die schiefe Ebene auf den Massenpunkt eine Kraft  $-\vec{F}_s$  ausüben, damit sich der Massenpunkt entlang der schiefen Ebene bewegt. Bei eingeschränkten Bewegungen unterscheiden wir zwischen:

1. **Äußeren Kräften**  $\vec{K}$ , die durch Wechselwirkungskräfte (z.B. Gravitation, Federkräfte) bewirkt werden, und
2. **Zwangskräften**  $\vec{Z}$ , die für die Zwangsbedingungen verantwortlich sind.

### 3 Analytische Mechanik

Hier stellt sich oft die Schwierigkeit, dass wir die Zwangsbedingungen kennen (siehe schiefe Ebene) und mathematisch formulieren können, aber nicht die Zwangskräfte.

Hier behandeln wir zunächst Methoden

- (a) zum Aufstellen der Bewegungsgleichung bei eingeschränkter Bewegung und
- (b) zur Berechnung der Zwangskräfte aus vorgegebenen Zwangsbedingungen.

Dieses Vorgehen führt zu den **Lagrange-Gleichungen 1. Art**.

Ist man an den Zwangskräften nicht interessiert, so eliminiert man sie durch Einführung geeigneter neuer Koordinaten. Dies führt auf die **Lagrange-Gleichungen 2. Art** (siehe z.B. Kap. 3.2 für das ebene Pendel).

Bei einfachen Problemen (wie der schiefen Ebene) kann man die eingeschränkte Bewegung auch durch direkte Anwendung der Newtonschen Axiome lösen. Gemäß Abb. 3.1 gilt

$$x = s \cos \alpha$$

und

$$z = s \sin \alpha ,$$

wobei  $s$  die Koordinate entlang der schiefen Ebene bezeichnet. Aus der dynamischen Grundgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_t \quad (3.1)$$

und

$$F_t = -mg \sin \alpha$$

folgen dann

$$\ddot{x} = \ddot{s} \cos \alpha = -g \sin \alpha \cos \alpha ,$$

$$\ddot{z} = \ddot{s} \sin \alpha = -g \sin^2 \alpha \quad (3.2)$$

und durch zweimalige Integration die Lösungen

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \dot{x}_0 t - \frac{g}{2} t^2 \sin \alpha \cos \alpha , \\ z(t) &= z_0 + \dot{z}_0 t - \frac{g}{2} t^2 \sin^2 \alpha . \end{aligned} \quad (3.3)$$

Bei komplizierteren eingeschränkten Bewegungen (z.B. Achterbahn) ist die direkte Lösung nicht möglich.

## 3.2 Beispiel 2: Das Pendel im Schwerfeld

Wir betrachten jetzt die Bewegung des Pendels im Schwerfeld: auf eine Masse  $m$  wirke die Schwerkraft  $\vec{K}$  und eine durch einen Faden der Länge  $l$  ausgeübte unbekannte Zwangskraft  $\vec{Z}$  (siehe Abb. 3.2).

Der Massenpunkt wird durch den Faden der Länge  $l$  auf einer Kreisbahn gehalten, d.h. die Zwangsbedingungen für die Bahn  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  lauten:

$$z = 0 , \quad x^2 + y^2 = l^2 . \quad (3.4)$$

### 3.2 Beispiel 2: Das Pendel im Schwerfeld

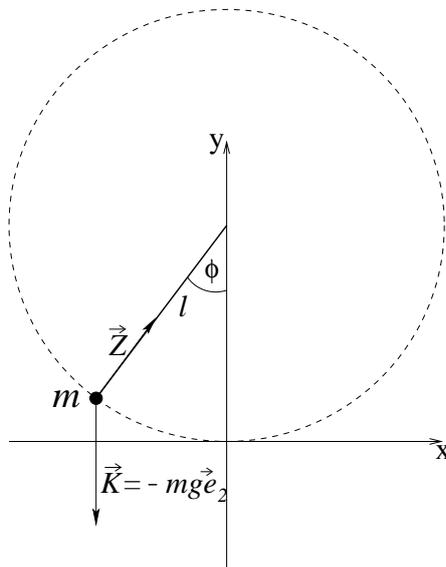


Abbildung 3.2: Pendel im Schwerfeld

In der Bewegungsgleichung unterscheiden wir zwischen äußeren Kräften und Zwangskräften und setzen an

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{K} + \vec{Z}. \quad (3.5)$$

Auf die Masse  $m$  wirkt die Schwerkraft  $\vec{K}$  und eine durch den Faden ausgeübte unbekannte Zwangskraft  $\vec{Z}$ . Die Zwangskraft  $\vec{Z}$  in dieser Gleichung ist zunächst unbekannt, obwohl wir die Zwangsbedingungen (3.4) kennen.

Die Zwangsbedingungen (3.4) können elegant eliminiert werden, wenn man den Winkel  $\phi$  im Bezug zur Ruhelage  $\phi = 0$  (siehe Abb. 3.2) als neue Koordinate benutzt. Die Bogenlänge des Pendels ist dann durch  $s = l\phi$  gegeben. Die durch die Gravitation in Richtung des Bogens wirkende Rückstellkraftkomponente  $F_R = -mg \sin \phi$  ist konservativ, da sie als Ableitung des Potentials  $V(\phi) = mgl(1 - \cos \phi)$  darstellbar ist:

$$F_R = -\frac{dV}{ds} = -\frac{1}{l} \frac{dV}{d\phi} = -mg \sin \phi. \quad (3.6)$$

(Die Konstante  $mgl$  im Potential wird aus mathematischer Bequemlichkeit dazu addiert, siehe unten (3.12).)

Die kinetische Energie des Pendels ist durch  $T = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2$  gegeben. Mit (Abb. 3.2)

$$x = l \sin \phi, \quad y = l \cos \phi \quad (3.7)$$

ergibt sich

$$\dot{x} = l(\cos \phi)\dot{\phi}, \quad \dot{y} = -l(\sin \phi)\dot{\phi},$$

so dass

$$T = \frac{m}{2} l^2 \dot{\phi}^2 = \frac{m}{2} \dot{s}^2.$$

Die Gesamtenergie ist dann

$$E = T + V = \frac{m}{2} l^2 \dot{\phi}^2 + mgl(1 - \cos \phi) = \text{const.} \quad (3.8)$$

### 3 Analytische Mechanik

gemäß Gleichung (2.29) konstant. Multiplizieren wir diese Gleichung mit  $(1/ml^2)$ , so ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{g}{l}(1 - \cos \phi) = \frac{E}{ml^2}. \quad (3.9)$$

Wir führen jetzt die dimensionslose Zeit

$$\tau \equiv \frac{t}{\sqrt{\frac{l}{g}}} \quad (3.10)$$

ein. Damit reduziert sich die Bewegungsgleichung (3.9) auf die Form

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 + (1 - \cos \phi) = \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 + 2 \sin^2 \frac{\phi}{2} = E_G, \quad (3.11)$$

mit  $E_G = E/(mgl)$ , wobei wir die trigonometrische Beziehung

$$1 - \cos \phi = 2 \sin^2 \frac{\phi}{2} \quad (3.12)$$

ausgenutzt haben. Aus Gleichung (3.11) folgt

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \sqrt{2E_G} \sqrt{1 - \frac{2}{E_G} \sin^2 \frac{\phi}{2}}. \quad (3.13)$$

Gemäß den allgemeinen Überlegungen von Kap. 2.4.3 zur Existenz von Umkehrpunkten ( $d\phi/d\tau_U = 0$ ) der Bewegung in konservativen Kraftfeldern muss für Schwingungsbewegungen der Wert von  $E_G < 2$  sein.

Substituieren wir  $\phi = 2 \arcsin Y$  in Gleichung (3.13), so folgt mit

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{2}{\sqrt{1 - Y^2}} \frac{dY}{d\tau}$$

für die Bewegungsgleichung

$$\frac{dY}{d\tau} = \left[ (1 - Y^2) \left( \frac{E_G}{2} - Y^2 \right) \right]^{1/2}. \quad (3.14)$$

Offensichtlich müssen wir drei Fälle untersuchen:

- (a)  $E_G < 2$ ,
- (b)  $E_G = 2$  und
- (c)  $E_G > 2$ ,

die wir getrennt betrachten. Dabei tauchen vollständige elliptische Integrale auf, so dass wir mit einem kurzen mathematischen Einschub beginnen.

### 3.2.1 Mathematischer Einschub: Elliptische Integrale und Elliptische Funktionen

Wir können die trigonometrische Funktion  $y = \sin \Theta$  über das Integral

$$\int_0^y \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)}} = \Theta \quad (3.15)$$

definieren, denn das Integral auf der linken Seite (LHS) dieser Gleichung ist

$$LHS = \int_0^y \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)}} = \arcsin(y) ,$$

so dass die Umkehrung dieser Gleichung gerade  $y = \sin \Theta$  ergibt. Bekanntlich hat die Sinus-Funktion die Periode  $\eta = 2\pi$ , d.h.  $\sin(\Theta + \eta) = \sin \Theta$ . Wir können die Periode  $\eta$  auch ebenso durch die Gleichung

$$\frac{\eta}{4} = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)}} = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} \quad (3.16)$$

festlegen.

Nun verallgemeinern wir die Gleichung (3.15). Sei

$$\int_0^z \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-K^2s^2)}} = u . \quad (3.17)$$

Im Fall  $K = 0$  ergibt sich gerade wieder Gleichung (3.15). Für Werte von  $K \neq 0$  nennen wir die durch Gleichung (3.17) definierte Funktion

$$z = \operatorname{sn} u , \quad (3.18)$$

deren Verhalten vom Wert von  $K$  abhängt. Ganz analog zur Sinus-Funktion definieren wir die Umkehrfunktion zu (3.18) mit  $z = \sin \phi$

$$u = F(\phi, K) = \int_0^{\sin \phi} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-K^2s^2)}} \quad (3.19)$$

als *unvollständiges elliptisches Integral 1. Art*. Ebenfalls analog zu (3.16) definieren wir die Periode  $\xi$  der  $\operatorname{sn}$ -Funktion durch

$$\frac{\xi}{4} = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-K^2s^2)}} = F\left(\frac{\pi}{2}, K\right) , \quad (3.20)$$

was man als vollständiges elliptisches Integral 1. Art bezeichnet.

Die Substitution  $s = \sin \alpha$  überführt Gleichung (3.19) in

$$F(\phi, K) = \int_0^{\phi} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-K^2 \sin^2 \alpha}} . \quad (3.21)$$

### 3.2.2 Schwingungsfall $E_G < 2$

Setzen wir in der Bewegungsgleichung (3.14)  $E_G = 2K^2$  und substituieren wir  $Y = Kz$ , so erhalten wir

$$\frac{dz}{d\tau} = \sqrt{(1 - K^2 z^2)(K^2 - K^2 z^2)},$$

oder

$$\int_0^z \frac{ds}{\sqrt{(1 - s^2)(1 - K^2 s^2)}} = \tau. \quad (3.22)$$

Gemäß unserer mathematischen Betrachtung in Kap. 3.2.1 können wir dann die Lösung (3.22) auch als  $z = \operatorname{sn} \tau$  schreiben, d.h.

$$Y(\tau) = K \operatorname{sn} \tau,$$

oder

$$Y(t) = \sqrt{\frac{E_G}{2}} \operatorname{sn} \sqrt{\frac{g}{l}} t. \quad (3.23)$$

Mit der Entwicklung

$$\frac{1}{(1 - K^2 s^2)^{1/2}} \simeq 1 + \frac{1}{2} K^2 s^2$$

im Integranden von Gleichung (3.20) folgt für die Periode der Bewegung

$$\begin{aligned} \frac{\xi}{4} &\simeq \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1 - s^2)}} \left( 1 + \frac{1}{2} K^2 s^2 \right) \\ &= \arcsin(1) + \frac{K^2}{2} \int_0^1 \frac{ds s^2}{\sqrt{(1 - s^2)}} = \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{K^2}{4} \right), \end{aligned}$$

oder

$$\xi = 2\pi \left( 1 + \frac{K^2}{4} \right). \quad (3.24)$$

Der Wert von  $K^2 = E_G/2$  bestimmt nach Gleichung (3.13) den Maximalwert der Schwingung  $\phi = U$ , an denen die Bewegung umkehrt, d.h.  $d\phi/d\tau_{\phi=U} = 0$ :

$$\sin^2 \frac{U}{2} = \frac{E_G}{2} = K^2,$$

so dass

$$K = \sin \frac{U}{2}. \quad (3.25)$$

Für kleine Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage  $U \ll 1$  folgt  $K^2 \simeq U^2/4$  und die Periode (3.24) in der normierten Zeit  $\tau$  ergibt sich zu

$$\xi = 2\pi \left( 1 + \frac{U^2}{16} \right).$$

Rechnen wir auf die nichtnormierte Zeit  $t$  um, so folgt für die Schwingungsperiode bei kleinen Auslenkungen

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{U^2}{16} \right). \quad (3.26)$$

### 3.2 Beispiel 2: Das Pendel im Schwerfeld

Bei extrem kleinen Auslenkungen  $U \ll 1$  hängt die Periode (3.26) nicht mehr von der Auslenkung  $U$  ab und ist durch  $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$  gegeben (Isochronie des mathematischen Pendels).

#### 3.2.3 Grenzfall extrem kleiner Auslenkungen $E_G \ll 1$

Der Grenzfall extrem kleiner Auslenkungen  $\phi \leq U \ll 1$  lässt sich auch direkt leicht durch die Newtonschen Bewegungsgleichungen lösen. Mit der Rückstellkraft (3.6) erhalten wir für die dynamische Gleichung (2.3) in der Variablen  $s = l\phi$  die nichtlineare Gleichung

$$m\ddot{s} = ml\ddot{\phi} = F_R = -mg \sin \phi . \quad (3.27)$$

Für extrem kleine Auslenkungen

$$\phi \leq U \ll 1$$

nähern wir 
$$F_R = -mg \sin \phi \simeq -mg\phi \quad (3.28)$$

und die dynamische Gleichung (3.27) wird zur einfachen Schwingungsgleichung

$$\ddot{\phi} + \omega^2 \phi = 0 , \quad (3.29)$$

mit

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} .$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung mit der Anfangsbedingung  $\phi(t=0) = 0$  ist

$$\phi(t) = U \sin \omega t , \quad (3.30)$$

mit der Schwingungsperiode

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} ,$$

in Übereinstimmung mit dem Ergebnis (3.26). Offensichtlich ist der Zusatzterm  $U^2/16$  in Gleichung (3.26) die niedrigste Korrektur zur Schwingungsdauer bei Berücksichtigung der Nichtlinearität der Bewegungsgleichung (3.27).

#### Übungsaufgaben:

**(A3.2.1)** Zeigen Sie durch Entwicklung des Integranden bis zur 4. Ordnung in  $K = \sin U/2$ , dass für die Periode des Pendels im Schwerfeld gilt

$$\xi = 4 \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-K^2s^2)}} \simeq 2\pi \left[ 1 + \frac{K^2}{4} + \frac{9K^4}{64} \right] .$$

**(A3.2.2)** Berechnen Sie die Periode näherungsweise bis zur 4. Ordnung im maximalen Auslenkungswinkel  $U$  zu

$$\xi \simeq 2\pi \left[ 1 + \frac{U^2}{16} + \frac{11}{3072}U^4 \right] .$$

Wie groß sind die Korrekturterme für  $U = 10^\circ, 20^\circ$  und  $45^\circ$ ?

### 3 Analytische Mechanik

#### 3.2.4 Fall $E_G = 2$

Im Fall  $E_G = 2$  reduziert sich die allgemeine Bewegungsgleichung (3.14) auf

$$\frac{dY}{d\tau} = (1 - Y^2),$$

oder mit der Anfangsbedingung  $Y(t = 0) = 0$  auf

$$\tau = \int_0^Y \frac{ds}{1 - s^2} = \operatorname{artanh} Y, \quad (3.31)$$

so dass  $Y(\tau) = \tanh \tau$ .

Für die zeitliche Variation des Winkels finden wir dann

$$\phi(\tau) = 2 \arcsin Y(\tau) = 2 \arcsin(\tanh \tau). \quad (3.32)$$

Die Grenzlage  $\phi = \pi$  wird erst für  $t \propto \tau \rightarrow \infty$  erreicht (siehe Abb. 3.3).

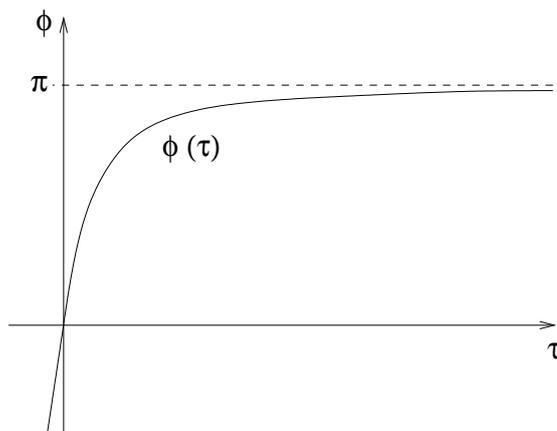


Abbildung 3.3: Pendelbewegung im Grenzfall  $E_G = 2$

#### 3.2.5 Rotationsfall $E_G > 2$

In diesem Fall ist nach Gleichung (3.11) die Gesamtenergie  $E_G$  immer größer als die potentielle Energie  $1 - \cos \phi$ , selbst an der Spitze der Bewegung  $\phi = \pi$ , d.h. der Term  $\frac{1}{2}(d\phi/d\tau)^2$ , der die kinetische Energie repräsentiert, ist immer größer Null, so dass das Pendelteilchen nie zur Ruhe kommt. Wegen der fehlenden Umkehrpunkte kann es nicht zur Schwingungsbewegung kommen: stattdessen rotiert das Teilchen ohne Ende.

### 3.3 Beschreibung von Flächen und Kurven im dreidimensionalen Raum

In der Bewegungsgleichung (3.14) setzen wir jetzt

$$\kappa^2 = \frac{2}{E_G} < 1$$

und erhalten

$$\frac{dY}{d\tau} = \sqrt{\left(\frac{1}{\kappa^2} - Y^2\right)(1 - Y^2)}$$

oder

$$\kappa \frac{dY}{d\tau} = \sqrt{(1 - \kappa^2 Y^2)(1 - Y^2)}. \quad (3.33)$$

Die Integration über die Zeit ergibt mit der Anfangsbedingung  $Y(t = 0) = 0$  dann

$$\int_0^Y \frac{ds}{\sqrt{(1 - \kappa^2 s^2)(1 - s^2)}} = \frac{\tau}{\kappa}. \quad (3.34)$$

Unter Verwendung von Gleichungen (3.17)–(3.18) erhalten wir als vollständige Lösung

$$Y(\tau) = \operatorname{sn} \frac{\tau}{\kappa} = \operatorname{sn} \left( \sqrt{\frac{E_G}{2}} \tau \right),$$

oder

$$Y(t) = \operatorname{sn} \left( \sqrt{\frac{E_G g}{2l}} t \right). \quad (3.35)$$

Übungsaufgabe:

**(A3.2.3)** Berechnen Sie in Anlehnung an die Vorlesung die Rotationsperiode des Pendels im Fall  $E_G > 2$ . Zeigen Sie, dass mit wachsendem Wert von  $E_G$  die Rotationsperiode kürzer wird.

### 3.3 Beschreibung von Flächen und Kurven im dreidimensionalen Raum

Bei eingeschränkten Bewegungen kann sich der Massenpunkt meist nur auf einer Fläche oder Kurve im dreidimensionalen Raum bewegen. So wird zum Beispiel die schiefe Ebene (siehe Kap. 3.1.1) durch die Geradengleichung

$$z = x \tan \alpha,$$

oder

$$z - x \tan \alpha = 0, \quad (3.36)$$

mit  $\alpha = \text{const.}$  beschrieben.

Wir fassen Gleichung (3.36) als Funktion der drei Ortskoordinaten  $x, y$  und  $z$  auf:

$$G(x, y, z) = z - x \tan \alpha = 0. \quad (3.37)$$

### 3 Analytische Mechanik

Flächen lassen sich ebenfalls durch Funktionen  $G(x, y, z) = 0$  darstellen. Falls sich die Fläche (z.B. Schaukel) bewegt, kommt zusätzlich noch die Abhängigkeit von der Zeit  $t$  hinzu:

$$G(x, y, z, t) = 0 . \quad (3.38)$$

Zwangsbedingungen von der Art (3.37)–(3.38) heißen *holonome* Zwangsbedingungen; zeitu-nabhängige wie in Gleichung (3.37) nennt man zusätzlich noch *skleronom*, zeitabhängige wie in Gleichung (3.38) *rheonom*. Als Beispiel für eine rheonome, holonome Zwangsbedingung dient die schaukelnde schiefe Ebene (3.36) mit zeitabhängigem Winkel  $\alpha(t)$ .

Alle Zwangsbedingungen, die sich nicht durch eine Gleichung der Art (3.38) darstellen lassen, heißen *nicht-holonom*; alle Ungleichungen fallen darunter (z.B. Lostrommel beim Lotto, bei der sich die 49 Kugeln nur innerhalb der Trommel bewegen können).

## 3.4 Lagrange-Gleichungen 1. Art

Wenn die Bewegung eines Teilchens durch eine holonome Zwangsbedingung

$$G(\vec{r}, t) = 0 \quad (3.39)$$

auf eine Fläche beschränkt wird, so bedeutet dies keine Einschränkung oder Beeinflussung für die Bewegung innerhalb der Fläche. Die Zwangskraft  $\vec{Z}$  hat daher keine Komponente in Richtung der Fläche; sie muss vielmehr orthogonal zur Fläche stehen. Wäre es nicht so, könnte die Zwangskraft den Massenpunkt in Bewegung setzen, selbst wenn keine äußeren Kräfte  $\vec{K} = 0$  vorliegen.

Aufgrund des in Gleichung (1.88) bewiesenen Satzes, dass der Gradient einer Äquipotentialfläche senkrecht zu dieser steht, gestattet Gleichung (3.39) den Ansatz

$$\begin{aligned} \vec{Z} &\parallel \text{grad } G(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} G(\vec{r}, t) , \\ \text{oder} \quad \vec{Z} &= \lambda(t) \vec{\nabla} G(\vec{r}, t) , \end{aligned} \quad (3.40)$$

wobei die *Lagrange-Parameter*  $\lambda(t)$  zunächst unbekannte Funktionen der Zeit  $t$  sind.

Für die Bewegungsgleichung (3.5) erhält man dann

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{K} + \lambda(t) \vec{\nabla} G(\vec{r}, t) , \quad G(\vec{r}, t) = 0 , \quad (3.41)$$

die *Lagrange-Gleichung 1. Art* für ein Einteilchensystem mit einer Zwangsbedingung. Die Beziehungen (3.41) bilden vier Differentialgleichungen für die vier Unbekannten  $x, y, z$  und  $\lambda$ , und die Aufgabe besteht darin, zuerst  $\lambda$  zu bestimmen und damit die Bewegungsgleichungen für die Ortskoordinaten  $x(t), y(t)$  und  $z(t)$  zu integrieren. Dieses illustrieren wir am Beispiel der schiefen Ebene.

### 3.4.1 Wieder Beispiel 1: Schiefe Ebene mit Lagrange I

Rückblickend auf Abschnitt 3.1.1 notieren wir, dass die äußere Kraft durch  $\vec{K} = (0, 0, -mg)$  gegeben ist.

Die Zwangsbedingung lautet nach Gleichung (3.37)

$$G(x, y, z) = z - x \tan \alpha = 0, \quad (3.42)$$

so dass 
$$\vec{\nabla} G = (-\tan \alpha, 0, 1). \quad (3.43)$$

Für die Bewegungsgleichung (3.41) bekommen wir in diesem Fall dann

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\tan \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Mit (3.42) und (3.44) haben wir vier Gleichungen für vier Unbekannte.

Gleichung (3.44)  $m\ddot{y} = 0$  ist trivial und ergibt sofort

$$y(t) = b_1 t + b_2, \quad (3.45)$$

mit den Integrationskonstanten  $b_1$  und  $b_2$ .

Zweimaliges Differenzieren nach der Zeit von Gleichung (3.42) führt auf

$$\ddot{z} = \ddot{x} \tan \alpha.$$

Setzen wir den Ausdruck in Gleichung (3.44) für  $\ddot{z}$  ein, so folgt

$$m(\tan \alpha) \ddot{x} = \lambda - mg,$$

oder 
$$m \ddot{x} = \frac{\lambda - mg}{\tan \alpha}. \quad (3.46)$$

Gleichung (3.46) setzen wir gleich zu Gleichung (3.44) und erhalten

$$m \ddot{x} = -\lambda \tan \alpha = \frac{\lambda - mg}{\tan \alpha},$$

oder aufgelöst nach  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{mg}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{mg \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = mg \cos^2 \alpha. \quad (3.47)$$

Damit ergibt sich mit Gleichung (3.43) für die Zwangskraft

$$\vec{Z} = \lambda \vec{\nabla} G = mg \cos^2 \alpha \begin{pmatrix} -\tan \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = mg \begin{pmatrix} -\sin \alpha \cos \alpha \\ 0 \\ \cos^2 \alpha \end{pmatrix}, \quad (3.48)$$

mit dem Betrag

$$|\vec{Z}| = mg \sqrt{\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = mg \cos \alpha.$$

### 3 Analytische Mechanik

Das Einsetzen von Gleichung (3.47) in die Bewegungsgleichungen (3.44a) und (3.44c) ergibt dann

$$m\ddot{x} = -\lambda \tan \alpha = -mg \tan \alpha \cos^2 \alpha = -mg \sin \alpha \cos \alpha, \quad (3.49)$$

$$\text{und} \quad m\ddot{z} = \lambda - mg = -mg(1 - \cos^2 \alpha) = -mg \sin^2 \alpha, \quad (3.50)$$

die identisch zu den Gleichungen (3.2) sind. Als Lösung erhält man sofort zusätzlich zu Gleichung (3.45)

$$\begin{aligned} x(t) &= a_2 + a_1 t - \frac{g}{2} t^2 \sin \alpha \cos \alpha, \\ z(t) &= c_2 + c_1 t - \frac{g}{2} t^2 \sin^2 \alpha. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Die Integrationskonstanten  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$  sind so zu bestimmen, dass die Anfangsbedingungen und die Zwangsbedingung (3.42) erfüllt sind. Aus  $y(t=0) = \dot{y}(t=0) = 0$  folgt sofort  $b_1 = b_2 = 0$ . Mit Gleichung (3.51) erhalten wir für die Zwangsbedingung (3.42) für alle Zeiten

$$\begin{aligned} z(t) - x(t) \tan \alpha &= c_2 + c_1 t - \frac{g}{2} t^2 \sin^2 \alpha - (a_2 + a_1 t) \tan \alpha + \frac{g}{2} t^2 \sin \alpha \cos \alpha \tan \alpha \\ &= c_2 + c_1 t - (a_2 + a_1 t) \tan \alpha = 0, \end{aligned}$$

oder nach Multiplikation mit  $\cos \alpha$ :

$$(c_1 \cos \alpha - a_1 \sin \alpha) t + c_2 \cos \alpha - a_2 \sin \alpha = 0. \quad (3.52)$$

Weil Gleichung (3.52) für alle Zeiten  $t$  gelten muss, folgt

$$a_1 \sin \alpha = c_1 \cos \alpha, \quad a_2 \sin \alpha = c_2 \cos \alpha \quad (3.53)$$

Damit sind nur noch zwei der ursprünglich sechs Integrationskonstanten offen.

Wählen wir  $a_1 = V_0 \cos \alpha$  und  $c_1 = V_0 \sin \alpha$ , was  $a_2 = r_0 \cos \alpha$  und  $c_2 = r_0 \sin \alpha$  mit  $V_0 = \dot{r}_0$  impliziert, so erhalten wir nach (3.51) und (3.45)

$$\begin{aligned} x(t) &= \left[ -\frac{g}{2} t^2 \sin \alpha + V_0 t + r_0 \right] \cos \alpha, \\ y(t) &= 0, \\ z(t) &= \left[ -\frac{g}{2} t^2 \sin \alpha + V_0 t + r_0 \right] \sin \alpha, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \cos \alpha, \\ y(t) &= 0, \\ z(t) &= r(t) \sin \alpha, \end{aligned} \quad (3.54)$$

mit

$$r(t) = -\frac{g}{2} t^2 \sin \alpha + V_0 t + r_0, \quad (3.55)$$

womit das Problem vollständig gelöst ist.

### 3.4.2 Allgemeiner Fall

Treten in einem physikalischen System  $p$  Zwangsbedingungen  $G_j, j = 1, \dots, p$  auf, so lauten die Lagrange-Gleichungen 1. Art für die Bewegung eines Massenpunktes

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{K} + \sum_{j=1}^p \lambda_j(t) \vec{\nabla} G_j(\vec{r}, t) . \quad (3.56)$$

Die Zwangskraft ergibt sich also proportional zur Summe der Gradienten der Zwangsbedingungen.

Dies kann man für 2 Zwangsbedingungen  $G_1$  und  $G_2$  leicht veranschaulichen: Das Schnittgebilde der durch die Zwangsbedingungen vorgegebenen Ebenen  $G_1$  und  $G_2$  ist eine Kurve, und der Gradient jeder der beiden Zwangsbedingungen steht senkrecht auf dieser Kurve, da er senkrecht auf der jeweiligen Ebene steht. Sind die Zwangsbedingungen voneinander unabhängig, so sind  $\vec{\nabla} G_1$  und  $\vec{\nabla} G_2$  linear unabhängige Vektoren, und jeder auf der Schnittkurve senkrecht stehende Vektor kann als Linearkombination der beiden Gradienten geschrieben werden.

Verallgemeinert man Gleichung (3.56) auf ein System von  $N$  Massenpunkten  $m_i, i = 1, \dots, N$  und  $p$  Zwangsbedingungen  $G_j, j = 1, \dots, p$ , so erhalten wir  $N$  Lagrange-Gleichungen 1. Art

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{K}_i + \sum_{j=1}^p \lambda_j(t) \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} G_j(\vec{r}_i, t) , \quad i = 1, \dots, N . \quad (3.57)$$

### 3.4.3 Kochrezept für Lagrange-Gleichungen 1. Art

Im Sinne eines "Kochrezepts" fassen wir das Lösungsverfahren bei Lagrange-Gleichungen 1. Art zusammen:

1. Wähle geeignete Koordinaten.
2. Formuliere die äußeren Kräfte  $\vec{K}$ .
3. Formuliere die Zwangsbedingungen in der Form  $G_j(x, y, z, t) = 0$ .
4. Berechne  $\vec{\nabla} G_j$ .
5. Stelle die Bewegungsgleichung  $m\ddot{\vec{r}} = \vec{K} + \sum_j \lambda_j \vec{\nabla} G_j$  auf.
6. Leite die Zwangsbedingungen zweimal nach der Zeit  $t$  ab.
7. Löse das aus (5) und (6) bestehende Gleichungssystem.

Übungsaufgabe:

**(A3.4.1)** Hantel auf 2 zueinander senkrechten Achsen (Volz I, S. 137ff)

### 3.4.4 Bemerkung zu Zwangsbedingungen

Die holonome Zwangsbedingung  $G(x, y, z, t) = 0$  kann auch in differentieller Form definiert werden: Eine beliebige Zwangsbedingung

$$a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz + a_4 dt = 0 \quad (3.58)$$

heißt *holonom*, falls es eine Funktion  $G : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^1$  gibt mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} &= a_1, \\ \frac{\partial G}{\partial y} &= a_2, \\ \frac{\partial G}{\partial z} &= a_3, \\ \frac{\partial G}{\partial t} &= a_4, \end{aligned}$$

und  $G(x, y, z, t) = 0$ . (3.59)

Ist  $a_4 = 0$ , ist sie *skleronom* und für das totale Differential von  $G$  gilt

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy + \frac{\partial G}{\partial z} dz. \quad (3.60)$$

Ist  $a_4 \neq 0$ , ist sie *rheonom* und für das totale Differential von  $G$  gilt

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy + \frac{\partial G}{\partial z} dz + \frac{\partial G}{\partial t} dt. \quad (3.61)$$

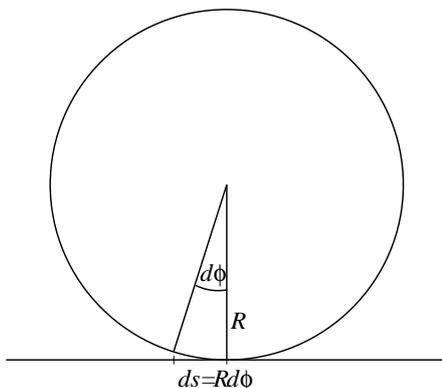


Abbildung 3.4: Abrollen eines Rads auf einer festgelegten Geraden

Ein Beispiel für eine skleronome Zwangsbedingung ist das in Abb. 3.4 dargestellte Abrollen eines Rads auf einer festgelegten Geraden:

$$ds - R d\phi = 0, \quad (3.62)$$

### 3.5 Energieerhaltungssatz im Fall von holonomen Zwangsbedingungen

deren Stammfunktion durch  $G(s, \phi) = s - R\phi$  gegeben ist.

Alle Zwangsbedingungen, die die Definition (3.58) nicht erfüllen, werden als *nicht-holonome* Zwangsbedingungen bezeichnet. Dazu gehören die bereits erwähnten Ungleichungen (z.B. Teilchen innerhalb einer Kugel  $|\vec{r}| \leq R$ , wobei  $R$  den Kugelradius bezeichnet), oder Zwangsbedingungen in Form von nicht-integrablen Differentialformen.

### 3.5 Energieerhaltungssatz im Fall von holonomen Zwangsbedingungen

Betrachten wir jetzt die Energieerhaltung eines Systems mit  $N$  Massenpunkten. Schreiben wir in den Gleichungen (3.57) die Ortsvektoren  $\vec{r}_i = (x_1, x_2, x_3)$  in Komponentendarstellung, so erhalten wir die  $3N$  Gleichungen

$$m_i \ddot{x}_i = K_i + \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial G_j}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, 3N, \quad (3.63)$$

mit 
$$G_j(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0, \quad j = 1, \dots, p. \quad (3.64)$$

Wir multiplizieren Gleichung (3.63) mit  $\dot{x}_i$  und summieren über alle  $i$ . Für den ersten Term der Gleichung ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \dot{x}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{3N} \frac{m_i}{2} (\dot{x}_i)^2 = \frac{d}{dt} T$$

wobei  $T$  die gesamte kinetische Energie des Systems bezeichnet.

Wir nehmen an, dass das äußere Kraftfeld konservativ ist, d.h. als Gradient eines Potentials  $U$  dargestellt werden kann:

$$K_i = - \frac{\partial U}{\partial x_i} \quad (3.65)$$

Wir erhalten dann für den zweiten Term in Gleichung (3.63) nach Multiplikation mit  $\dot{x}_i$  und Summation über alle  $i$ :

$$\sum_{i=1}^{3N} K_i \dot{x}_i = - \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial U}{\partial x_i} \dot{x}_i = - \frac{d}{dt} U(x_1, \dots, x_{3N}).$$

Damit erhalten wir aus Gleichung (3.63)

$$\frac{d}{dt} (T + U) = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{3N} \lambda_j \frac{\partial G_j}{\partial x_i} \dot{x}_i. \quad (3.66)$$

Die Lösungen der Bewegungsgleichungen  $x_i(t)$  müssen die Zwangsbedingungen (3.64)

$$G_j(x_1(t), \dots, x_{3N}(t), t) = 0$$

### 3 Analytische Mechanik

erfüllen. Durch Differenzieren nach der Zeit folgt daraus

$$\frac{dG_j}{dt} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial G_j}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial G_j}{\partial t} = 0,$$

oder

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial G_j}{\partial x_i} \dot{x}_i = -\frac{\partial G_j}{\partial t}. \quad (3.67)$$

Setzen wir dieses Ergebnis in Gleichung (3.66) ein, erhalten wir

$$\frac{d}{dt}(T + U) = -\sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial G_j}{\partial t}. \quad (3.68)$$

Wir folgern: *Sind die Kräfte konservativ und die Zwangsbedingungen zeitunabhängig (skleronom), so ist die Summe  $T + U$  aus kinetischer und potentieller Energie konstant.*

Für das in Abschnitt 3.2 diskutierte ebene Pendel gilt dieser Energieerhaltungssatz.

## 3.6 Das Prinzip von d'Alembert

Wir beginnen wieder mit der Bewegungsgleichung (3.5) für einen Massenpunkt

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{K} + \vec{Z}$$

und betrachten zunächst den statischen Fall

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{0}.$$

Dann herrscht das Gleichgewicht der Kräfte

$$\vec{K} + \vec{Z} = \vec{0}. \quad (3.69)$$

### 3.6.1 Virtuelle Verrückung $\delta\vec{r}$ eines Massenpunktes

Unter einer virtuellen Verrückung  $\delta\vec{r}$  eines Massenpunktes (oder allgemeiner  $\delta\vec{r}_i$  des Massenpunktes  $i$ ) verstehen wir eine infinitesimal kleine, gedachte Ortsveränderung mit zwei wesentlichen Eigenschaften:

- (a) Sie verläuft in Übereinstimmung mit den Zwangsbedingungen (z.B. entlang der schiefen Ebene), d.h. anstatt der Aussage  $\vec{Z} \parallel \text{grad } G$  tritt das *Prinzip der virtuellen Arbeit*

$$\vec{Z} \cdot \delta\vec{r} = 0, \quad (3.70)$$

denn  $\vec{Z} \perp \delta\vec{r}$ .

Allgemeiner lautet Gleichung (3.70)

$$\sum_i \vec{Z}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0. \quad (3.71)$$

Zwangskräfte verrichten keine virtuelle Arbeit!

- (b) Die virtuelle Verrückung ist *instantan*, d.h. die Zwangsbedingungen verändern sich während der Verrückung nicht. Bei skleronomen Zwangsbedingungen braucht diese zweite Eigenschaft sowieso nicht gefordert werden.

Durch die virtuelle Verrückung wird durch die Anwesenheit von Kräften eine (ebenso gedachte) *virtuelle Arbeit* geleistet. Mit  $\vec{F}_{tot} = \vec{K} + \vec{Z}$  folgt für die virtuelle Arbeit

$$\delta A = \vec{F}_{tot} \cdot \delta \vec{r} = \vec{K} \cdot \delta \vec{r} + \vec{Z} \cdot \delta \vec{r} = \vec{K} \cdot \delta \vec{r}, \quad (3.72)$$

weil aufgrund Gleichung (3.70) der Beitrag der Zwangskräfte verschwindet.

Die Ableitung von Gleichung (3.70) ist bei einfachen mechanischen Problemen wie der schiefen Ebene anschaulich verständlich und daher nachvollziehbar. Bei komplizierteren mechanischen Problemen ist die Anschauung nicht mehr gegeben, so dass man den Spieß umdrehen muss und das *Prinzip als allgemeingültig erklären muss!* Das Prinzip der virtuellen Verrückung ist also eine mathematisch nicht herleitbare, sondern aus der physikalischen Erkenntnis gewonnene Erweiterung der Newtonschen Mechanik.

### 3.6.2 Allgemeiner nichtstatischer Fall

Wir betrachten jetzt den nichtstatischen ( $\ddot{\vec{r}} \neq \vec{0}$ ) Fall der Dynamik eines Systems von Massenpunkten, deren Bewegungsgleichungen

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i$$

wir für alle  $i$  als

$$\left( \vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i \right) = \vec{0} \quad (3.73)$$

schreiben. Durch Einführung von äußeren Kräften und Zwangskräften und skalare Multiplikation mit den virtuellen Verrückungen  $\delta \vec{r}_i$  erhalten wir

$$\sum_i \left( \vec{K}_i + \vec{Z}_i - \dot{\vec{p}}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (3.74)$$

Unter Ausnutzung des Prinzips der virtuellen Verrückung (3.71) folgt das *Prinzip von d'Alembert* für ein System von Massenpunkten

$$\sum_i \left( \vec{K}_i - \dot{\vec{p}}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (3.75)$$

Für einen Massenpunkt  $i = 1$  reduziert sich Gleichung (3.75) auf

$$\left( \vec{K} - \dot{\vec{p}} \right) \cdot \delta \vec{r} = 0. \quad (3.76)$$

Die Projektion der Bewegungsgleichungen auf die virtuellen Verrückungen in den Gleichungen (3.75) und (3.76) eliminiert also die Zwangskräfte bei der Behandlung des mechanischen Problems. Das ist gut, hat aber zunächst noch einen Nachteil: Während (3.74) auch für alle einzelnen Werte von  $i$  gilt, ist dies nicht mehr der Fall bei Gleichung (3.75), weil die virtuellen

### 3 Analytische Mechanik

Verrückungen  $\delta\vec{r}_i$  nicht mehr linear unabhängig sind, da sie die Zwangsbedingungen erfüllen! Deshalb folgt im statischen Fall  $\vec{p} = 0$  aus Gleichung (3.76) auch nicht  $\vec{K} = 0$ , denn die Komponenten  $\delta x, \delta y$  und  $\delta z$  der virtuellen Verrückung sind aufgrund der Zwangsbedingungen nicht voneinander unabhängig. Diesen Nachteil können wir beheben, indem wir auf geeignet gewählte neue verallgemeinerte Koordinaten übergehen.

#### 3.6.3 Verallgemeinerte Koordinaten

Es sollen nun die durch die Zwangsbedingungen voneinander abhängigen Koordinaten ( $\vec{r}_i$ ) durch eine Transformation auf ein System von unabhängigen Koordinaten ( $\vec{q}_j$ ) zurückgeführt werden, sogenannte *verallgemeinerte Koordinaten*. Erst wenn die virtuellen Verrückungen (in den verallgemeinerten Koordinaten) voneinander unabhängig sind, können die Koeffizienten der  $\delta\vec{q}_j$  einzeln gleich Null gesetzt werden. Der Raum der verallgemeinerten Koordinaten heißt *Konfigurationsraum* und seine Dimension nennt man die Anzahl der *Freiheitsgrade*. Im Fall von holonomen Zwangsbedingungen heißt das, dass die Zwangsbedingungen für beliebige Werte der  $q_j$  erfüllt sind:

$$G_m(x_1(q_1, \dots, q_s, t), \dots, x_{3N}(q_1, \dots, q_s, t), t) = 0, \quad \forall q_j. \quad (3.77)$$

Dies verdeutlichen wir an zwei bereits bekannten Beispielen:

- (a) Vernachlässigen wir bei der schiefen Ebene in Abb. 3.1 die triviale Tiefe  $y$ , so handelt es sich um ein zweidimensionales mechanisches Problem in  $x$  und  $z$ . Wählen wir die Strecke  $s$  auf der schiefen Ebene als verallgemeinerte Koordinate, so legt diese die zwei kartesischen Koordinaten gemäß  $x = s \cos \alpha$  und  $z = s \sin \alpha$  fest.

Die holonome Zwangsbedingung (3.42) ist dann automatisch erfüllt, denn

$$G(x(s), z(s)) = z - x \tan \alpha = s \sin \alpha - s \cos \alpha \tan \alpha = 0$$

und wir haben es mit einem eindimensionalen Problem in der verallgemeinerten Koordinate  $s$  zu tun.

- (b) Beim ebenen Pendel wählen wir den Auslenkungswinkel  $\phi$  als verallgemeinerte Koordinate, der dann die zwei kartesischen Koordinaten gemäß  $x = l \sin \phi$  und  $y = l \cos \phi$  festlegt. Die holonome Zwangsbedingung (3.4 b) ist dann wieder automatisch erfüllt, denn

$$G(x(\phi), y(\phi)) = x^2(\phi) + y^2(\phi) = l^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = l^2.$$

Für holonome Zwangsbedingungen lässt sich das Prinzip von d'Alembert (3.75) aus den Lagrange-Gleichungen 1. Art (3.57) begründen. Die Unabhängigkeit der Zwangsbedingungen (3.77) von  $q_j$  bedeutet für die totale Ableitung

$$\frac{dG_m}{dq_j} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial G_m}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = 0. \quad (3.78)$$

Multiplizieren wir (3.57) mit  $\partial x_i / \partial q_k$  und summieren über  $i$  so folgt wegen (3.78)

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{3N} K_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \sum_{m=1}^p \lambda_m \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial G_m}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{3N} K_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \quad (3.79)$$

die Elimination der Zwangskräfte. Gleichung (3.79) entspricht in diesem Fall dem Prinzip von d'Alembert (3.75).

Im allgemeinen Fall der Dynamik von  $N$  Teilchen im dreidimensionalen Ortsraum bei Vorliegen von  $k$  Zwangsbedingungen  $G_m = 0$  ( $m = 1, \dots, k$ ) ergibt sich die Zahl der Freiheitsgrade (d.h. die Anzahl der nötigen verallgemeinerten Koordinaten) zu  $s = 3N - k$ . Wir suchen also die Transformation der abhängigen Koordinaten, d.h. der Vektoren  $\vec{r}_i, i = 1, \dots, N$ , auf verallgemeinerte Koordinaten  $q_j$  ( $j = 1, \dots, s$ ):

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_s, t) \quad (3.80)$$

Gemäß der Kettenregel folgt dann für die Geschwindigkeiten

$$\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad (3.81)$$

und die virtuellen Verrückungen

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (3.82)$$

In Gleichung (3.82) taucht keine partielle Ableitung nach der Zeit  $t$  auf, weil nach Definition die virtuellen Verrückungen  $\delta \vec{r}_i$  instantan in der Zeit sind. Virtuelle Verrückungen beziehen sich nur auf Auslenkungen der Koordinaten.

Aus Gleichung (3.81) folgt sofort

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \quad (3.83)$$

### 3.7 Lagrange-Gleichungen 2. Art

Wir gehen jetzt aus vom Prinzip von d'Alembert (3.75),

$$\sum_{i=1}^N (\vec{K}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0, \quad (3.84)$$

und betrachten die einzelnen Terme in dieser Gleichung.

Mit der Hilfsformel (3.82) folgt für den ersten Term

$$I_1 = \sum_{i=1}^N \vec{K}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^s \vec{K}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j, \quad (3.85)$$

### 3 Analytische Mechanik

wobei wir die *verallgemeinerte Kraft* durch

$$Q_j \equiv \sum_{i=1}^N \vec{K}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (3.86)$$

einführen.

Die Umwandlung des zweiten Terms ist etwas umfangreicher. Mit derselben Hilfsformel erhalten wir

$$I_2 = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^s m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (3.87)$$

Wir nutzen

$$\frac{d}{dt} \left[ \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] = \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] \quad (3.88)$$

und vertauschen im zweiten Term auf der rechten Seite die Ableitungen, denn

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_k \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k = \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) \end{aligned}$$

Dann erhalten wir aus Gleichung (3.88)

$$\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left[ \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right).$$

Eingesetzt in Gleichung (3.87) folgt

$$I_2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^s m_i \left[ \frac{d}{dt} \left( \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j.$$

Mit der Hilfsformel (3.83) im ersten Term auf der rechten Seite erhalten wir

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^s m_i \left[ \frac{d}{dt} \left( \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^s m_i \left[ \frac{d}{dt} \left( \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^s \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} v_i^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} v_i^2 \right) \right] \delta q_j. \end{aligned}$$

Mit der kinetischen Energie  $T = \sum_{i=1}^N (m_i/2) v_i^2$  ergibt sich also

$$I_2 = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^s \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j. \quad (3.89)$$

Einsetzen der Gleichungen (3.85) und (3.89) in Gleichung (3.84) führt auf

$$\sum_{i=1}^N (\vec{K}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^s \left[ Q_j - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j . \quad (3.90)$$

Wenn nun, wie angenommen, die Zwangsbedingungen holonom sind, dann sind die verallgemeinerten Koordinaten  $q_j$  unabhängig voneinander, ebenso wie die  $\delta q_j$ , so dass jeder einzelne Koeffizient in Gleichung (3.90) verschwinden muss. Es ergeben sich dann die  $s$  Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j , \quad j = 1, \dots, s . \quad (3.91)$$

Die Gleichungen (3.91) werden als *Lagrange-Gleichungen 2. Art in allgemeiner Form* bezeichnet.

Ein wichtiger Spezialfall sind konservative Kräfte (siehe Kap. 2.3.4), für die das äußere Kraftfeld als Gradient eines **geschwindigkeitsunabhängigen** Potentials  $V(x, y, z)$  dargestellt werden kann,

$$\vec{K}_i = -\vec{\nabla}_i V(x, y, z) . \quad (3.92)$$

In diesem Fall folgt für die verallgemeinerte Kraft (3.86) mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} Q_j &\equiv \sum_{i=1}^N \vec{K}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \vec{\nabla}_i V \\ &= - \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} \vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y_i} \vec{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z_i} \vec{e}_z \right) \cdot \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \vec{e}_x + \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \vec{e}_y + \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \vec{e}_z \right) \\ &= - \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) = - \frac{\partial V}{\partial q_j} , \end{aligned} \quad (3.93)$$

weil die  $q_j$  die verallgemeinerten Koordinatenkomponenten bezeichnen (kein Faktor 3). Für das geschwindigkeitsunabhängige Potential (3.92) gilt weiterhin

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} &= 0 , \\ \text{oder} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right) &= 0 . \end{aligned} \quad (3.94)$$

Wir erhalten dann für die allgemeinen Lagrange-Gleichungen (3.91)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \left[ \frac{\partial V}{\partial q_j} - 0 \right] = - \left[ \frac{\partial V}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right) \right]$$

und mit der *Lagrange-Funktion*

$$L \equiv T - V , \quad (3.95)$$

### 3 Analytische Mechanik

die als Differenz der kinetischen und potentiellen Energie definiert ist, die *Lagrange-Gleichungen 2. Art* zu

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, s. \quad (3.96)$$

Die Lagrange-Gleichungen 2. Art (3.96) sind aus mehreren Gründen die bevorzugten Gleichungen zur Lösung mechanischer Probleme:

1. Im Vergleich zu den Lagrange-Gleichungen 1. Art haben wir es nur mit  $s = 3N - k$  anstatt  $3N + k$  Gleichungen zu tun. Wir verzichten dabei auf die Berechnung der Zwangskräfte.
2. Für komplexe Systeme lässt sich die Lagrange-Funktion (3.95) viel einfacher aufstellen als alle Kraftterme.
3. Die Lagrange-Funktion ist im Allgemeinen eine besonders einfache Funktion der in Frage kommenden Variablen. Dies ist auch wichtig für die Entwicklung neuer physikalischer Theorien insbesondere in der Feldtheorie.
4. Die Lagrange-Funktion ist im Gegensatz zu den vektoriellen Kräften eine skalare Größe und deshalb bei Koordinatentransformationen eine invariante Größe.

Wir behandeln später die Konsequenzen für die allgemeinen Lagrange-Gleichungen 2. Art (3.91) bei Vorliegen von geschwindigkeitsabhängigen Kräften und/oder nicht-holonomen Zwangsbedingungen, wenn also die Voraussetzungen zur Ableitung der Gleichungen (3.96) anders sind.

## 3.8 Einfache Anwendungen

### 3.8.1 Kräftefreie Bewegung

Im Fall der kräftefreien Bewegung ( $V = 0$ ) verwenden wir die natürlichen auch als verallgemeinerte Koordinaten. Die Lagrange-Funktion ist dann durch

$$L = T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

gegeben. Mit

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

folgen für die drei Lagrange-Gleichungen (3.96)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = m\ddot{y} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = m\ddot{z} = 0,$$

deren Lösungen die gleichförmige Bewegung ergibt.

### 3.8.2 Atwoodsche Fallmaschine

Als Beispiel eines konservativen physikalischen Systems mit skleronomen Zwangsbedingungen betrachten wir eine masselose Rolle mit dem Radius  $R$ , über die zwei Massen miteinander durch ein masseloses Seil der Länge  $l + \pi R$  verbunden sind (siehe Abb. 3.5). Auf die Massen  $m_1$  und  $m_2$  wirkt das Schwerfeld.

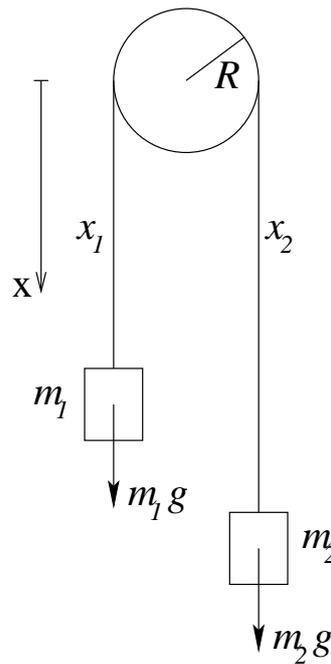


Abbildung 3.5: Atwoodsche Fallmaschine

Die Zwangsbedingung lautet  $x_1 + x_2 = l$ . Als verallgemeinerte Koordinate wählen wir den Ort der ersten Masse  $q = x_1$ . Aufgrund der Zwangsbedingung gilt  $x_2 = l - q$ .

Für die kinetische Energie erhalten wir dann

$$T = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2 = \frac{m_1}{2} \dot{q}^2 + \frac{m_2}{2} \dot{q}^2 ,$$

während die potentielle Energie durch

$$V = -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 = -m_1 g q - m_2 g (l - q)$$

gegeben ist. Damit erhalten wir für die Lagrange-Funktion (3.95)

$$L = T - V = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{q}^2 + g [m_1 q + m_2 (l - q)] . \quad (3.97)$$

### 3 Analytische Mechanik

Durch Differentiation folgt

$$\frac{\partial L}{\partial q} = (m_1 - m_2)g$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = (m_1 + m_2)\dot{q},$$

so dass

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = (m_1 + m_2)\ddot{q}.$$

Die Lagrange-Gleichung 2.Art (3.96) lautet in diesem Fall dann

$$(m_1 + m_2)\ddot{q} - (m_1 - m_2)g = 0,$$

oder

$$\ddot{q} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g,$$

mit der allgemeinen Lösung

$$q(t) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \frac{g}{2} t^2 + c_1 t + c_2. \quad (3.98)$$

Man erhält eine durch das Verhältnis der Massen veränderte Fallbeschleunigung.

#### 3.8.3 Allgemeine Form der kinetischen Energie

Gemäß Gleichung (3.81)

$$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

folgt für die kinetische Energie

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s a_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j + 2 \sum_{j=1}^s b_j \dot{q}_j + c, \end{aligned} \quad (3.99)$$

mit

$$a_{kj} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}, \quad (3.100)$$

$$b_j = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad (3.101)$$

und

$$c = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2. \quad (3.102)$$

Ist die Koordinatentransformation  $\vec{r}_i \rightarrow q_j$  zeitunabhängig, d.h.

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0,$$

so sind die Koeffizienten (3.101) und (3.102) identisch gleich Null

$$b_j = c = 0 ,$$

und die kinetische Energie (3.99)

$$T = \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s a_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j \quad (3.103)$$

reduziert sich auf eine *homogene* Funktion 2. Grades in den verallgemeinerten Geschwindigkeiten.

Unter einer homogenen Funktion  $f(x)$  vom Grade  $n$  versteht man die Eigenschaft

$$f(\lambda x) = \lambda^n f(x) , \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^1 . \quad (3.104)$$

Betrachten wir als Beispiel den Übergang von zweidimensionalen kartesischen Koordinaten  $(x, y)$  auf ebene Polarkoordinaten  $(r, \theta)$  mit den zeitunabhängigen Transformationen (vergleiche Kap. 1.8.3)  $x = r \cos \theta$  und  $y = r \sin \theta$ .

Mit

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \theta - r(\sin \theta) \dot{\theta} , \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta + r(\cos \theta) \dot{\theta} \end{aligned}$$

folgt für die kinetische Energie eines Massenpunkts

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &= \frac{m}{2} \left[ \dot{r}^2 \cos^2 \theta - 2r\dot{r} \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} + r^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 \sin^2 \theta + 2r\dot{r} \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} + r^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 \right] \\ &= \frac{m}{2} \left[ \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 \right] \end{aligned} \quad (3.105)$$

wieder eine homogene Funktion 2. Grades in den neuen Koordinaten.

### 3.8.4 Kochrezept für Lagrange-Gleichungen 2.Art

Im Sinne eines "Kochrezepts" fassen wir das Lösungsverfahren bei Lagrange-Gleichungen 2. Art zusammen:

1. Wahl der verallgemeinerten Koordinaten  $q$  und Angabe der Transformationen  $x = x(q, t)$  zu den kartesischen Koordinaten.
2. Bestimmung der Lagrange-Funktion  $L(q, \dot{q}, t)$ .
3. Aufstellen der Bewegungsgleichungen.
4. Bestimmung der Erhaltungsgrößen.
5. Lösung der Bewegungsgleichungen, evtl. unter Verwendung von Erhaltungsgrößen.
6. Bestimmung der Integrationskonstanten.
7. Diskussion der Lösung.

## 3.9 Weitere Anwendungen

### 3.9.1 Schiefe Ebene

(Vergleiche mit Kap. 3.1.1 und 3.4.1)

Wir wählen die Weglänge  $s$  auf der schiefen Ebene (siehe Abb. 3.1) als verallgemeinerte Koordinate. Dann lauten die Transformationen zu den kartesischen Koordinaten

$$x = x(s) = s \cos \alpha, \quad y = y(s) = 0, \quad z = z(s) = s \sin \alpha. \quad (3.106)$$

Aus

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad \text{und} \quad V = mgz$$

folgen 
$$T = \frac{m}{2} \dot{s}^2, \quad V = mgs \sin \alpha,$$

so dass die Lagrange-Funktion durch

$$L = T - V = \frac{m}{2} \dot{s}^2 - mgs \sin \alpha \quad (3.107)$$

gegeben ist. Mit

$$\frac{\partial L}{\partial s} = -mg \sin \alpha, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m\dot{s}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \right) = m\ddot{s}$$

folgt als Lagrange-Gleichung

$$m\ddot{s} = -mg \sin \alpha,$$

mit der allgemeinen Lösung

$$s(t) = -\frac{g}{2} t^2 \sin \alpha + V_0 t + s_0. \quad (3.108)$$

### 3.9.2 Doppelpendel

Wir betrachten zwei Teilchen der Massen  $m_1$  und  $m_2$ , die durch einen leichten (masselosen) Stab der Länge  $l_2$  verbunden sind, und die durch einen ähnlichen Stab der Länge  $l_1$  im Ursprung aufgehängt sind, der an einem der Teilchen befestigt ist (Abb. 3.6).

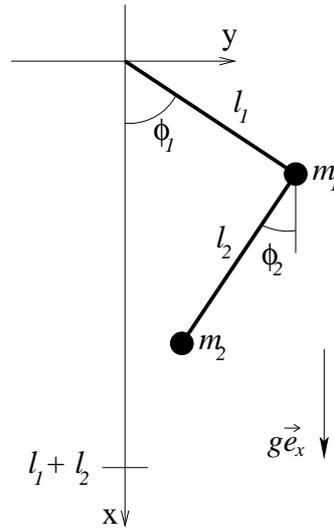
Geeignete verallgemeinerte Koordinaten sind die beiden Winkel  $\theta_1$  und  $\theta_2$ , die mit den kartesischen Ortsvektoren über

$$x_1 = l_1 \cos \theta_1, \quad y_1 = l_1 \sin \theta_1$$

und 
$$x_2 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2, \quad y_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2$$

zusammenhängen. Mit

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1, & \dot{y}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1, \\ \dot{x}_2 &= -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2, & \dot{y}_2 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \end{aligned}$$

Abbildung 3.6: Doppelpendel ( $\phi = \theta$ )

folgt für die kinetische Energie des Systems

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\
 &= \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} \left[ l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_1 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \right. \\
 &\quad \left. + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \sin^2 \theta_2 + l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_1 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2 \theta_2 \right] \\
 &= \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} \left[ l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2) \right] \\
 &= \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} \left[ l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right], \quad (3.109)
 \end{aligned}$$

wobei wir  $\sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 = \cos(\theta_1 - \theta_2)$

benutzt haben.

Die potentielle Energie in Bezug auf die Ebene im Abstand  $l_1 + l_2$  unterhalb des Aufhängepunkts lautet

$$V = m_1 g [(l_1 + l_2) - l_1 \cos \theta_1] + m_2 g [(l_1 + l_2) - (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2)]. \quad (3.110)$$

Für die Lagrange-Funktion erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
 L = T - V &= \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} \left[ l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right] \\
 &\quad - m_1 g [(l_1 + l_2) - l_1 \cos \theta_1] \\
 &\quad - m_2 g [(l_1 + l_2) - (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2)]. \quad (3.111)
 \end{aligned}$$

### 3 Analytische Mechanik

Wir bestimmen jetzt die zwei Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \quad (3.112)$$

und 
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 . \quad (3.113)$$

Mit

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_1 l_1 g \sin \theta_1 - m_2 l_1 g \sin \theta_1 ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

und 
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 [\sin(\theta_1 - \theta_2)] (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

folgt für die erste Lagrange-Gleichung (3.112)

$$(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) l_1 g \sin \theta_1 = 0 . \quad (3.114)$$

Ebenso mit

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_2 g \sin \theta_2 ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

und 
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 [\sin(\theta_1 - \theta_2)] (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

folgt für die zweite Lagrange-Gleichung (3.113)

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 [\sin(\theta_1 - \theta_2)] (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 g \sin \theta_2 = 0$$

also 
$$l_2^2 \ddot{\theta}_2 + l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 g \sin \theta_2 = 0 . \quad (3.115)$$

Für den *Spezialfall* gleicher Massen ( $m_1 = m_2 = m$ ) und Aufhängelängen  $l_1 = l_2 = l$  reduzieren sich die beiden Lagrange-Gleichungen (3.114)–(3.115) auf das nichtlineare System

(a) 
$$2l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 2g \sin \theta_1 = 0$$

(b) 
$$l\ddot{\theta}_2 + l\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - l\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g \sin \theta_2 = 0 , \quad (3.116)$$

dessen Lösung wir für den Grenzfall kleiner Auslenkungen ( $\theta_{1,2} \ll 1$ ) diskutieren. In diesem Grenzfall nähern wir

$$\sin \theta \simeq \theta, \quad \cos \theta \simeq 1$$

und vernachlässigen Terme  $\propto \dot{\theta}^2$ . Das Gleichungssystem (3.116) reduziert sich dann auf

$$\begin{aligned} (a) \quad & 2l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 \simeq -2g\theta_1 \\ \text{und} \quad (b) \quad & l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 \simeq -g\theta_2. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Mit den Lösungsansätzen

$$\theta_{1,2} = A_{1,2} \exp(i\omega t), \quad A_{1,2} = \text{const.}, \quad \omega = \text{const.} \quad (3.118)$$

folgt mit  $\dot{\theta}_{1,2} = i\omega A_{1,2} \exp(i\omega t) = i\omega\theta_{1,2}$

und  $\ddot{\theta}_{1,2} = -\omega^2 A_{1,2} \exp(i\omega t) = -\omega^2\theta_{1,2}$

für das System (3.117)

$$\begin{aligned} (a) \quad & 2(g - l\omega^2) A_1 - l\omega^2 A_2 = 0 \\ (b) \quad & -l\omega^2 A_1 + (g - l\omega^2) A_2 = 0. \end{aligned} \quad (3.119)$$

Damit eine Lösung des Gleichungssystems (3.119) existiert, muss die Determinante

$$\begin{vmatrix} 2(g - l\omega^2) & -l\omega^2 \\ -l\omega^2 & (g - l\omega^2) \end{vmatrix} = 2(g - l\omega^2)^2 - l^2\omega^4 = 0$$

verschwinden. Diese Bedingung führt auf

$$\omega^4 - \frac{4g}{l}\omega^2 + 2\left(\frac{g}{l}\right)^2 = 0,$$

mit den beiden Lösungen

$$\omega_1^2 = (2 + \sqrt{2}) \frac{g}{l}, \quad \omega_2^2 = (2 - \sqrt{2}) \frac{g}{l}. \quad (3.120)$$

Aus Gleichung (3.119 b) folgt für die Amplituden

$$A_2 = \frac{l\omega^2}{g - l\omega^2} A_1. \quad (3.121)$$

Für die erste Lösung

$$\begin{aligned} \omega^2 = \omega_1^2 \quad & \text{folgt} \quad l\omega_1^2 = (2 + \sqrt{2})g \\ \text{und} \quad \frac{A_2}{A_1} &= \frac{2 + \sqrt{2}}{1 - (2 + \sqrt{2})} = -\frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \\ &= -\frac{(2 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})}{1 - 2} = 2 + \sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 2 = -\sqrt{2}, \end{aligned}$$

### 3 Analytische Mechanik

d.h. die Massenpunkte schwingen mit entgegengesetzter Amplitude mit der Frequenz

$$\omega_1 = \sqrt{\left(2 + \sqrt{2}\right) \frac{g}{l}}.$$

Für die zweite Lösung

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_2^2 & \text{folgt} & \quad l\omega_2^2 = (2 - \sqrt{2})g \\ \text{und} \quad \frac{A_2}{A_1} &= \frac{2 - \sqrt{2}}{1 - (2 - \sqrt{2})} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = (2 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{2}, \end{aligned}$$

d.h. die Massenpunkte schwingen mit gleichgerichteter Amplitude mit der Frequenz

$$\omega_2 = \sqrt{\left(2 - \sqrt{2}\right) \frac{g}{l}}.$$

## 3.10 Exkurs über Variationsprinzipien

Wir formulieren zuerst das *Grundproblem der Variationsrechnung*:

Bestimme die Funktion  $y(x)$  so, dass das Integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} dx f\left(y(x), y'(x); x\right) \quad (3.122)$$

ein Extremum (entweder Maximum oder Minimum) annimmt. Dabei bezeichnet  $y'(x) = dy/dx$  die Ableitung der Funktion  $y(x)$  und das Funktional  $f$  wird als gegeben angenommen, wie auch die Integrationsgrenzen  $x_1, x_2$  (letztere Annahme ist nicht unbedingt notwendig). Man variiert die Funktion  $y(x)$  solange, bis ein Extremwert für das Integral (3.122) gefunden ist; d.h. ergibt sich für irgendeine Funktion z.B. ein Minimalwert für das Integral  $J$ , so muss *jede* Nachbarfunktion das Integral  $J$  größer machen.

Für die *Nachbarfunktion* benutzen wir die parametrische Darstellung  $y = y(\alpha, x)$  derart, dass für  $\alpha = 0$   $y = y(0, x) = y(x)$  die Funktion ist, die einen Extremwert für  $J$  ergibt. Wir schreiben dann

$$y(\alpha, x) = y(0, x) + \alpha\eta(x), \quad (3.123)$$

wobei die Funktion  $\eta(x)$  eine stetige erste Ableitung hat und an den Endpunkten verschwindet ( $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ ) (siehe Abb. 3.7).

Mit Funktionen der Art (3.123) wird das Integral (3.122) vom Parameter  $\alpha$  abhängig:

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} dx f\left(y(\alpha, x), y'(\alpha, x); x\right). \quad (3.124)$$

Eine notwendige Bedingung für den Extremwert ist dann

$$\left[ \frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} = 0, \quad \forall \eta(x). \quad (3.125)$$

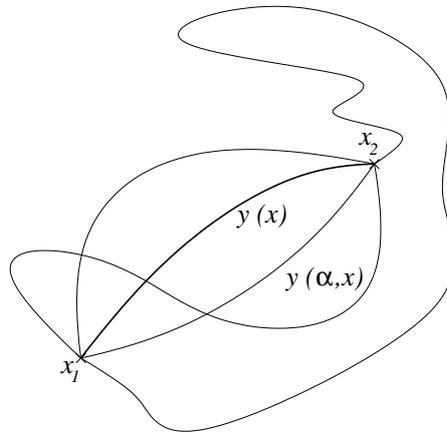


Abbildung 3.7: Zur Illustration der Nachbarfunktion (3.123)

### 3.10.1 Beispiele

Als **Beispiel 1** betrachten wir die einfache Funktion  $y = x$  und konstruieren benachbarte Funktionen durch Addition von  $\alpha \sin x$  (siehe Abb. 3.8):

$$y(\alpha, x) = x + \alpha \sin x .$$

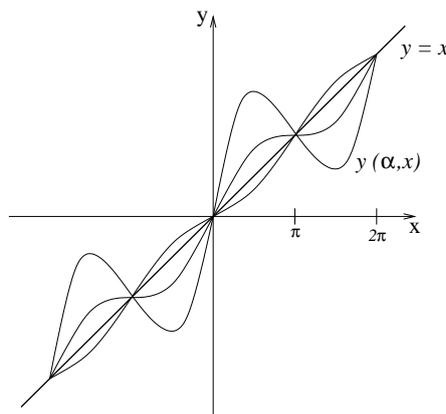


Abbildung 3.8: Illustration der Funktionenschar  $y(\alpha, x) = x + \alpha \sin x$

Wir berechnen den Wert des Integrals von  $f = (dy/dx)^2$  für  $x \in [0, 2\pi]$ . In diesem Fall ist  $\eta(x) = \sin x$  mit stetiger erster Ableitung und  $\eta(0) = \eta(2\pi) = 0$ .

### 3 Analytische Mechanik

Mit

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \alpha \cos x$$

gilt dann 
$$J(\alpha) = \int_0^{2\pi} dx (1 + 2\alpha \cos x + \alpha^2 \cos^2 x) = 2\pi + \pi\alpha^2 .$$

Man erkennt, dass  $J(\alpha) > J(0) \forall \alpha$  und die Bedingung (3.125) erfüllt sind

$$\left[ \frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} = [2\alpha\pi]_{\alpha=0} = 0 .$$

**Beispiel 2:** Wir betrachten die Gleichung für die Linie, die den kürzesten Abstand zwischen den Punkten  $(x_1, y_1) = (0, 0)$  und  $(x_2, y_2) = (1, 0)$  in der Ebene ergibt. Das ist natürlich die  $x$ -Achse  $y(0, x) = 0$ . Wir ändern den Pfad durch

$$y(\alpha, x) = y(0, x) + \alpha\eta(x) = 0 + \alpha(x^2 - x) , \quad (3.126)$$

wählen also  $\eta(x) = x^2 - x$ , dass wieder  $\eta(x_1) = \eta(0) = 0$  und  $\eta(x_2) = \eta(1) = 0$  erfüllt sind. Das Abstandsdifferential ist

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (3.127)$$

und die gesamte Weglänge ist dann

$$s = \int_0^1 dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} .$$

Gemäß Gleichung (3.126) folgt

$$y'(\alpha, x) = \frac{dy(\alpha, x)}{dx} = \alpha(2x - 1) ,$$

so dass 
$$s(\alpha) = \int_0^1 dx \sqrt{4\alpha^2 x^2 - 4\alpha^2 x + \alpha^2 + 1} . \quad (3.128)$$

Dieses Integral ergibt (Übungsaufgabe)

$$s(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \alpha^2} + \frac{1}{2\alpha} \operatorname{arsinh} \alpha . \quad (3.129)$$

Die Taylor-Entwicklung für kleine Werte  $\alpha \ll 1$  führt auf

$$\begin{aligned} s(\alpha \ll 1) &\simeq \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{2} + \mathcal{O}(\alpha^4) \right) + \frac{1}{2\alpha} \left( \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \mathcal{O}(\alpha^5) \right) \\ &= 1 + \frac{\alpha^2}{6} + \mathcal{O}(\alpha^4) , \end{aligned}$$

so dass 
$$J(\alpha) = s(\alpha) = 1 + \frac{\alpha^2}{6} + \mathcal{O}(\alpha^4)$$

und 
$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial s(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\alpha}{3} + \mathcal{O}(\alpha^3) .$$

$\alpha = 0$  liefert den Extremalwert  $J(\alpha = 0) = s(\alpha = 0) = 1$  und es gilt

$$\left[ \frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} = 0 .$$

### 3.10.2 Euler-Gleichung

Aus den Gleichungen (3.125) und (3.124) folgt

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x_1}^{x_2} dx f(y(\alpha, x), y'(\alpha, x); x) . \quad (3.130)$$

Weil die Grenzen  $x_1$  und  $x_2$  festliegen, folgt

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right] = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial x} \right] . \quad (3.131)$$

Den zweiten Term des Integranden integrieren wir partiell nach  $x$ :

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) = \left[ \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} . \quad (3.132)$$

Nach Gleichung (3.123) ist

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x) , \quad (3.133)$$

so dass 
$$\left[ \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right]_{x_1}^{x_2} = \eta(x_2) - \eta(x_1) = 0$$

und wir erhalten für Gleichung (3.132)

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) = - \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) .$$

Setzen wir dies und Gleichung (3.133) in Gleichung (3.131) ein, so folgt

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta(x) , \quad (3.134)$$

$y$  und  $y'$  sind noch Funktionen von  $\alpha$ . Wenn aber  $\alpha = 0$  ist, dann ist  $y(\alpha, x) = y(0, x) = y(x)$  unabhängig von  $\alpha$ . Weil  $\eta(x)$  beliebige Funktionen sind, folgt aus der Bedingung (3.125)

$$\left[ \frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} = 0 ,$$

dass gemäß Gleichung (3.134) der Integrand selbst verschwinden muss:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 , \quad (3.135)$$

wobei die Ursprungsfunktionen  $y$  und  $y'$  unabhängig von  $\alpha$  sind. Gleichung (3.135) wird als *Euler-Gleichung der Variationsrechnung* bezeichnet.

### 3.10.3 Das Brachistochronen-Problem

Es soll diejenige Kurve gefunden werden, die zwei Punkte verbindet und längs der ein Teilchen in der kürzesten Zeit unter dem Einfluss der Schwerkraft fällt. Das Teilchen mit der Masse  $m$  ist anfangs im Punkt 1 in Ruhe und fällt von dort zum niedrigeren Punkt 2 (siehe Abb. 3.9).

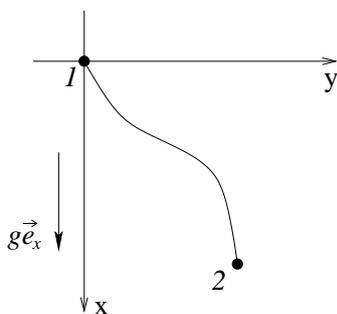


Abbildung 3.9: Illustration des Brachistochronen-Problems

Die Fallzeit ist durch das Wegintegral

$$t_{12} = \int_1^2 \frac{ds}{v} \quad (3.136)$$

gegeben, und die konstante, nach unten gerichtete Schwerkraft ist konservativ, so dass der Energiesatz  $T + U = \text{const.}$  gilt.

Wir messen das Potential  $U$  von der Höhe  $x = 0$  aus (d.h.  $U(x = 0) = 0$ ), und wegen  $v(x = 0) = 0$  ist die anfängliche kinetische Energie  $T(x = 0) = 0$ , so dass immer gilt

$$T + U = 0. \quad (3.137)$$

Mit

$$U = -mgx$$

und

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

folgt

$$\frac{mv^2}{2} = mgx$$

oder

$$v = \sqrt{2gx}. \quad (3.138)$$

Wir erhalten dann mit Gleichung (3.127) für die Fallzeit (3.136)

$$\begin{aligned} t_{12} &= \int_1^2 \frac{ds}{\sqrt{2gx}} = \int_1^2 \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gx}} \\ &= \int_1^2 dx \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2gx}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_1^2 dx \left(\frac{1 + y'^2}{x}\right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.139)$$

### 3.10 Exkurs über Variationsprinzipien

Vergleichen wir Gleichung (3.139) mit dem allgemeinen Ausdruck (3.122), so erkennen wir, dass bis auf die Konstante  $(2g)^{-1/2}$  das Funktional  $f$  durch

$$f(y, y'; x) = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{x}} \quad (3.140)$$

gegeben ist. Weil für dieses Funktional

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (3.141)$$

gilt, folgt gemäß der Euler-Gleichung (3.135)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} &= 0, \\ \text{oder} \quad \frac{\partial f}{\partial y'} &= \frac{1}{\sqrt{2a}} = \text{const.}, \end{aligned} \quad (3.142)$$

mit einer geeignet gewählten Konstanten  $a$ .

Aus Gleichung (3.140) folgt

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{x(1+y'^2)}}. \quad (3.143)$$

Das Gleichsetzen mit (3.142) liefert dann

$$\begin{aligned} \frac{y'^2}{x(1+y'^2)} &= \frac{1}{2a}, \\ \text{oder} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= \frac{x}{2a-x}, \end{aligned} \quad (3.144)$$

$$\text{so dass} \quad y = \int dx \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(2a-x)^{\frac{1}{2}}} = \int dx \frac{x}{\sqrt{2ax-x^2}}. \quad (3.145)$$

Substituieren wir

$$x = a(1 - \cos \Theta), \quad (3.146)$$

$$\text{so dass} \quad dx = a(\sin \Theta)d\Theta,$$

in Gleichung (3.145), dann ergibt sich

$$\begin{aligned} y &= \int d\Theta \frac{a^2(1 - \cos \Theta) \sin \Theta}{\sqrt{2a^2(1 - \cos \Theta) - a^2(1 - \cos \Theta)^2}} \\ &= a \int d\Theta \frac{(1 - \cos \Theta) \sin \Theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \Theta}} \\ &= a \int d\Theta (1 - \cos \Theta) = a(\Theta - \sin \Theta) + c_1. \end{aligned} \quad (3.147)$$

### 3 Analytische Mechanik

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit legen wir den Startpunkt 1 in den Ursprung des Koordinatensystems, d.h.  $x(t = 0) = y(t = 0) = 0$ . Aus (3.146) folgt dann anfänglich  $\Theta(t = 0) = 0$ , so dass mit  $y(t = 0) = 0$  dann die Integrationskonstante zu  $c_1 = 0$  bestimmt wird. Für die Lösungen (3.146) und (3.147) folgt dann

$$x = a(1 - \cos \Theta) , \quad y = a(\Theta - \sin \Theta) . \quad (3.148)$$

Die Konstante  $a$  muss dabei so angepasst werden, dass die Bahnkurve durch den Punkt 2 verläuft, d.h.

$$x_2 = a(1 - \cos \Theta_2) , \quad y_2 = a(\Theta_2 - \sin \Theta_2) . \quad (3.149)$$

Die Lösung (3.148) stellt die Gleichung einer *Zykloide* dar, die in Abb. 3.10 veranschaulicht ist.

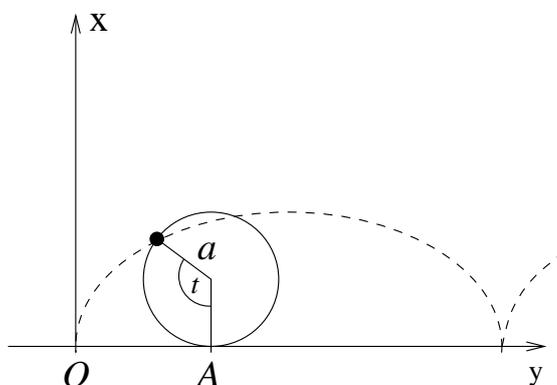


Abbildung 3.10: Illustration der Zykloidenbewegung

Ein Kreis mit dem Radius  $a$  rollt auf einer Geraden ab. Ein gegebener Punkt auf dem Kreis beschreibt dann eine Zykloide. Aus Abb. 3.10 entnehmen wir für die Strecken  $\overline{OA} = at$  und ebenfalls  $\overline{OA} = y + a \sin t$ . Weiterhin gilt  $a = x + a \cos t$ , so dass

$$y = a(t - \sin t) , \quad x = a(1 - \cos t)$$

in Übereinstimmung mit den Gleichungen (3.149).

Wir lösen (3.148a) nach  $\cos \Theta$  auf:

$$\cos \Theta = 1 - \frac{x}{a} , \quad \Theta = \arccos \frac{a - x}{a}$$

und erhalten damit

$$\sin \Theta = \sqrt{1 - \cos^2 \Theta} = \frac{1}{a} \sqrt{2ax - x^2} .$$

Setzen wir dies in Gleichung (3.148b) ein, so folgt der Zusammenhang

$$y(x) = -\sqrt{2ax - x^2} + a \arccos \frac{a-x}{a} . \quad (3.150)$$

Für die Fallzeit (3.139) ergibt sich mit Gleichung (3.144)

$$\begin{aligned} t_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_1^2 dx \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{1 + \frac{x}{2a-x}} = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} \\ &= \sqrt{\frac{a}{g}} \left[ -\arcsin \frac{a-x}{a} \right]_0^{x_2} = \sqrt{\frac{a}{g}} \left( \arcsin 1 - \arcsin \frac{a-x_2}{a} \right) \\ &= \sqrt{\frac{a}{g}} \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{a-x_2}{a} \right) = \sqrt{\frac{a}{g}} \arccos \frac{a-x_2}{a} . \end{aligned} \quad (3.151)$$

### 3.10.4 Verallgemeinerung auf mehrere unabhängige Variablen

Bisher haben wir die Euler-Gleichung (3.135) nur für eine Funktion  $y(x)$  abgeleitet, die von einer Variablen  $x$  abhing. Jetzt verallgemeinern wir auf den Fall, dass das Funktional  $f$  von mehreren unabhängigen Funktionen  $y_i$  und ihren Ableitungen  $y_i'$  abhängt:

$$f = f(y_1(x), y_1'(x), y_2(x), y_2'(x), \dots; x)$$

oder kurz 
$$f = (y_i(x), y_i'(x); x) , \quad i = 1, \dots, n . \quad (3.152)$$

Dann führen wir wieder in Analogie zu Gleichung (3.123) die Nachbarfunktionen

$$y_i(\alpha, x) = y_i(0, x) + \alpha \eta_i(x)$$

ein und erhalten völlig analog zu (3.134)

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} dx \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y_i'} \right) \right] \eta_i(x) . \quad (3.153)$$

Da die Variablen  $y_i$  unabhängig voneinander sind, sind auch die Funktionen  $\eta_i$  unabhängig voneinander. Für  $\alpha = 0$  folgt dann, dass alle einzelnen Integranden in der eckigen Klammer von Gleichung (3.153) verschwinden müssen, d.h.

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y_i'} \right) = 0 , \quad i = 1, 2, \dots, n . \quad (3.154)$$

Die Analogie der Euler-Gleichungen (3.154) zu den Lagrange-Gleichungen 2. Art (3.96) ist offensichtlich mit den Ersetzungen

$$x \rightarrow t , \quad y_i \rightarrow q_i , \quad f(y_i, \dot{y}_i, t) \rightarrow L(q_i, \dot{q}_i, t) . \quad (3.155)$$

Mit diesen Ersetzungen ergeben sich aus den Euler-Gleichungen (3.154) dann die Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.156)$$

und wir haben das *Hamiltonsche Prinzip* bewiesen.

### 3.11 Hamiltonsches Prinzip

Das soeben bewiesene Prinzip von Hamilton lautet:

Die Bewegung eines physikalischen Systems zwischen dem Zeitpunkt  $t_1$  und dem Zeitpunkt  $t_2$  ist derart, dass das Linienintegral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L \quad (3.157)$$

ein Extremum für die durchlaufene Bahn ist.

$S$  hat die Dimension Energie $\times$ Zeit und heißt *Wirkung*.

#### 3.11.1 Die $\delta$ -Notation

Wir schreiben Gleichung (3.134)

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \frac{\partial y}{\partial \alpha} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta(x), \end{aligned}$$

kurz als 
$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} dx \delta y \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right], \quad (3.158)$$

mit der Notation 
$$\delta J \equiv \frac{\partial J}{\partial \alpha} \delta \alpha, \quad \delta y \equiv \frac{\partial y}{\partial \alpha} \delta \alpha. \quad (3.159)$$

Die Bedingung für den Extremwert lautet dann

$$\delta J = \delta \int_{x_1}^{x_2} dx f(y, y'; x) = 0. \quad (3.160)$$

Sind die Integrationsgrenzen  $x_1$  und  $x_2$  fest, folgt aus Gleichung (3.160)

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} dx \delta f(y, y'; x) = \int_{x_1}^{x_2} dx \left( \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right). \quad (3.161)$$

Weil

$$\delta y' = \delta \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx}(\delta y),$$

folgt für die Variation (3.161)

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx}(\delta y) \right) dx.$$

Wie vorher integrieren wir den zweiten Term des Integranden partiell und erhalten

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right) \delta y dx. \quad (3.162)$$

Weil die Variation  $\delta y$  beliebig ist, liefert die Bedingung (3.160), d.h.  $\delta J = 0$ , sofort die Euler-Gleichung (3.135)

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0.$$

Das Symbol  $\delta$  ist nur eine kurze, kompakte Schreibweise der Variationsrechnung, wie sie im Detail in Abschnitt 3.10.2 ausgeführt wurde.

### 3.11.2 Das Hamilton-Prinzip

Mit der kompakten  $\delta$ -Notation schreibt sich das Hamilton-Prinzip (3.157) kurz als

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt = 0. \quad (3.163)$$

Die Bewegung ist derart, dass die Variation des Linienintegrals  $S$  für festes  $t_1$  und  $t_2$  verschwindet.

Gleichung (3.163) wird auch als *Prinzip der kleinsten Wirkung* bezeichnet.

### 3.11.3 Erweiterung des Hamilton-Prinzips auf nichtkonservative Systeme

Sowohl das Hamilton-Prinzip als auch das d'Alembert-Prinzip führen, wie wir gezeigt haben, zu den Lagrange-Gleichungen 2. Art. Letzteres ist aber allgemeiner, da es auch für nichtkonservative (und nichtholonome) Kräfte gilt.

Gemäß Gleichung (3.74) gilt

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0,$$

oder

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i. \quad (3.164)$$

Mit der Rechnung

$$\frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i) = \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \dot{\vec{r}}_i = \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \frac{1}{2} \delta (\dot{\vec{r}}_i)^2$$

folgt nach Einsetzen von Gleichung (3.164)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i \right) &= \sum_{i=1}^N m_i \left[ \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \frac{1}{2} \delta (\dot{\vec{r}}_i)^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \left[ \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \frac{m_i}{2} \delta (\dot{\vec{r}}_i)^2 \right] \equiv \delta^* W + \delta T \end{aligned} \quad (3.165)$$

mit

$$\delta^* W = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i \quad (3.166)$$

und

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\dot{\vec{r}}_i)^2 \quad (3.167)$$

### 3 Analytische Mechanik

ist die gesamte kinetische Energie des Systems.

$\delta^*$  in Gleichung (3.166) deutet an, dass es sich im Allgemeinen nicht um eine Variation handelt, sondern um die virtuelle Arbeit bei der Verrückung zur Nachbarkurve.  $\delta^*W$  bezeichnet die virtuelle Arbeit der eingepprägten Kräfte und nicht die Variation  $\delta W$  einer Funktion  $W$ . Integrieren wir Gleichung (3.165) nach der Zeit, so ergibt sich

$$\int_{t_1}^{t_2} dt (\delta T + \delta^*W) = \sum_{i=1}^N m_i \left[ \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i \right]_{t_1}^{t_2} = 0 ,$$

$$\text{weil} \quad \delta \vec{r}_i(t_1) = \delta \vec{r}_i(t_2) = 0 \quad (3.168)$$

an den Endpunkten. Wir erhalten dann das *verallgemeinerte Hamilton-Prinzip* zu

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta^*W) dt = 0 . \quad (3.169)$$

Im Fall von konservativen Kräften ( $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ ) ergibt sich wieder das Hamilton-Prinzip (3.163), denn Gleichung (3.166) reduziert sich dann auf

$$\delta^*W = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial x_i} \delta x_i = -\delta V ,$$

so dass wir für Gleichung (3.169)

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \delta(T - V) = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

erhalten.

#### 3.11.4 Erweiterung des Hamilton-Prinzips auf nichtholonome Zwangsbedingungen

Nichtholonome Zwangsbedingungen können oft in nicht-integrabler differentieller Form geschrieben werden (siehe Kap. 3.4.4)

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} dq_k + a_j dt = 0 , \quad j = 1, \dots, m , \quad (3.170)$$

wobei  $m$  die Zahl der Zwangsbedingungen angibt. Betrachtet man virtuelle Verrückungen, d.h.  $dt = \delta t = 0$ , so erhält man

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \delta q_k = 0 , \quad j = 1, \dots, m . \quad (3.171)$$

Durch Aufsummieren folgt sowohl

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk} \delta q_k = 0, \quad (3.172)$$

als auch

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j \sum_{k=1}^n a_{jk} \delta q_k = 0, \quad (3.173)$$

wobei die Lagrangeschen Multiplikatoren  $\lambda_j, j = 1, 2, \dots, m$ , unbestimmte Parameter, im Allgemeinen Funktionen der Zeit sind.

Da verschwindend, können wir nun Gleichung (3.173) oder dessen Zeitintegral

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \lambda_j a_{ji} \delta q_i dt = 0, \quad (3.174)$$

zum Hamiltonschen Prinzip (3.163)

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i dt = 0,$$

dazu addieren und erhalten

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum_{j=1}^m \lambda_j a_{ji} \right) \delta q_i dt = 0. \quad (3.175)$$

Die  $\delta q_i$  sind natürlich noch nicht unabhängig voneinander, sondern durch die  $m$  Beziehungen (3.171) miteinander verknüpft. Das heißt: während die ersten  $n - m$  von ihnen unabhängig voneinander gewählt werden können, sind die letzten  $m$  der  $\delta q_i$  dann durch Gleichung (3.171) festgelegt. Allerdings bleiben die Werte der Lagrange-Parameter  $\lambda_j$  zu unserer freien Verfügung.

Wir wählen die  $\lambda_j$  so, dass

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum_{j=1}^m \lambda_j a_{ji} = 0, \quad i = n - m + 1, \dots, n \quad (3.176)$$

und betrachten diese Gleichungen als die Bewegungsgleichungen für die letzten  $m$  Variablen  $q_i$ .

Mit den durch (3.176) bestimmten  $\lambda_j$  können wir Gleichung (3.175) zu

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n-m} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum_{j=1}^m \lambda_j a_{ji} \right) \delta q_i dt = 0 \quad (3.177)$$

reduzieren. Die hierin auftretenden  $\delta q_i$  sind nun unabhängig voneinander und es folgt

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum_{j=1}^m \lambda_j a_{ji} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n - m. \quad (3.178)$$

### 3 Analytische Mechanik

Kombinieren wir die Gleichungen (3.176) und (3.178), so erhalten wir den kompletten Satz *Lagrange-Gleichungen für nichtholonome Systeme* zu

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^m \lambda_j a_{ji} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.179)$$

und es gilt weiterhin (3.170) als Differentialgleichung

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_k + a_j = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (3.180)$$

(3.179) und (3.180) sind  $n + m$  Gleichungen für  $n + m$  Unbekannte.

**Bemerkung 1:** Die Gleichungen (3.170)–(3.171) schließen auch holonome Zwangsbedingungen

$$G(q_1, \dots, q_n, t) = 0$$

mit ein, denn diese können auch differentiell als

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial G}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial G}{\partial t} dt = 0$$

geschrieben werden, was mit (3.170) identisch ist für

$$a_{jk} = \frac{\partial G}{\partial q_k}, \quad a_j = \frac{\partial G}{\partial t}. \quad (3.181)$$

Wir können also diese Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren auch für holonome Zwangsbedingungen verwenden,

1. wenn es unbequem ist, alle Koordinaten auf unabhängige verallgemeinerte Koordinaten zu transformieren, und/oder
2. wenn man die Zwangskräfte berechnen will.

**Bemerkung 2:** Die Gleichungen (3.170)–(3.171) schließen nicht alle nichtholonomen Zwangsbedingungen ein, wie z.B. Ungleichungen.

#### 3.11.5 Beispiel: Rollendes Fass

Wir wollen das gerade Erlernte an einem Beispiel demonstrieren. Wir betrachten ein Fass, das ohne Schlupf eine schiefe Ebene hinabrollt (Abb. 3.11).

Die zwei generalisierten Koordinaten sind  $(q_1, q_2) = (x, \Theta)$  (siehe Abb. 3.11) und die Zwangsbedingung lautet

$$x = R\Theta. \quad (3.182)$$

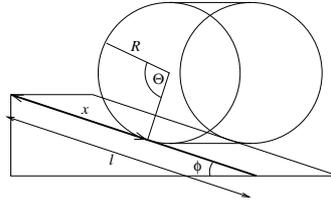


Abbildung 3.11: Rollendes Fass ohne Schlupf auf schiefer Ebene

In holonomer Form entspricht dies

$$G(x, \Theta) = R\Theta - x ,$$

oder in differentieller Form

$$dx = R d\Theta .$$

In Anlehnung an Gleichung (3.181) bestimmen wir aus der Zwangsbedingung die Koeffizienten

$$a_{\Theta} = \frac{\partial G}{\partial \Theta} = R , \quad a_x = \frac{\partial G}{\partial x} = -1 ,$$

so dass Gleichung (3.173) in diesem Fall einer einzigen Zwangsbedingung

$$\lambda (-dx + R d\Theta) = 0 \quad (3.183)$$

lautet.

Die kinetische Energie ist die Summe aus der kinetischen Energie der Bewegung des Massenzentrums und der kinetischen Energie der Bewegung um das Massenzentrum:

$$T = \frac{M}{2} \dot{x}^2 + \frac{M}{2} R^2 \dot{\Theta}^2 .$$

Die potentielle Energie ist  $V = Mg(l-x) \sin \phi$ , wobei  $l$  die Länge der schiefen Ebene angibt. Die Lagrange-Funktion ist dann durch

$$L = T - V = \frac{M}{2} \dot{x}^2 + \frac{M}{2} R^2 \dot{\Theta}^2 - Mg(l-x) \sin \phi \quad (3.184)$$

gegeben.

Die Lagrange-Gleichungen (3.179) lauten dann

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \lambda a_x = -\lambda \quad (3.185)$$

und

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} - \frac{\partial L}{\partial \Theta} = \lambda a_{\Theta} = \lambda R . \quad (3.186)$$

Aus der Lagrange-Funktion (3.184) erhalten wir

$$\frac{\partial L}{\partial x} = Mg \sin \phi , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M \dot{x} , \quad \frac{\partial L}{\partial \Theta} = 0 , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} = MR^2 \dot{\Theta} .$$

### 3 Analytische Mechanik

Die Lagrange-Gleichungen (3.185) und (3.186) lauten dann

$$M\ddot{x} - Mg \sin \phi + \lambda = 0 \quad (3.187)$$

und 
$$MR^2\ddot{\Theta} - \lambda R = 0. \quad (3.188)$$

Wir leiten die Zwangsbedingung (3.182) zweimal nach der Zeit ab und erhalten

$$R\ddot{\Theta} = \ddot{x} \quad (3.189)$$

und setzen dies in Gleichung (3.188) ein. Dann erhalten wir

$$M\ddot{x} = \lambda, \quad (3.190)$$

so dass aus Gleichung (3.187) folgt

$$\ddot{x} = \frac{g \sin \phi}{2} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{Mg \sin \phi}{2}. \quad (3.191)$$

Mit Gleichung (3.189) ergibt sich dann sofort

$$\ddot{\Theta} = \frac{g \sin \phi}{2R}. \quad (3.192)$$

Die Gleichungen (3.191) und (3.192) lassen sich sofort zweimal über die Zeit integrieren und ergeben die allgemeine Lösung.

Wir erkennen an Gleichung (3.191a), dass das Fass die schiefe Ebene nur mit der halben Beschleunigung hinabrollt, die es hätte, wenn es eine reibungslose Ebene hinabglitte. Die Zwangskraft in negative  $x$ -Richtung hat die Stärke  $\lambda = Mg \sin \phi / 2$ .

#### Übungsaufgabe:

**(A3.11.1)** Ein anfänglich ruhender Körper fällt aus einer Höhe von 20 m und erreicht den Erdboden nach 2 Sekunden. Zahlenmäßig wäre die Gleichung zwischen der Fallhöhe  $s$  und der Zeit  $t$  mit folgenden drei Gesetzen verträglich:

$$s = g_1 t, \quad s = \frac{1}{2} g_2 t^2, \quad s = \frac{1}{4} g_3 t^3,$$

mit 
$$g_1 = 10 \text{ m/s}, \quad g_2 = 10 \text{ m/s}^2, \quad g_3 = 10 \text{ m/s}^3.$$

Zeigen Sie, dass das richtige Fallgesetz ein Minimum für das Wirkungsintegral des Hamilton-Prinzips ergibt.

### 3.11.6 Das Wesentliche der Lagrange-Dynamik

1. Die Lagrange-Mechanik ist keine neue Theorie: sie ist völlig äquivalent zur Newton-Mechanik. Nur die Methode ist anders.

2. Newton betont *äußere Einwirkungen* auf einen Körper (wie die Kraft), während bei der Lagrange-Dynamik physikalische Größen betrachtet werden, die mit dem Körper assoziiert sind (kinetische und potentielle Energie). Nirgendwo in der Lagrange-Formulierung geht das Konzept einer Kraft ein. Dies ist besonders wichtig, denn Energien sind Skalare, so dass die Lagrange-Funktion invariant ist gegen Koordinaten-Transformationen!
3. Bei komplexen mechanischen Problemen ist es oft schwierig, alle Kräfte anzugeben, und leichter, die kinetische und potentielle Energie aller interessierenden Massenpunkte zu berechnen.
4. Die Newton-Mechanik ist die differentielle Formulierung (Änderung; Ableitung) der Mechanik. Das Hamilton-Prinzip ist die integrale Formulierung. Beide Formulierungen sind völlig äquivalent.
5. Nach dem Hamilton-Prinzip richtet die Natur es so ein, dass das Zeitintegral über die Differenz von kinetischer und potentieller Energie minimiert wird. Manche Zeitgenossen bezeichnen dies als: "Natur ist faul".

### 3.12 Symmetrien und Erhaltungssätze

Erhaltungssätze ermöglichen allgemeine Aussagen über das Verhalten eines physikalischen Problems, ohne die Lösungen der Bewegungsgleichungen mit ihrer Zeitabhängigkeit zu kennen.

Eine Größe  $F$  ist Erhaltungsgröße, wenn sie sich nicht mit der Zeit ändert, d.h.

$$\frac{d}{dt}F = 0 . \quad (3.193)$$

Der Lagrange-Formalismus ermöglicht das schnelle Erkennen von Erhaltungsgrößen. Betrachten wir die Lagrange-Gleichungen 2. Art (3.96):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 , \quad j = 1, \dots, s .$$

Falls es eine verallgemeinerte Koordinate  $q_k$  gibt, die nicht explizit in der Lagrange-Funktion auftaucht, d.h.  $\exists q_k$  mit  $(\partial L / \partial q_k) = 0$ , dann folgt aus der Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0 \quad (3.194)$$

und  $(\partial L / \partial \dot{q}_k)$  ist Erhaltungsgröße.

*Definition 1:*

$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad (3.195)$$

heißt der zur Koordinate  $q_k$  *kanonisch konjugierte Impuls*.

### 3 Analytische Mechanik

*Definition 2:*  $q_k$  heißt *zyklische Koordinate*, falls

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0. \quad (3.196)$$

Mit diesen beiden Definitionen folgt der Satz: *Ist  $q_k$  zyklisch, so bleibt der dazugehörige kanonisch konjugierte Impuls erhalten.*

Die Definition 1 ist plausibel, wie folgende zwei Beispiele zeigen:

- (i) Ist das Potential  $V$  geschwindigkeitsunabhängig und  $q_k$  repräsentiere die kartesische Koordinate. Dann reduziert sich für einen Massenpunkt  $m$  der kanonisch konjugierte Impuls

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) = m \dot{x}$$

auf die  $x$ -Komponente des linearen Impulses.

- (ii) Falls bei Polarkoordinaten  $q_k$  ein Winkel ist, so erhält man aus  $(\partial L / \partial \dot{q}_k)$  einen Drehimpuls.

Erweitert man von der Ortskoordinate  $x$  mit dem dazugehörigen kanonisch konjugierten Impuls  $(\partial L / \partial \dot{x})$  auf den Ortsvektor  $\vec{r} = (x, y, z)$ , so bezeichnet

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = \vec{\nabla}_{\dot{\vec{r}}} L = \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}, \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) \quad (3.197)$$

entsprechend den dazugehörigen kanonisch konjugierten Impulsvektor.

#### 3.12.1 Energieerhaltungssatz

Wir beweisen jetzt den Energieerhaltungssatz: *Die Summe aus kinetischer und potentieller Energie eines physikalischen Systems ist erhalten, falls das System abgeschlossen und das Potential konservativ ist.* Abgeschlossen heißt: Es findet keine Wechselwirkung des Systems mit der Außenwelt statt, so dass

1. die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt, d.h.

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad (3.198)$$

2. und auch

- (a) die Zwangsbedingungen und  
(b) das Potential nicht explizit von der Zeit abhängig sind.

Bedingung (a) impliziert, dass die Koordinatentransformationsgleichungen (3.81) zeitunabhängig sind,

$$\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t} = \vec{0}.$$

### 3.12 Symmetrien und Erhaltungssätze

Diese Unabhängigkeit von der Zeit wird als *Homogenität der Zeit* bezeichnet.

Wir beweisen den Energieerhaltungssatz in zwei Schritten: zunächst zeigen wir, dass bei Homogenität der Zeit die sogenannte Hamilton-Funktion (siehe Gleichung (3.203)) eine Erhaltungsgröße ist. Anschließend zeigen wir, dass bei einem konservativen Potential, wenn also das Potential geschwindigkeitsunabhängig ist,

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0,$$

diese Hamilton-Funktion gleich der Gesamtenergie des Systems ist. Dann gilt der

**Satz:** Gelten für die Lagrange-Funktion  $L = T - V$  eines physikalischen Systems die Bedingungen

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad (3.199)$$

so bleibt die Gesamtenergie  $E = T + V$  erhalten.

Für den Beweis brauchen wir das *Euler-Theorem* für homogene Funktionen: Sei  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  eine homogene Funktion  $m$ -ten Grades, d.h.

$$\begin{aligned} & \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ \text{und} & \quad \forall \vec{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \\ \text{gilt} & \quad f(\lambda \vec{x}) = \lambda^m f(\vec{x}). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = m f(\vec{x}). \quad (3.200)$$

Beweis: Das totale Differential von  $f(\lambda \vec{x}) = \lambda^m f(\vec{x})$  nach  $\lambda$  ergibt mit der Kettenregel

$$\frac{df(\lambda \vec{x})}{d\lambda} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial (\lambda x_i)} \frac{\partial (\lambda x_i)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial (\lambda x_i)} x_i = m \lambda^{m-1} f(\vec{x}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Setzen wir in dieser Gleichung  $\lambda = 1$ , so folgt

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = m f(\vec{x})$$

Q.E.D.

Jetzt wenden wir uns dem Beweis des Energiesatzes zu. Wir berechnen die totale zeitliche Ableitung der Lagrange-Funktion  $L(q_j, \dot{q}_j, t)$ :

$$\frac{d}{dt} L = \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

### 3 Analytische Mechanik

Mit  $(\partial L/\partial t) = 0$  folgt unter Verwendung der Lagrange-Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}L &= \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^s \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) = \sum_{j=1}^s \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) \end{aligned}$$

$$\text{oder} \quad 0 = \frac{d}{dt} \left[ \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \right], \quad (3.201)$$

d.h. die Größe

$$H \equiv \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \quad (3.202)$$

ist Erhaltungsgröße.

Mit der Definition 1 der kanonisch konjugierten Impulse (3.195) können wir diese Erhaltungsgröße auch in der Form

$$H = \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - L \quad (3.203)$$

schreiben.  $H$  wird als *Hamilton-Funktion* oder *Hamiltonian* des Systems bezeichnet.

Wegen  $(\partial V/\partial \dot{q}_j) = 0$  ist

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j. \quad (3.204)$$

Wegen  $(\partial \vec{r}_j/\partial t) = 0$  ist die kinetische Energie  $T$  eine homogene Funktion 2. Grades in den verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $\dot{q}_j$  (Beweis siehe Abschnitt 3.8.3, (3.103)):

$$T(\dot{\vec{q}}) = \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (3.205)$$

so dass gilt

$$T(\lambda \dot{\vec{q}}) = \lambda^2 T(\dot{\vec{q}})$$

und es folgt aus dem Euler-Theorem (3.200):

$$\sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T. \quad (3.206)$$

Damit erhalten wir für die Erhaltungsgröße (3.202):

$$\begin{aligned} H &= \left[ \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \right] \\ &= \left[ \sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \right] \\ &= 2T - L = 2T - (T - V) = T + V = E. \end{aligned} \quad (3.207)$$

Wir merken an, dass wir die Beziehung (3.206) alternativ auch direkt aus der Darstellung (3.205) beweisen können. Aus jener folgt

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_j a_{jl} \dot{q}_j + \sum_k a_{lk} \dot{q}_k .$$

Es folgt

$$\sum_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \dot{q}_l = \sum_l \sum_j a_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l + \sum_l \sum_k a_{lk} \dot{q}_k \dot{q}_l = 2T ,$$

weil Indizes beliebig nummeriert werden können.

### 3.12.2 Impulssatz, Schwerpunktsystem, Schwerpunktsatz

Wir beweisen jetzt weitere Erhaltungssätze.

*Impulssatz:* Der Gesamtimpuls  $\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$  eines Systems von  $N$  Massenpunkten bleibt erhalten, wenn die Lagrange-Funktion translationsinvariant ist.

Translationsinvarianz bedeutet, dass das  $N$ -Teilchensystem in eine beliebige Richtung verschoben werden kann, ohne dass sich die Lagrange-Funktion ändert. Es darf daher kein äußeres Potential  $V$  geben, deren Gradient  $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$  eine ortsabhängige Kraft auf das System ausübt und damit den Impuls der Teilchen gemäß  $\dot{\vec{p}}_i = -\vec{\nabla}_i V$  verändert. Diese Eigenschaft des Systems wird als *Homogenität des Raums* bezeichnet.

Beweis: Bezeichne  $\delta L$  die Änderung der Lagrange-Funktion bei einer infinitesimalen Verschiebung des Systems um  $\delta \vec{r}$ . Die Verschiebung entspricht der Transformation  $\vec{r}'_i = \vec{r}_i + \delta \vec{r}$ . Die Geschwindigkeitsvektoren ändern sich nicht, weil ihre Richtungen in den Bezugssystemen vor und nach der Koordinatentransformation unverändert bleiben. (Bei Drehungen ist es allerdings anders, siehe Kap. 3.12.3!) Da sich nur die Ortsvektoren ändern, folgt bei Translationsinvarianz ( $\delta L = 0$ )

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta \vec{r} = 0 .$$

Da  $\delta \vec{r} \neq 0$  und beliebig ist, erhalten wir

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0 .$$

Stellt man die Lagrange-Gleichungen für alle Massenpunkte auf und summiert diese über alle  $i$ , so folgt

$$\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0 .$$

### 3 Analytische Mechanik

Nach Einführung der kanonisch konjugierten Impulsvektoren (3.197) der einzelnen Massenpunkte

$$\vec{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i}$$

erhalten wir

$$\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \vec{p}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \frac{d}{dt} \vec{P} = 0$$

oder

$$\vec{P} = \text{const.} \quad (3.208)$$

Q.E.D.

Der Gesamtimpuls des Systems bleibt erhalten, was im Allgemeinen nicht für die Einzelimpulse gilt.

**Bemerkung:** Es kann vorkommen, dass die Lagrange-Funktion nur in einer Richtung, z.B. der  $\vec{e}_3$ -Richtung, translationsinvariant ist. Dann dürfen die infinitesimalen Verschiebungen  $\delta \vec{r}$  nur in die  $\vec{e}_3$ -Richtung vollzogen werden, d.h.

$$\delta L = (0, 0, \delta z) \cdot \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial y_i}, \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial z_i} \right) = \delta z \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial z_i} = 0.$$

Da  $\delta z \neq 0$  und beliebig ist, erhalten wir

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial z_i} = 0, \quad (3.209)$$

so dass nur die z-Komponente des Gesamtimpulses in  $\vec{e}_3$ -Richtung erhalten bleibt. Die anderen Gesamtimpulskomponenten bleiben jedoch nicht erhalten.

Ein Beispiel dafür ist die schiefe Ebene aus Kap. 3.1.1: der Massenpunkt kann in die  $y$ -Richtung, die senkrecht zur Papierebene zeigt, beliebig bewegt werden, ohne Änderung der Lagrange-Funktion.  $y$  ist eine zyklische Koordinate und der dazugehörige kanonisch konjugierte Impuls, der in diesem Fall gleich der  $y$ -Komponente des Gesamtimpulses ist, bleibt erhalten.

*Schwerpunktsatz:* Wir untersuchen jetzt die Änderung des Gesamtimpulses eines  $N$ -Teilchensystems bei einer Galilei-Transformation in ein anderes Inertialsystem  $K'$ , das sich mit der konstanten Geschwindigkeit  $\vec{V}$  relativ zum ursprünglichen Koordinatensystem  $K$  bewegt (siehe Abb 3.12).

Für alle Ortsvektoren lauten die Transformationsgleichungen

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{V}t, \quad \dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}'_i + \vec{V}.$$

Für den Gesamtimpuls erhalten wir dann

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}'_i + \sum_{i=1}^N m_i \vec{V} = \vec{P}' + \sum_{i=1}^N m_i \vec{V} = \vec{P}' + M \vec{V}, \quad (3.210)$$

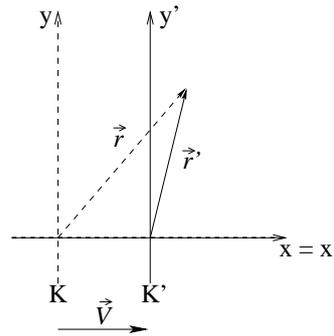


Abbildung 3.12: Transformation des Ortsvektors bei Galilei-Transformation

wobei  $M = \sum_{i=1}^N m_i$  die Gesamtmasse des Systems ist.

*Definition:* Das System, in dem der Gesamtimpuls  $\vec{P}' = \vec{0}$  verschwindet, heißt *Schwerpunktsystem*.

Nach Gleichung (3.210) erhält man (wegen  $\vec{P}' = \vec{0}$ )  $\vec{P} = M\vec{V}$  oder

$$\vec{V} = \frac{\vec{P}}{M} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \dot{\vec{R}}_0, \quad (3.211)$$

wobei  $\vec{R}_0$  der Schwerpunktvektor des Systems ist:

$$\vec{R}_0 = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}. \quad (3.212)$$

Aus Gleichung (3.211) folgt sofort der

*Schwerpunktsatz:* Bleibt der Gesamtimpuls  $\vec{P}$  eines Systems erhalten, so ist die Schwerpunktgeschwindigkeit  $\vec{V}$  ebenfalls eine Erhaltungsgröße. Insbesondere ist dann das Schwerpunktsystem ein Inertialsystem.

Abschließend betrachten wir die Bewegungsgleichung für den Gesamtimpuls bei konservativen Kräften. Die Lagrange-Funktion eines  $N$ -Teilchensystems lautet

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 - V.$$

Für konservative Kräfte ist  $V$  eine Funktion der  $N$  Ortsvektoren mit der Eigenschaft

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}.$$

Aus der Summe der Lagrange-Gleichungen der einzelnen Massenpunkte folgt dann

$$\sum_{i=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \right] = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{d}{dt} (\vec{p}_i) - \vec{F}_i \right] = \frac{d}{dt} \vec{P} - \vec{F} = \vec{0},$$

oder 
$$\dot{\vec{P}} = \vec{F}. \quad (3.213)$$

das natürlich dem zweiten Newtonschen Axiom für ein  $N$ -Teilchensystem entspricht: Die Änderung des Gesamtimpulses ist gleich der Summe der äußeren Kräfte.

### 3.12.3 Drehimpulserhaltung

*Drehimpulserhaltungssatz: Bei Systemen, deren Lagrange-Funktion invariant gegenüber Drehungen um ein Zentrum ist, bleibt der Gesamtdrehimpuls bezüglich des Zentrums erhalten.*

Diese Rotationsinvarianz wird als *Isotropie des Raums* bezeichnet.

*Infinitesimale Drehungen* (im Gegensatz zu endlichen Drehungen) lassen sich durch den Vektor

$$\delta \vec{r} = d\vec{\phi} \times \vec{r} \quad (3.214)$$

darstellen, wobei  $|d\vec{\phi}|$  der Wert des infinitesimalen Drehwinkels (siehe Abb. 3.13) ist und  $d\vec{\phi}$  in die Richtung der Drehachse zeigt. (Der genaue Beweis folgt aus den Transformationseigenschaften des Vektors.)

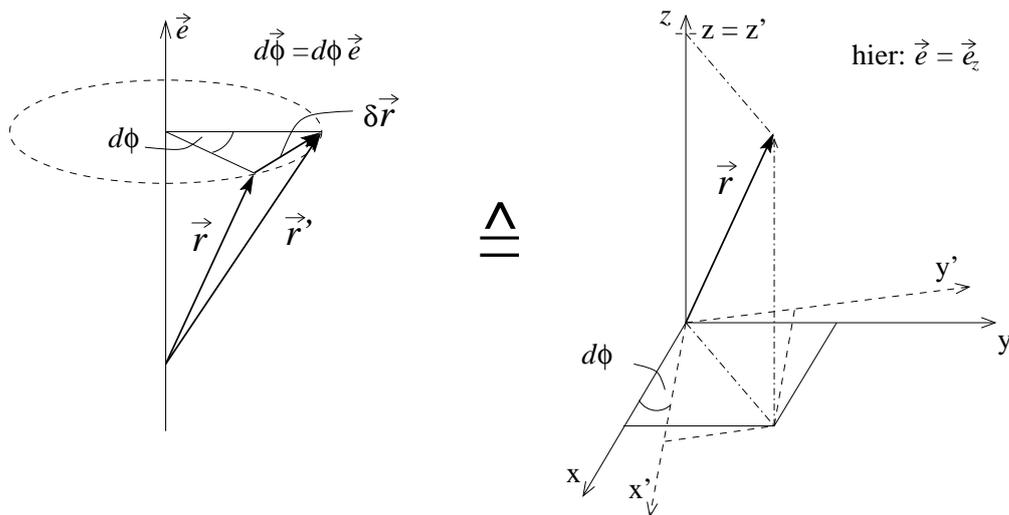


Abbildung 3.13: Änderung eines Ortsvektors bei einer infinitesimalen Drehung des Systems

Wir zeigen zunächst, dass die Drehoperation kommutativ für infinitesimale Änderungen ist. Dazu betrachten wir zwei infinitesimale Rotationen  $d\vec{\phi}_1$  und  $d\vec{\phi}_2$ . Durch die erste Rotation  $d\vec{\phi}_1$  ändert sich der Ortsvektor

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \delta \vec{r}_1 \quad \text{mit} \quad \delta \vec{r}_1 = d\vec{\phi}_1 \times \vec{r} .$$

Diesen Vektor drehen wir dann um  $d\vec{\phi}_2$  um eine andere Achse, so dass

$$\delta \vec{r}_2 = d\vec{\phi}_2 \times (\vec{r} + \delta \vec{r}_1) .$$

Nach diesen zwei Drehungen erhalten wir den Vektor

$$\vec{r} + \delta\vec{r}_{1,2} = \vec{r} + \left[ d\vec{\phi}_1 \times \vec{r} + d\vec{\phi}_2 \times (\vec{r} + \delta\vec{r}_1) \right],$$

so dass

$$\delta\vec{r}_{1,2} = d\vec{\phi}_1 \times \vec{r} + d\vec{\phi}_2 \times \vec{r},$$

wobei wir den Term 2. Ordnung  $d\vec{\phi}_2 \times \delta\vec{r}_1$  aufgrund der Annahme infinitesimal kleiner Drehwinkel vernachlässigen können.

Nun vertauschen wir die Reihenfolge der Drehungen 1 und 2 und erhalten ebenso den Vektor

$$\vec{r} + \delta\vec{r}_{2,1} = \vec{r} + \left[ d\vec{\phi}_2 \times \vec{r} + d\vec{\phi}_1 \times (\vec{r} + \delta\vec{r}_2) \right],$$

mit

$$\delta\vec{r}_{2,1} = d\vec{\phi}_2 \times \vec{r} + d\vec{\phi}_1 \times \vec{r} = \delta\vec{r}_{1,2},$$

womit die Kommutativität der Rotationsvektoren  $d\vec{\phi}_1$  und  $d\vec{\phi}_2$  bewiesen ist.

Da Gleichung (3.214) für die Änderung aller Vektoren gilt, erhalten wir speziell für das Verhalten der Geschwindigkeitsvektoren bei infinitesimalen Rotationen

$$\delta\dot{\vec{r}} = d\vec{\phi} \times \dot{\vec{r}}. \quad (3.215)$$

Für die Änderung der Lagrange-Funktion eines  $N$ -Teilchensystems bei infinitesimalen Rotationen erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta\vec{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \delta\dot{\vec{r}}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot (d\vec{\phi} \times \vec{r}_i) + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot (d\vec{\phi} \times \dot{\vec{r}}_i) \right]. \end{aligned} \quad (3.216)$$

Mit den konjugierten Impulsen  $\vec{p}_i = \partial L / \partial \dot{\vec{r}}_i$  und den Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \dot{\vec{p}}_i = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}$$

folgt für Gleichung (3.216)

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \left[ \dot{\vec{p}}_i \cdot (d\vec{\phi} \times \vec{r}_i) + \vec{p}_i \cdot (d\vec{\phi} \times \dot{\vec{r}}_i) \right]. \quad (3.217)$$

Aufgrund der zyklischen Vertauschbarkeit der Spatprodukte (vgl. Gl. (1.24)) folgt

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_{i=1}^N \left[ d\vec{\phi} \cdot (\vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i) + d\vec{\phi} \cdot (\dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i) \right] \\ &= d\vec{\phi} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} [\vec{r}_i \times \vec{p}_i] = d\vec{\phi} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \vec{l}_i, \end{aligned} \quad (3.218)$$

### 3 Analytische Mechanik

wobei  $\vec{l}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$  der Drehimpuls des  $i$ -ten Teilchens ist.

Aus der Invarianz der Lagrange-Funktion gegenüber Drehungen  $\delta L = 0$  folgt dann

$$0 = \delta L = d\vec{\phi} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \vec{l}_i,$$

und weil dies für jede beliebige Drehung  $d\vec{\phi}$  gelten muss,

$$0 = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{l}_i = \frac{d}{dt} \vec{\mathcal{L}}. \quad (3.219)$$

Der Gesamtdrehimpuls  $\vec{\mathcal{L}} = \sum_{i=1}^N \vec{l}_i$  ist Erhaltungsgröße. Nur dieser, und nicht die Drehimpulse der einzelnen Massenpunkte, bleibt bei Rotationsinvarianz erhalten.

Damit ist der Drehimpulserhaltungssatz bewiesen.

Übungsaufgabe:

**(A3.12.1)** Beweisen Sie, dass nur eine Gesamtdrehimpulskomponente erhalten bleibt, wenn die Lagrange-Funktion invariant ist gegenüber Drehungen um eine Achse.

#### 3.12.4 Zusammenfassung

Wir haben drei wichtige Beziehungen zwischen den Symmetrieeigenschaften eines abgeschlossenen Systems und der Erhaltung von physikalischen Größen bewiesen, die in Tabelle 3.1 zusammengefasst sind.

Tabelle 3.1: Symmetrien und Erhaltungssätze

Eigenschaft des Inertialsystems	Lagrange-Funktion	Erhaltungsgröße
Homogenität der Zeit	keine explizite Funktion der Zeit	Hamilton-Funktion (bei konservativen Kraftfeldern gleich Gesamtenergie)
Homogenität des Raums	translationsinvariant	Gesamtimpuls
Isotropie des Raums	rotationsinvariant	Gesamtdrehimpuls

Alle drei Erhaltungssätze lassen sich ebenfalls elegant aus dem Noether-Theorem ableiten.

### 3.12.5 Noether-Theorem für autonome Systeme

Wie wir gesehen haben, hängt das Auftreten zyklischer Variablen und damit die Existenz von Bewegungsintegralen eng zusammen mit Symmetrien des Systems. Eine solche Symmetrie liegt vor, wenn die Lagrange-Funktion des Systems gegenüber einer Symmetrietransformation der Variablen:

$$\tilde{q}_i = h_i(q_i, \alpha) \quad (3.220)$$

invariant ist, wenn also gilt

$$L(\tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i, t) = L(q_i, \dot{q}_i, t) . \quad (3.221)$$

Dabei ist die Transformation von einem Parameter  $\alpha$  abhängig, mit der Bedingung, dass sich für  $\alpha = 0$  die identische Transformation ergibt:

$$h_i(q_i, 0) = q_i .$$

Bei einer zyklischen Variablen  $q_k$  besteht die Symmetrietransformation in einer Verschiebung um  $\alpha$  längs der  $q_k$ -Achse im Konfigurationsraum:

$$\tilde{q}_k = q_k + \alpha ,$$

bei der die Lagrange-Funktion sich natürlich nicht ändert, da sie gar nicht von  $q_k$  abhängt. Im allgemeinen Fall gilt für autonome Systeme, für die also  $L$  nicht explizit von der Zeit abhängt, das

*Theorem von Emmy Noether: Die Lagrange-Funktion  $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$  sei unter der Transformation  $\tilde{q}_i = h_i(\vec{q}, \alpha)$  invariant, wobei  $\alpha$  ein kontinuierlicher Parameter und  $h_i(\vec{q}, 0) = q_i$  die Identität ist. Es existiert dann ein Bewegungsintegral*

$$G(q_i, \dot{q}_i) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left[ \frac{d}{d\alpha} h_i(\vec{q}, \alpha) \right]_{\alpha=0} . \quad (3.222)$$

Beweis:

Zum einen erfüllen auch die transformierten Bahnen  $\tilde{q}_i(t, \alpha) = h_i(q_i(t), \alpha)$  die Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\tilde{q}(t, \alpha), \dot{\tilde{q}}(t, \alpha))}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} = \frac{\partial L(\tilde{q}(t, \alpha), \dot{\tilde{q}}(t, \alpha))}{\partial \tilde{q}_i} . \quad (3.223)$$

Andererseits soll nach Voraussetzung  $L$  invariant gegenüber Symmetrietransformationen sein, also nicht von  $\alpha$  abhängen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} L(\tilde{q}(t, \alpha), \dot{\tilde{q}}(t, \alpha)) &= \frac{d}{d\alpha} L(\vec{q}(t, \alpha), \dot{\vec{q}}(t, \alpha)) \\ &= \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{dq_i}{d\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{d\alpha} \right) = 0 . \end{aligned} \quad (3.224)$$

### 3 Analytische Mechanik

Durch Einsetzen von  $(\partial L/\partial q_i)$  aus Gleichung (3.96) und  $q_i = h_i(\vec{q}, 0) = h_i(\vec{q}, \alpha)_{\alpha=0}$  folgt wegen der Vertauschbarkeit der Differentiationen nach  $t$  und  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \left[ \frac{dh_i(\vec{q}, \alpha)}{d\alpha} \right]_{\alpha=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \left[ \frac{dh_i(\vec{q}, \alpha)}{d\alpha} \right]_{\alpha=0} \right) = \\ \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left[ \frac{dh_i(\vec{q}, \alpha)}{d\alpha} \right]_{\alpha=0} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.225)$$

womit die Behauptung bewiesen ist. Q.E.D.

Mit dem Noether-Theorem beweisen wir jetzt spezielle Symmetrie-Eigenschaften.

**Homogenität des Raumes:** Da kein Raumpunkt ausgezeichnet ist, stellt für ein abgeschlossenes System die Verschiebung um  $a_x$  in  $x$ -Richtung eine Symmetrietransformation dar. Für ein  $N$ -Teilchensystem ist

$$\tilde{x}_j = x_j + a_x, \quad j = 1, \dots, N.$$

Das entsprechende Bewegungsintegral ist nach dem Noether-Theorem (3.222)

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \left[ \frac{d}{da_x} (x_j + a_x) \right]_{a_x=0} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = \sum_{j=1}^N p_{xj} = P_x, \quad (3.226)$$

also die  $x$ -Komponente des Gesamtimpulses. Entsprechendes gilt für die  $y$ - und die  $z$ -Koordinate.

**Isotropie des Raumes:** Da keine Drehrichtung im Raum ausgezeichnet ist, stellt die Drehung um die  $z$ -Achse um  $\alpha_z$  für abgeschlossene Systeme eine Symmetrietransformation dar. Die Lagrange-Funktion muss dabei invariant bleiben. Die Koordinaten eines Systems von Massenpunkten ändern sich bei der Drehung in folgender Weise (vergl. Kap. 1.5):

$$\tilde{x}_j = x_j \cos \alpha_z - y_j \sin \alpha_z, \quad \tilde{y}_j = x_j \sin \alpha_z + y_j \cos \alpha_z.$$

Das zugehörige Bewegungsintegral ist dann

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \left[ \frac{d}{d\alpha_z} (x_j \cos \alpha_z - y_j \sin \alpha_z) \right]_{\alpha_z=0} \right. \\ \left. + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_j} \left[ \frac{d}{d\alpha_z} (x_j \sin \alpha_z + y_j \cos \alpha_z) \right]_{\alpha_z=0} \right] \\ = \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_j} x_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} y_j \right) = \sum_{j=1}^N (x_j p_{yj} - y_j p_{xj}) = \sum_{j=1}^N l_{zj} = \mathcal{L}_z, \end{aligned} \quad (3.227)$$

also die  $z$ -Komponente des Gesamtdrehimpulses. Entsprechendes gilt für die  $x$ - und die  $y$ -Komponente.

Wenn das System nicht abgeschlossen ist, kann seine Lagrange-Funktion trotzdem gegenüber einigen dieser Symmetrietransformationen invariant sein und zu den entsprechenden Bewegungsintegralen führen. Als Beispiel diene ein Massenpunkt  $m$  im homogenen Schwerfeld mit der Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz .$$

Obwohl dieses System nicht abgeschlossen ist, stellen die Verschiebungen in  $x$ - und  $y$ -Richtung und die Drehung um die  $z$ -Achse Symmetrioperationen dar. Es bleiben daher  $p_x$ ,  $p_y$  und  $L_z$  erhalten.

Das Noether-Theorem wurde hier nur für autonome Systeme und zeitunabhängige Symmetrietransformationen bewiesen. Das Theorem gilt auch für den zeitabhängigen Fall, nimmt dann aber eine wesentlich kompliziertere Gestalt an (Killing-Gleichungen).

Das Theorem von Noether bezieht sich nur auf Transformationen, die über einen Parameter kontinuierlich aus der Identität hervorgehen (siehe (3.220)–(3.222)). Daneben gibt es auch unstetige Transformationen wie die Raum-, Zeit- und Ladungsspiegelung, denen ebenfalls Erhaltungsgrößen zugeordnet sind (Parität). Sie spielen in der klassischen Mechanik kaum eine Rolle, sind aber von großer Bedeutung in der Quantenmechanik.

### 3.13 Geschwindigkeitsabhängige Kräfte

Wir wollen nun die Lagrange-Gleichungen auf geschwindigkeitsabhängige Potentiale

$$V^* (q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) .$$

erweitern, statt wie bisher konservative Felder mit  $(\partial V / \partial \dot{q}_k) = 0$  anzunehmen. Diese Erweiterung ist wichtig für die Behandlung der Lorentz-Kraft (Kap. 3.13.1) und von Reibungskräften (Kap. 3.13.2).

Von dem geschwindigkeitsabhängigen Potential  $V^*$  fordert man, dass sich damit die verallgemeinerten Kräfte  $Q_j$  (siehe Gleichung (3.86)) schreiben lassen als

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{K}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V^*}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V^*}{\partial \dot{q}_j} . \quad (3.228)$$

Setzen wir dies in Gleichung (3.91)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j , \quad j = 1, \dots, s$$

ein, so folgt 
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V^*}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial V^*}{\partial q_j} ,$$

oder 
$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial (T - V^*)}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial (T - V^*)}{\partial q_j} = 0 ,$$

so dass mit 
$$L = T - V^* \quad (3.229)$$

wieder 
$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 , \quad j = 1, \dots, s \quad (3.230)$$

### 3 Analytische Mechanik

die Lagrange-Gleichungen 2. Art resultieren, die somit auch für Kräfte gültig sind, die sich gemäß Gleichung (3.228) aus einem geschwindigkeitsabhängigen Potential ableiten lassen. Diese Erweiterung ist sinnvoll, wie das Beispiel der Lorentz-Kraft zeigt.

#### 3.13.1 Beispiel: Lorentz-Kraft

Auf ein Teilchen der Ladung  $e$  im elektromagnetischen Feld wirkt die sogenannte Lorentzkraft (im Gaußschen Maßsystem)

$$\vec{F} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B}, \quad (3.231)$$

wobei  $\vec{E}$  die elektrische Feldstärke,  $\vec{B}$  die magnetische Feldstärke,  $\vec{v}$  die Teilchengeschwindigkeit und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit darstellen. In der Vorlesung Elektrodynamik wird gezeigt werden, dass sich die Feldstärken

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (3.232)$$

aus einem skalaren Potential  $\Phi(\vec{r}, t)$  und einem Vektorpotential  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  ableiten lassen. Setzt man die Gleichungen (3.232) in Gleichung (3.231) ein, so folgt für die Lorentzkraft

$$\vec{F} = e \left( -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right). \quad (3.233)$$

Um diesen Ausdruck zu vereinfachen, betrachten wir die  $x$ -Komponente des letzten Terms:

$$\begin{aligned} T_3 = \left[ \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right]_x &= v_y \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - v_z \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\ &= v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} - v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial A_x}{\partial z}. \end{aligned}$$

Nun addieren wir

$$0 = v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - v_x \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

und erhalten mit

$$\begin{aligned} \frac{dA_x}{dt} &= \frac{\partial A_x}{\partial t} + \left( v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \right), \\ \text{dass} \quad T_3 &= v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{dA_x}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial t}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir nach (3.233) für die  $x$ -Komponente der Lorentzkraft

$$\begin{aligned} \frac{F_x}{e} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial x} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{1}{c}\frac{dA_x}{dt} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial x} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{1}{c}\frac{dA_x}{dt}. \end{aligned}$$

Weil  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  nicht von der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  abhängt, gilt

$$A_x = \frac{\partial}{\partial v_x}(A_x v_x) = \frac{\partial}{\partial v_x}(\vec{A} \cdot \vec{v}),$$

so dass

$$\frac{F_x}{e} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \Phi - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \right] - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial v_x} (\vec{A} \cdot \vec{v}) \right). \quad (3.234)$$

Da das skalare Potential  $\Phi(\vec{r}, t)$  ebenfalls nicht von der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  abhängt, dürfen wir schreiben

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial v_x}, \quad (3.235)$$

mit dem generalisierten Potential

$$U \equiv e\Phi - \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v}. \quad (3.236)$$

Entsprechendes gilt für die  $y$ - und  $z$ -Komponente der Lorentzkraft, d.h.

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial v_y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial v_z},$$

so dass allgemein

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} U + \frac{d}{dt} (\vec{\nabla}_{\vec{v}} U). \quad (3.237)$$

Die Gleichungen (3.235) und (3.237) erfüllen genau die in Gleichung (3.228) gestellten Anforderungen an das verallgemeinerte Potential  $V^*$ .

Für die Lagrange-Funktion (3.229) folgt mit  $V^* = U$ :

$$L = T - e\Phi + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v}. \quad (3.238)$$

Für den zu  $q_k$  kanonisch konjugierten Impuls erhalten wir dann

$$\hat{p}_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_k}. \quad (3.239)$$

Liegen keine Zwangsbedingungen vor, so sind die verallgemeinerten Koordinaten  $q_k$  gleich den natürlichen Koordinaten  $x_k$ . Es gilt dann für den zu  $x_k$  kanonisch konjugierten Impuls

$$\hat{p}_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{x}_k} = p_k + \frac{e}{c} A_k, \quad (3.240)$$

wobei  $p_k$  der lineare Impuls ist. Also ist der kanonisch konjugierte Gesamtimpuls des Teilchens

$$\hat{\vec{p}} = \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}, \quad (3.241)$$

d.h. ein Teilchen im Magnetfeld ändert seinen Impuls um  $e/c\vec{A}$ . Dies ist ein Beispiel dafür, dass der kanonisch konjugierte Impuls bei geschwindigkeitsabhängigem Potential nicht mit dem mechanischen Linearimpuls übereinstimmt.

### 3.13.2 Reibungskräfte und Dissipationsfunktion

Reibungskräfte haben wir bereits in Kap. 2.5.1 kennengelernt.

Wir beginnen die Diskussion wieder bei Gleichung (3.91)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, \dots, s.$$

Nun spalten wir die verallgemeinerte Kraft

$$Q_j = Q_j^{(k)} + Q_j^{(r)} \quad (3.242)$$

in einen konservativen Anteil  $Q_j^{(k)}$  und die verallgemeinerte Reibungskraft  $Q_j^{(r)}$  auf. Der konservative Anteil

$$Q_j^{(k)} = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

lässt sich aus einem Potential ableiten. Für die verallgemeinerte Reibungskraft erhalten wir gemäß Gleichung (3.86)

$$Q_j^{(r)} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(r)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (3.243)$$

und können diese aus den Reibungskräften  $\vec{F}_i^{(r)}$  in natürlichen Koordinaten berechnen.

Mit der Lagrange-Funktion  $L = T - V$  folgt dann für (3.91)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{(r)}, \quad j = 1, \dots, s. \quad (3.244)$$

Damit kann man prinzipiell die Bewegungsgleichungen bestimmen; allerdings ist die Berechnung der verallgemeinerten Reibungskräfte oft aufwendig.

Verwenden wir den allgemeinen Ansatz (2.80)

$$\vec{F}_i^{(r)} = -K_i(v_i) \frac{\vec{v}_i}{v_i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.245)$$

dann folgt für (3.243)

$$Q_j^{(r)} = -\sum_{i=1}^N K_i(v_i) \frac{\vec{v}_i}{v_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}.$$

Mit der Hilfsformel (3.83)

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j},$$

folgt

$$Q_j^{(r)} = -\sum_{i=1}^N K_i(v_i) \frac{\vec{v}_i}{v_i} \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}.$$

Es ist

$$\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) = \frac{1}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial \dot{q}_j} = v_i \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j},$$

so dass

$$Q_j^{(r)} = - \sum_{i=1}^N K_i(v_i) \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j}. \quad (3.246)$$

**Trick:** Sei  $F$  die Stammfunktion von  $f$ , also

$$\int_0^{a(x)} dy f(y) = F(a(x)) - F(0),$$

dann gilt

$$\frac{d}{dx} \int_0^{a(x)} dy f(y) = \frac{d}{dx} [F(a(x)) - F(0)] = f(a(x)) \frac{da(x)}{dx}. \quad (3.247)$$

Wenden wir diesen Trick auf Gleichung (3.246) an, dann gilt:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \int_0^{v_i} d\tilde{v}_i K_i(\tilde{v}_i) = K_i(v_i) \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j},$$

und wir erhalten

$$Q_j^{(r)} = - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^N \int_0^{v_i} d\tilde{v}_i K_i(\tilde{v}_i) = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j}, \quad (3.248)$$

mit der *Dissipationsfunktion*

$$D \equiv \sum_{i=1}^N \int_0^{v_i} d\tilde{v}_i K_i(\tilde{v}_i). \quad (3.249)$$

Damit wird dann aus (3.244)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad j = 1, \dots, s. \quad (3.250)$$

**Beispiel:** Im Fall der Stokeschen Reibung (2.81),  $\vec{F}_i^{(r)} = -K_i \vec{v}_i$ , ist  $K_i(v_i) = K_i v_i$ , so dass nach Gleichung (3.249)

$$D = \sum_{i=1}^N K_i \int_0^{v_i} d\tilde{v}_i \tilde{v}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N K_i v_i^2. \quad (3.251)$$

Diese spezielle Dissipationsfunktion wird als *Rayleighsche Dissipationsfunktion* bezeichnet. Die vom System gegen die Reibung geleistete Arbeit ist

$$dW = - \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(r)} \cdot d\vec{r}_i = - \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(r)} \cdot \vec{v}_i dt = \sum_{i=1}^N K_i v_i^2 dt = 2D dt, \quad (3.252)$$

d.h. die Leistung  $(dW/dt) = 2D$  ist gleich dem doppelten Wert der Dissipationsfunktion. Da diese Energie in Wärme umgewandelt wird und dem System dadurch verloren geht, spricht man von Energiedissipation, was auch die Namensgebung für die Funktion  $D$  rechtfertigt.

### 3.14 Der Virialsatz

Der Virialsatz ist oft sehr hilfreich, um das zeitliche Mittel einer physikalischen Größe  $S(t)$  zu berechnen.

*Definition:* Der Mittelwert (oder Erwartungswert) einer zeitlich veränderlichen physikalischen Größe wird durch

$$\langle W(t) \rangle = \overline{W} \equiv \frac{1}{\tau} \int_0^\tau W(t) dt . \quad (3.253)$$

definiert, wobei  $\tau$  ein zu wählendes Zeitintervall kennzeichnet.

Für ein System von  $N$ -Massenpunkten in einem begrenzten Volumen, die sich mit endlicher Geschwindigkeit bewegen (d.h. die Werte  $r_i$  und  $p_i$  sind begrenzt), betrachten wir die Größe

$$S \equiv \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i . \quad (3.254)$$

Dann gilt

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i \cdot \vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i . \quad (3.255)$$

Mit  $\vec{p}_i = m_i \dot{\vec{r}}_i$  folgt für den 2. Term:

$$\sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = 2 \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{r}_i^2 = 2T ;$$

mit  $\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i$  folgt für den 1. Term:

$$\sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i \cdot \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i ,$$

so dass sich für Gleichung (3.255) ergibt:

$$\frac{dS}{dt} = 2T + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i . \quad (3.256)$$

Wir mitteln nun diesen Ausdruck gemäß der Vorschrift (3.253) und erhalten

$$\overline{2T} + \overline{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i} = \left\langle \frac{dS}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dS(t)}{dt} dt = \frac{S(\tau) - S(0)}{\tau} . \quad (3.257)$$

Im Grenzfall  $\tau \rightarrow \infty$  gilt wegen der angenommenen Beschränktheit von  $S$ :

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{S(\tau) - S(0)}{\tau} = 0 ,$$

so dass wir den Virial-Satz erhalten

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \overline{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i} . \quad (3.258)$$

Dieser erweist sich als sehr nützlich in der kinetischen Theorie der Gase. Wir nehmen jetzt zwei zusätzliche Bedingungen für die Kraft  $\vec{F}_i$  an:

- (a) Die Kraft ist konservativ:  $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V$ .
- (b) Das Potential ist eine homogene Funktion vom Grad  $k$ , d.h.  $V(\lambda x) = \lambda^k V(x)$ .

Dann gilt das Euler-Theorem (3.200):

$$\sum_{i=1}^N \left( \vec{\nabla}_i V \right) \cdot \vec{r}_i = kV . \quad (3.259)$$

Mit Bedingung (a) und (3.259) erhalten wir für den Virialsatz (3.258)

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2} \overline{\sum_{i=1}^N \left( \vec{\nabla}_i V \right) \cdot \vec{r}_i} = \frac{k}{2} \langle V \rangle \quad (3.260)$$

und für die Gesamtenergie folgt

$$E = \langle T \rangle + \langle V \rangle = \frac{k+2}{2} \langle V \rangle = \frac{k+2}{k} \langle T \rangle . \quad (3.261)$$

Betrachten wir als Beispiel den harmonischen Oszillator (Kap. 2.4.4) mit dem Potential  $V = ar^2$ , d.h. vom Grad  $k = 2$ . In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= \langle V \rangle \\ \text{und} \quad E &= 2 \langle V \rangle = 2 \langle T \rangle . \end{aligned}$$

Im Beispiel des Gravitationspotentials  $V = -b/r$ , d.h. vom Grad  $k = -1$ , ist

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= -\frac{1}{2} \langle V \rangle \\ \text{und} \quad E &= -\frac{1}{2} \langle V \rangle + \langle V \rangle = -\left\langle \frac{b}{2r} \right\rangle < 0 . \end{aligned}$$

### 3 *Analytische Mechanik*

## 4 Das Zweikörper-Problem

Wir betrachten die Bewegung zweier Massenpunkte unter dem Einfluss einer wechselseitigen Zentralkraft. Wir bezeichnen mit  $m_1$  und  $m_2$  die Massen der beiden Massenpunkte mit den Ortsvektoren  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$ . Es ist aber ungünstig, mit den sechs kartesischen Komponenten der beiden Ortsvektoren zu arbeiten. Wir werden stattdessen neue Koordinaten suchen mit dem Ziel, möglichst viele zyklische Koordinaten zu finden, um die Erhaltungssätze der korrespondierenden kanonisch konjugierten Impulse auszunutzen.

### 4.1 Lagrange-Funktion des Zweikörper-Problems

Wir wählen als neue Koordinaten (siehe Abb. 4.1):

- (a) den Abstandsvektor

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (4.1)$$

und

- (b) den in Kap. 3.12.2 eingeführten Schwerpunktvektor

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.2)$$

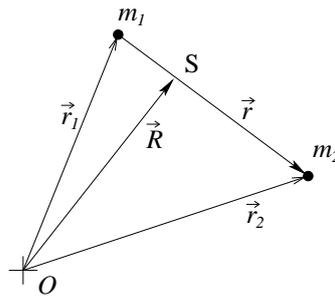


Abbildung 4.1: Abstandsvektor  $\vec{r}$  und Schwerpunktvektor  $\vec{R}$  beim Zweikörper-Problem

Für die Umkehrtransformationen gelten dann

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (4.3)$$

und

$$\vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \quad (4.4)$$

#### 4 Das Zweikörper-Problem

Wir merken an, dass bei der Planetenbewegung die Masse der Sonne  $m_1 = M_s$  sehr viel größer als die Masse des Planeten  $m_2 = m_p$  ist. In diesem Fall  $M_s \gg m_p$  folgt aus den Gleichungen (4.3)–(4.4)

$$\vec{r}_S = \vec{R} - \frac{m_p}{M_s + m_p} \vec{r} \simeq \vec{R}, \quad \vec{r}_p = \vec{R} + \frac{M_s}{M_s + m_p} \vec{r} \simeq \vec{R} + \vec{r}, \quad (4.5)$$

so dass bei der speziellen Wahl des Schwerpunktsystems ( $\vec{R} = \vec{0}$ ) die Sonne im Ursprung liegt ( $\vec{r}_S \simeq \vec{0}$ ) und der Planeten Ortsvektor mit dem Abstandsvektor  $\vec{r}_p \simeq \vec{r}$  zusammenfällt.

Da die Massenpunkte gegenseitig Zentralkräfte ausüben, kann das zugehörige Potential nur eine Funktion des Abstands  $r = |\vec{r}|$  sein. Mit den Transformationen (4.3)–(4.4) erhalten wir im allgemeinen Fall für die Lagrange-Funktion des Zweikörper-Problems

$$\begin{aligned} L &= \frac{m_1}{2} \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\vec{r}}_2^2 - V(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) \\ &= \frac{m_1}{2} \left[ \dot{\vec{R}}^2 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{\vec{r}}^2 \right] \\ &\quad + \frac{m_2}{2} \left[ \dot{\vec{R}}^2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{\vec{r}}^2 \right] - V(r) \\ &= \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{2(m_1 + m_2)^2} \dot{\vec{r}}^2 - V(r) \\ &= \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \dot{\vec{r}}^2 - V(r). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Neben der Gesamtmasse

$$M = m_1 + m_2 \quad (4.7)$$

definieren wir die sogenannte *reduzierte Masse* zu

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.8)$$

Gleichung (4.8) lässt sich auch als Summe der inversen Massen schreiben:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}. \quad (4.9)$$

Für die Gesamt-Lagrange-Funktion (4.6) erhalten wir dann

$$L = \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(r) = L_{Sp} + L_{rel}, \quad (4.10)$$

die wir als Summe eines Schwerpunktanteils

$$L_{Sp} = \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}^2 \quad (4.11)$$

und eines Relativanteils

$$L_{rel} = \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(r) \quad (4.12)$$

schreiben können, da die Gesamt-Lagrange-Funktion (4.10) keine Mischterme in  $\vec{R}$  und  $\vec{r}$  enthält. Offensichtlich lässt sich die Schwerpunktbewegung von der Relativbewegung separieren, denn die Berechnung der Lagrange-Gleichungen ergibt

$$\text{Schwerpunktbewegung:} \quad M\ddot{\vec{R}} = \vec{0} \quad (4.13)$$

$$\text{und} \quad \text{Relativbewegung:} \quad \mu\ddot{\vec{r}} + \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} = \vec{0}. \quad (4.14)$$

Weil die Schwerpunktkoordinate  $\vec{R}$  nicht in der Gesamt-Lagrange-Funktion (4.10) auftritt, ist diese zyklisch, so dass nach Kap. 3.12 der kanonisch konjugierte Impuls

$$\vec{P} = M\dot{\vec{R}} = \text{const.} \quad (4.15)$$

erhalten bleibt in Übereinstimmung mit Gleichung (4.13). Durch nochmalige Zeitintegration erhalten wir für die Bewegung des Schwerpunktvektors

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \frac{\vec{P}}{M}t, \quad (4.16)$$

mit der Integrationskonstanten  $\vec{R}_0$ .

Die Separierung (4.10) in Schwerpunktbewegung und Relativbewegung ergibt sich, weil "zufällig" die richtigen Ortskoordinaten gewählt wurden.

Die Bewegungsgleichung (4.14) für die Relativbewegung entspricht der Lösung des Gesamtproblems (4.10) im Schwerpunkt-Ruhsystem ( $\vec{R} = \vec{0}$ ) aufgrund der Translationsinvarianz des Gesamtsystems gegenüber Verschiebungen des Schwerpunktvektors.

## 4.2 Relativbewegung

Aufgrund der Kugelsymmetrie des Potentials  $V(r)$  ist es naheliegend, sphärische Polarkoordinaten zu wählen.

Wir wissen bereits aus Kap. 2.3.6, dass bei Zentralkräften  $\vec{F} \parallel \vec{r}$  der Drehimpuls  $\vec{l} = \text{const.}$  erhalten ist. Hier ist also der Drehimpuls der Relativbewegung eine Erhaltungsgröße:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = \text{const.} . \quad (4.17)$$

Aus Gleichung (4.17) folgt direkt, dass der Abstandsvektor  $\vec{r}$  und der lineare Impuls  $\vec{p}$  in einer Ebene senkrecht zum Drehimpulsvektor  $\vec{l}$  liegen, der fest im Raum liegt (siehe Abb. 4.2). Die Relativbewegung verläuft in dieser einen Ebene, und wir haben nur noch ein zwei-dimensionales Problem. Die ebenen Polarkoordinaten  $r$  und  $\phi$  reichen zur Beschreibung aus.

Wegen (siehe Beispiel Kap. 3.8.3 mit  $\theta = \phi$ )  $T = (\mu/2)\dot{r}^2 = (\mu/2)(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2)$  gilt für die Lagrange-Funktion (4.12) der Relativbewegung

$$L_{rel} = \frac{\mu}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \right) - V(r). \quad (4.18)$$

## 4 Das Zweikörper-Problem

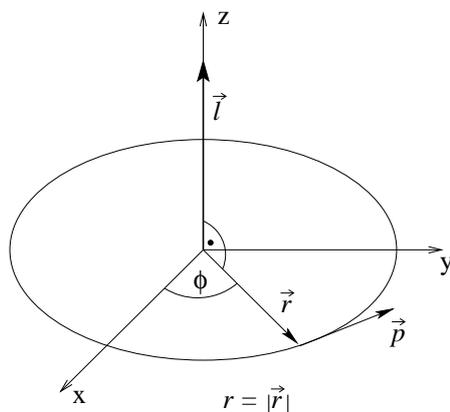


Abbildung 4.2: Zur Illustration der Relativbewegung

Die Koordinate  $\phi$  taucht nicht in dieser Lagrange-Funktion auf, ist also zyklisch, so dass der dazugehörige kanonisch konjugierte Impuls

$$p_\phi = \frac{\partial L_{rel}}{\partial \dot{\phi}} = \mu r^2 \dot{\phi} \equiv l = const. \quad (4.19)$$

eine Erhaltungsgröße ist.  $l$  ist der Betrag des Drehimpulses bezüglich des Schwerpunktsystems. Natürlich entspricht (4.19) der Lagrange-Gleichung der Relativbewegung bezüglich der Koordinate  $\phi$ .

### 4.2.1 Flächensatz

Das Ergebnis (4.19) hat eine einfache geometrische Interpretation:

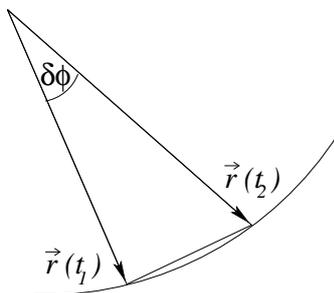


Abbildung 4.3: Zur Illustration des Flächensatzes

Wie in Abb. 4.3 skizziert, überstreicht der Radiusvektor  $\vec{r}(t)$  auf seiner Bahn im Zeitintervall  $dt = t_2 - t_1$  die Fläche  $dA = 1/2 r^2 d\phi$  (Fläche des Dreiecks). Teilen wir durch  $dt$ , so erhalten

wir mit Gleichung (4.19) für die "Flächengeschwindigkeit"

$$\dot{A} = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \dot{\phi} = \frac{l}{2\mu} = \text{const.} \quad (4.20)$$

Damit haben wir den *Flächensatz* oder das 2. *Keplersche Gesetz* bewiesen: Der Fahrstrahl  $\vec{r}$  überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen.

### 4.2.2 Energieerhaltungssatz

Aus der Lagrange-Funktion (4.18) erhalten wir

$$\frac{\partial L_{rel}}{\partial r} = \mu r \dot{\phi}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}$$

und

$$\frac{\partial L_{rel}}{\partial \dot{r}} = \mu \dot{r}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{rel}}{\partial \dot{r}} \right) = \mu \ddot{r},$$

so dass für die Lagrange-Gleichung der Relativbewegung bezüglich der Koordinate  $r$  folgt

$$\mu \ddot{r} - \mu r \dot{\phi}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0. \quad (4.21)$$

Nach Gleichung (4.19) ist

$$\dot{\phi}^2 = \frac{l^2}{(\mu^2 r^4)},$$

so dass

$$\mu \ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} + \frac{\partial V}{\partial r} = \mu \ddot{r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) \right) = 0.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit  $\dot{r}$ ,

$$\mu \ddot{r} \dot{r} + \frac{dr}{dt} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) \right) = 0$$

und wenden die Kettenregel der Differentiation an, so erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) \right) = 0$$

oder

$$\frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) = E = \text{const.} \quad (4.22)$$

Dies ist natürlich der bekannte Energieerhaltungssatz

$$E = T + V = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + V(r) = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) = \text{const.}$$

da wir ja von vorneherein ein nicht-dissipatives konservatives System betrachtet haben.

Mit der Definition des *effektiven Potentials*

$$V_{eff}(r) \equiv V(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2} \quad (4.23)$$

schreibt sich der Energieerhaltungssatz (4.22) als

$$\frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + V_{eff}(r) = E = \text{const.} \quad (4.24)$$

### 4.2.3 Qualitative Aussagen zur Bewegung am Beispiel $V = kr^2$ , $k = \text{const.}$

In Abb. 4.4 skizzieren wir die Variation des effektiven Potentials  $V_{\text{eff}}(r)$  als Funktion von  $r$  mit dem Beispieldpotential des harmonischen Oszillators  $V = kr^2$ .

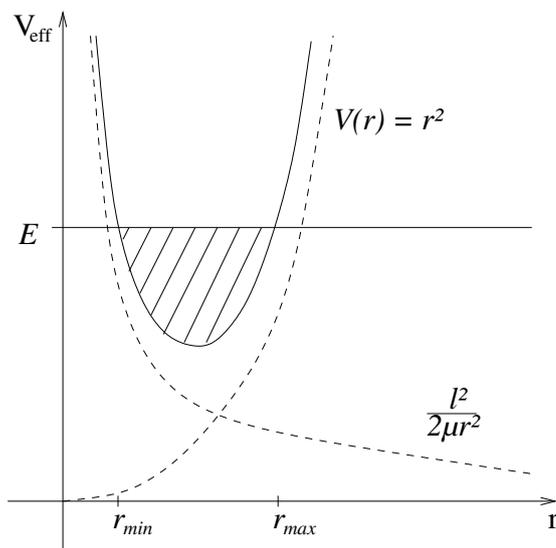


Abbildung 4.4: Effektives Potential am Beispiel des harmonischen Oszillators

Aufgrund von Gleichung (4.24) entspricht die schraffierte Fläche in Abb. 4.4 der Differenz  $E - V_{\text{eff}} = (\mu/2)\dot{r}^2$ . Weil  $(\mu/2)\dot{r}^2 \geq 0$ , sind nur Bewegungszustände mit  $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$  möglich, wobei der minimale und maximale Abstand durch  $V_{\text{eff}}(r_{\min}) = E$  und  $V_{\text{eff}}(r_{\max}) = E$  gegeben sind. Für die Bewegung erhält man gebundene Zustände mit den in Abb. 4.5 skizzierten Bahnen.

Für  $l \neq 0$  ist  $r_{\min} > 0$ , d.h. der Körper kann nur für verschwindenden Drehimpuls  $l = 0$  ins Zentrum der Bewegung fallen. Für  $l \neq 0$  ist an den Punkten  $r = r_{\min}$  und  $r = r_{\max}$  zwar  $\dot{r} = 0$ , aber (wegen  $\dot{\phi} = l/(\mu r^2) \neq 0$ ) nicht die gesamte kinetische Energie  $T = 0$ , so dass  $\vec{r} \neq \vec{0}$  selbst bei  $r_{\min}$  und  $r_{\max}$ .

### 4.2.4 Lösung der Bewegungsgleichung

Wir berechnen jeweils  $\vec{r}(t)$  und  $\phi(t)$  als Funktion der Zeit  $t$  und die Abhängigkeit  $\phi = \phi(r)$ . Aus der Bewegungsgleichung (4.24)

$$\frac{\mu}{2}\dot{r}^2 = E - V_{\text{eff}}(r)$$

folgt sofort

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - V_{\text{eff}}(r))},$$

oder

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} (E - V_{\text{eff}}(r))}}. \quad (4.25)$$

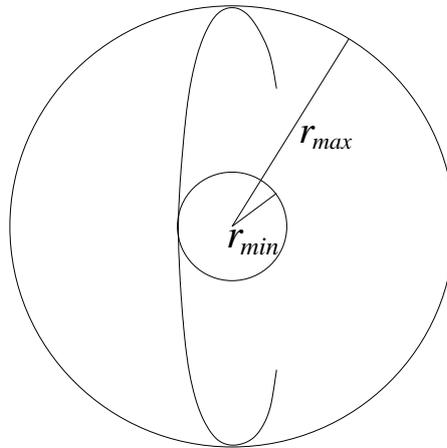


Abbildung 4.5: Resultierende Bahnkurven

Durch Integration erhalten wir

$$t - t_0 = \int_{t_0}^t dt' = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu} (E - V_{eff}(r'))}}. \quad (4.26)$$

Aus dem Flächensatz (4.19) folgt

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{l}{\mu r^2}, \quad (4.27)$$

oder

$$\phi - \phi_0 = \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi' = \int_{t_0}^t dt' \frac{l}{\mu r^2(t')} = \frac{l}{\mu} \int_{t_0}^t \frac{dt'}{r^2(t')}, \quad (4.28)$$

wobei die Lösung  $r(t)$  nach Gleichung (4.26) eingesetzt werden muss. Wir können aber auch Gleichung (4.27) umformen zu

$$dt = \frac{\mu r^2 d\phi}{l}$$

und dieses Ergebnis in Gleichung (4.25) einsetzen. Dann ergibt sich

$$d\phi = \frac{l}{\mu r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - V_{eff}(r))}} dr,$$

oder

$$\phi - \phi_0 = \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi' = l \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{2\mu (E - V_{eff}(r'))}}, \quad (4.29)$$

so dass wir die formale Lösung der Bahnkurve  $\phi = \phi(r)$  oder nach Invertierung zu  $r = r(\phi)$  erhalten. Zur weiteren Reduzierung von Gleichung (4.29) müssen wir das Potential  $V(r)$  im effektiven Potential (4.23) festlegen.

### 4.2.5 Bewegungen im Zentralfeld

Gemäß der allgemeinen Diskussion in Kap. 4.2.3 verläuft die Bewegung im Bereich  $r_{min} \leq r(t) \leq r_{max}$ , wobei der minimale ( $r_{min}$ ) und maximale ( $r_{max}$ ) Abstand durch die Nullstellen der Funktion

$$E - V_{eff} = E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} = 0 \quad (4.30)$$

gegeben sind. Für spezielle Werte von  $V(r)$ ,  $E$  und  $l$  hat Gleichung (4.30) nur eine Nullstelle: in solchen Fällen gilt dann nach (4.22), dass  $\dot{r} = 0 \forall t$  und  $r = const.$  Das Teilchen bewegt sich dann auf einer Kreisbahn.

Ist die Bewegung im Potential  $V(r)$  periodisch, dann verläuft die Bahn, wie in Abb. 4.6 skizziert, in geschlossenen Bahnen.

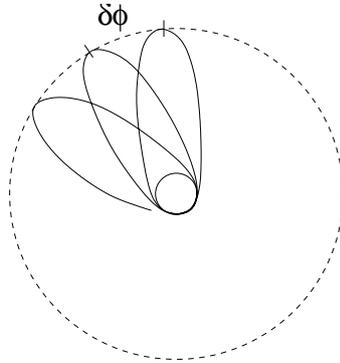


Abbildung 4.6: Geschlossene Bahnkurven

Die Änderung im Winkel  $\phi$  bei der Variation von  $r$  von  $r_{min}$  bis  $r_{max}$  und zurück lässt sich aus Gleichung (4.29) berechnen:

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \frac{2l}{\mu} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - V_{eff}(r))}} \\ &= 2l \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\mu (E - V_{eff}(r))}}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Die Bewegung ist geschlossen, falls

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{a}{b}, \quad (4.32)$$

wobei  $a, b \in \mathbb{N}$  beliebige ganze Zahlen sind. Dann wiederholt sich die Bahn nach  $b$  Perioden weil  $\sin(2\pi a) = 0$ . Man kann zeigen (Übungsaufgabe), dass dies nur für Potentialverläufe  $V(r) \propto r^n$  mit  $n = -1$  und  $n = 2$  auftreten kann.

### 4.3 Kepler-Problem: Planetenbewegung

Wir betrachten jetzt das spezielle Wechselwirkungspotential

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \text{mit} \quad \alpha = \text{const.} \quad (4.33)$$

Dieser Fall ist von fundamentaler Bedeutung, da es sowohl für die Gravitationswechselwirkung zweier Massen mit  $\alpha = Gm_1m_2$  als auch für die Coulombwechselwirkung zweier Ladungen mit  $\alpha = -q_1q_2$  gilt. Für das effektive Potential (4.23) erhalten wir dann

$$V_{eff} = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}. \quad (4.34)$$

Gleichung (4.29) reduziert sich in diesem Fall auf

$$\phi - \phi_0 = l \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{2\mu \left( E - \frac{l^2}{2\mu r'^2} + \frac{\alpha}{r'} \right)}}. \quad (4.35)$$

Mit der Substitution  $u = 1/r'$  erhalten wir daraus mit

$$\begin{aligned} r' &= \frac{1}{u} \quad \text{und} \quad \frac{dr'}{du} = -\frac{1}{u^2} \\ \phi - \phi_0 &= l \int_{\frac{1}{r_0}}^{\frac{1}{r}} \frac{du}{\sqrt{2\mu \left( E - \frac{l^2 u^2}{2\mu} + \alpha u \right)}} = \int_{\frac{1}{r_0}}^{\frac{1}{r}} \frac{du}{\sqrt{-u^2 + \frac{2\alpha\mu u}{l^2} + \frac{2\mu E}{l^2}}}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Das in (4.36) auftretende Integral lösen wir mit dem in der Integraltafel von Gradshteyn und Ryzhik (1965, Formeln 2.26 und 2.261) angegebenen Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = -\frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{2cx + b}{\sqrt{-\Delta}}. \quad (4.37)$$

für die Funktion

$$R(x) = a + bx + cx^2 \quad \text{mit} \quad \Delta = 4ac - b^2 < 0.$$

In unserem Fall ist

$$a = \frac{2\mu E}{l^2}, \quad b = \frac{2\alpha\mu}{l^2} \quad \text{und} \quad c = -1,$$

so dass

$$\Delta = -\frac{8\mu E}{l^2} - \frac{4\alpha^2\mu^2}{l^4} = -\frac{4\mu}{l^2} \left( 2E + \frac{\alpha^2\mu}{l^2} \right) < 0.$$

Unter Verwendung von (4.37) erhalten wir dann für Gleichung (4.36)

$$\phi - \phi_0 = - \left[ \arcsin \frac{\frac{2\alpha\mu}{l^2} - 2u}{\sqrt{\frac{4\mu}{l^2} \left( 2E + \frac{\alpha^2\mu}{l^2} \right)}} \right]_{\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r_0}} = \left[ \arcsin \frac{\frac{\alpha\mu}{l^2} - u}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} + \frac{\alpha^2\mu^2}{l^4}}} \right]_{\frac{1}{r_0}}^{\frac{1}{r}}. \quad (4.38)$$

#### 4 Das Zweikörper-Problem

Wir benutzen (Gradshteyn und Ryzhik 1965, Formel 1.623.1)

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x ,$$

so dass  $\arcsin(-x) = -\arcsin(x) = \arccos(x) - \frac{\pi}{2}$

und erhalten damit für (4.38)

$$\phi - \phi_0 = \arccos \frac{\frac{1}{r} - \frac{\alpha\mu}{l^2}}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} + \frac{\alpha^2\mu^2}{l^4}}} - \arccos \frac{\frac{1}{r_0} - \frac{\alpha\mu}{l^2}}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} + \frac{\alpha^2\mu^2}{l^4}}} .$$

Wir wählen als Anfangsbedingung

$$\phi_0 = \arccos \frac{\frac{1}{r_0} - \frac{\alpha\mu}{l^2}}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} + \frac{\alpha^2\mu^2}{l^4}}} ,$$

so dass als Lösung folgt

$$\phi = \arccos \frac{\frac{1}{r} - \frac{\alpha\mu}{l^2}}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} + \frac{\alpha^2\mu^2}{l^4}}} = \arccos \frac{\frac{l^2}{\alpha\mu r} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}}} . \quad (4.39)$$

Lösen wir Gleichung (4.39) nach  $r$  auf, so erhalten wir über

$$\frac{l^2}{\alpha\mu r} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}} \cos \phi$$

die invertierte Lösung

$$r = \frac{l^2}{\mu\alpha} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}} \cos \phi \right]^{-1} . \quad (4.40)$$

Wir definieren jetzt zwei Parameter:

$$\text{Exzentrizität:} \quad \epsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}} \quad (4.41)$$

$$\text{und} \quad \text{Bahnparameter:} \quad p \equiv \frac{l^2}{\mu\alpha} . \quad (4.42)$$

Damit schreibt sich die Bahnkurve (4.40) kompakt als

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \phi} . \quad (4.43)$$

Wie wir uns im nächsten Abschnitt überzeugen, ist Gleichung (4.43) die allgemeine Bestimmungsgleichung eines Kegelschnitts, d.h. des Schnittes einer Ebene mit einem Kreiskegel, ausgedrückt in Polarkoordinaten, wobei ein Brennpunkt mit dem Koordinatenursprung von  $r$  (!) zusammenfällt, also mit dem Schwerpunkt des Zweikörperproblems, der bei der Planetenbewegung praktisch mit der Position der Sonne zusammenfällt (siehe Gleichung (4.5)).

## 4.4 Mathematische Zwischenbetrachtung über Kegelschnitte in Polarkoordinaten

Die Gleichung (4.43) beschreibt im Allgemeinen

- Kreise für  $\epsilon = 0$ ,
- Ellipsen für  $\epsilon < 1$ ,
- Parabeln für  $\epsilon = 1$ ,
- Hyperbeln für  $\epsilon > 1$ .

### 4.4.1 Ellipse und Kreise

Unter einer *Ellipse* versteht man die Menge aller Punkte  $P$  in einer Ebene, deren Entfernungen  $r$  und  $r'$  von zwei festen Brennpunkten  $F(c, 0)$  und  $F'(-c, 0)$  eine konstante Summe ist (Abb. 4.7), d.h.

$$r + r' = 2a, \quad \text{wobei} \quad 2a > \overline{FF'} = 2c. \quad (4.44)$$

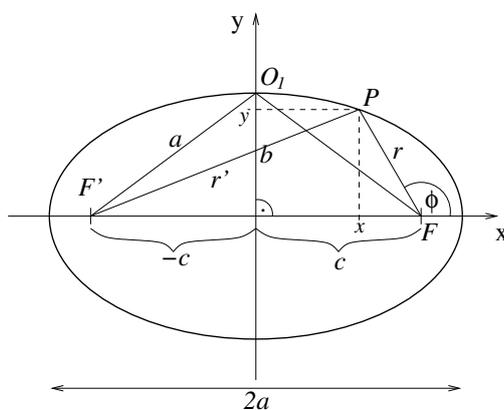


Abbildung 4.7: Ellipse

Für den in Abb. 4.7 eingezeichneten Punkt  $O_1$  gilt

$$\begin{aligned} r = r' &= a, \\ \text{also} \quad c^2 + b^2 &= a^2, \\ \text{so dass} \quad c &= \sqrt{a^2 - b^2}. \end{aligned}$$

$a$  und  $b$  werden als große bzw. kleine Halbachse der Ellipse bezeichnet.

#### 4 Das Zweikörper-Problem

Wir führen die Exzentrizität  $\epsilon$  der Ellipse ein durch die Forderung, dass  $c = \epsilon a$  sein soll, d.h. also

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \leq 1. \quad (4.45)$$

Für  $\epsilon = 0$  ist dann  $a = b$  und  $c = 0$ , und die Brennpunkte  $F = F'$  fallen mit dem Koordinatenursprung zusammen: die Ellipse wird zum Kreis.

Wir benutzen den Kosinussatz (Kap. 1.6.3) für das Dreieck  $\Delta(F'FP)$  und erhalten mit

$$\begin{aligned} \cos(\pi - \phi) &= -\cos \phi \\ r'^2 &= (2c)^2 + r^2 - 2r(2c) \cos(\pi - \phi) = 4c^2 + r^2 + 4rc \cos \phi. \end{aligned}$$

Zusammen mit Gleichung (4.44) folgt

$$r' = 2a - r = \sqrt{4c^2 + r^2 + 4rc \cos \phi}.$$

Wir quadrieren diese Gleichung und benutzen  $c = \epsilon a$ :

$$4a^2 - 4ar + r^2 = 4\epsilon^2 a^2 + r^2 + 4\epsilon ar \cos \phi,$$

so dass 
$$4ar(1 + \epsilon \cos \phi) = 4a^2(1 - \epsilon^2),$$

oder 
$$r = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos \phi}. \quad (4.46)$$

Mit  $p = a(1 - \epsilon^2)$  ist diese Gleichung identisch mit Gleichung (4.43).

Verwenden wir die kartesischen Koordinaten  $x, y$  des Punktes  $P$  in Abb. 4.7, so gilt mit dem Satz des Pythagoras:

$$r^2 = y^2 + (c - x)^2, \quad r'^2 = (x + c)^2 + y^2.$$

Damit folgt für Gleichung (4.44):

$$\sqrt{y^2 + (c - x)^2} + \sqrt{y^2 + (x + c)^2} = 2a$$

und nach Quadrieren:

$$y^2 + (c - x)^2 + y^2 + (x + c)^2 + 2\sqrt{(y^2 + (c - x)^2)(y^2 + (x + c)^2)} = 4a^2,$$

oder nach Ordnen und Division durch 2

$$\begin{aligned} (2a^2 - c^2) - (y^2 + x^2) &= \sqrt{(y^2 + (c - x)^2)(y^2 + (x + c)^2)} \\ &= \sqrt{y^4 + 2(x^2 + c^2)y^2 + (x^2 - c^2)^2}. \end{aligned}$$

Mit

$$b^2 = a^2 - c^2$$

erhalten wir 
$$2a^2 - c^2 = a^2 + b^2,$$

so dass 
$$(a^2 + b^2) - (y^2 + x^2) = \sqrt{y^4 + 2(x^2 + c^2)y^2 + (x^2 - c^2)^2}.$$

#### 4.4 Mathematische Zwischenbetrachtung über Kegelschnitte in Polarkoordinaten

Das Quadrieren dieser Gleichung führt auf

$$(a^2 + b^2)^2 + (x^2 + y^2)^2 - 2(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = y^4 + 2(x^2 + c^2)y^2 + (x^2 - c^2)^2,$$

oder

$$(a^2 + b^2)^2 + x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = y^4 + x^4 + 2x^2y^2 + 2c^2y^2 - 2c^2x^2 + c^4.$$

Daraus folgt nach Ordnen

$$y^2(2c^2 + 2a^2 + 2b^2) + x^2(2a^2 + 2b^2 - 2c^2) = (a^2 + b^2)^2 - c^4$$

und mit

$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$4a^2y^2 + 4b^2x^2 = (a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 = 4a^2b^2.$$

Dividieren wir durch  $4a^2b^2$  so folgt die Normalform der Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.47)$$

An dieser Gleichung erkennt man schön, dass in der Tat  $a$  und  $b$  die große bzw. kleine Halbachsen der Ellipse sind. Für spätere Verwendung notieren wir, dass die Fläche der Ellipse durch  $A = \pi ab$  gegeben ist

Im Sonderfall des Kreises ( $\epsilon = 1$ ) ist  $a = b = r$  und Gleichung (4.47) reduziert sich auf  $x^2 + y^2 = r^2$ .

#### 4.4.2 Parabel

Unter einer *Parabel* versteht man den geometrischen Ort aller Punkte  $P$  einer Ebene, die von einer festen Leitlinie  $L$  und dem festen Brennpunkt  $F(c, 0)$  gleichen Abstand haben (Abb. 4.8).

Bezeichne  $r$  den Abstand des Punktes  $P$  von  $F$  und  $d$  den Abstand des Punktes  $P$  von der Leitlinie  $L$ , dann muss nach Definition  $d = r$  sein. Es gilt die Beziehung (siehe Abb. 4.8)

$$2c = d + r \cos \phi,$$

so dass mit

$$d = r$$

folgt

$$2c = r(1 + \cos \phi),$$

oder

$$r = \frac{2c}{1 + \cos \phi}. \quad (4.48)$$

Mit  $p = 2c$  und  $\epsilon = 1$  ist diese Gleichung identisch mit Gleichung (4.43).

Verwenden wir die kartesischen Koordinaten  $x, y$  des Punktes  $P$  so gilt:

$$c + x = d = r$$

und

$$r^2 = y^2 + c^2 = y^2 + (c - x)^2.$$

Die Kombination beider Gleichungen führt auf die Scheitelfgleichung

$$y^2 = (c + x)^2 - (c - x)^2 = 4cx. \quad (4.49)$$

#### 4 Das Zweikörper-Problem

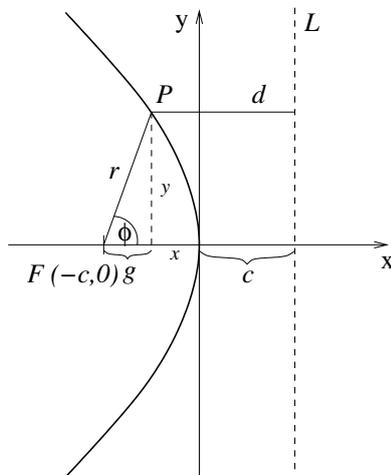


Abbildung 4.8: Parabel

#### 4.4.3 Hyperbel

Unter einer *Hyperbel* versteht man den geometrischen Ort aller Punkte  $P$  einer Ebene, deren Entfernungen von zwei festen Brennpunkten  $F(c, 0)$  und  $F'(-c, 0)$  eine konstante Differenz ergeben (Abb. 4.9), d.h.

$$r - r' = 2a, \quad \text{wobei} \quad 2a < \overline{FF'} = 2c \quad (4.50)$$

ergibt den einen Ast der Hyperbel, während

$$r' - r = 2a \quad (4.51)$$

den zweiten Ast der Hyperbel ergibt.

Der Kosinussatz im Dreieck  $\Delta(F'PF)$  führt auf

$$r'^2 = r^2 + 4c^2 - 4rc \cos(\pi - \phi) = r^2 + 4c^2 + 4rc \cos \phi,$$

oder 
$$r' = \sqrt{r^2 + 4c^2 + 4rc \cos \phi}.$$

Eingesetzt in Gleichung (4.50) ergibt

$$r - 2a = \sqrt{r^2 + 4c^2 + 4rc \cos \phi}.$$

Durch Quadrieren dieser Gleichung erhalten wir

$$r^2 - 4ar + 4a^2 = r^2 + 4c^2 + 4rc \cos \phi,$$

oder 
$$r(a + c \cos \phi) = a^2 - c^2. \quad (4.52)$$

Wir führen wieder die Exzentrizität mit  $c = \epsilon a$  ein, jetzt aber mit  $\epsilon > 1$  weil  $c > a$  (siehe Abb. 4.9). Dann erhalten wir aus Gleichung (4.52)

$$r = \frac{a^2 - c^2}{a + c \cos \phi} = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos \phi}. \quad (4.53)$$

#### 4.4 Mathematische Zwischenbetrachtung über Kegelschnitte in Polarkoordinaten

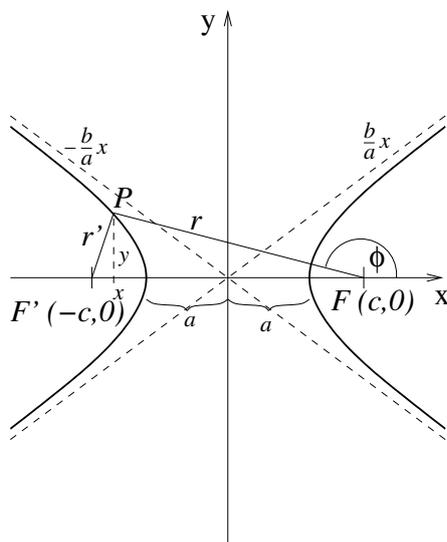


Abbildung 4.9: Hyperbel

Mit  $p = a(1 - \epsilon^2) < 0$  ist diese Gleichung identisch mit Gleichung (4.43).  
Verwenden wir die kartesischen Koordinaten  $x, y$  des Punktes  $P$  so gilt:

$$r^2 = y^2 + (c - x)^2, \quad r'^2 = y^2 + (c + x)^2.$$

Eingesetzt in Gleichung (4.50) ergibt

$$2a = \sqrt{y^2 + (c - x)^2} - \sqrt{y^2 + (c + x)^2}.$$

Quadrieren dieser Gleichung führt auf

$$4a^2 = y^2 + (c - x)^2 + y^2 + (c + x)^2 - 2\sqrt{(y^2 + (c - x)^2)(y^2 + (c + x)^2)},$$

oder mit

$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 + a^2 \\ y^2 + x^2 + c^2 - 2a^2 &= y^2 + x^2 + b^2 - a^2 \\ &= \sqrt{(y^2 + (c - x)^2)(y^2 + (c + x)^2)}. \end{aligned}$$

Nochmaliges Quadrieren und Ordnen ergibt

$$x^2(2c^2 + 2b^2 - 2a^2) + y^2(2b^2 - 2a^2 - 2c^2) = c^4 - (b^2 - a^2)^2.$$

Mit

$$c^2 = a^2 + b^2$$

ergibt sich

$$4b^2x^2 - 4a^2y^2 = 4a^2b^2,$$

## 4 Das Zweikörper-Problem

oder die Hauptachsengleichung der Hyperbel.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.54)$$

Gleichung (4.54) kann auch geschrieben werden als

$$y = \pm b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}, \quad (4.55)$$

die für große Werte von  $x$  asymptotisch gegen die Asymptoten

$$y \simeq \pm \frac{b}{a} x. \quad (4.56)$$

verläuft.

Mit diesem Einschub ist die allgemeine Form von Gleichung (4.43) als Darstellung von Kegelschnitten begründet.

## 4.5 Fortsetzung des Kepler-Problems

### 4.5.1 Klassifikation der Bewegungstypen

Als Lösung der Bewegungsgleichung erhielten wir nach Gleichung (4.43)

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \phi},$$

mit dem Bahnparameter

$$p = \frac{l^2}{\mu \alpha}$$

und der Exzentrizität

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu \alpha^2}}.$$

Die Form der Bahnkurve hängt über  $\epsilon$  von der Gesamtenergie  $E$  des bewegten Körpers ab:

- (a) für eine Parabel:  $\epsilon = 1$ , also  $E = 0$ ;
- (b) für eine Ellipse:  $0 < \epsilon < 1$ , also negatives  $E < 0$  zwischen  $-\mu \alpha^2 / (2l^2) < E < 0$ ;
- (c) für einen Kreis:  $\epsilon = 0$ , also  $E = -\mu \alpha^2 / (2l^2)$ ;
- (d) für eine Hyperbel:  $\epsilon > 1$ , also  $E > 0$ .

Mit dem effektiven Potential (4.34) und dem Energieerhaltungssatz (4.24)

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + V_{eff}(r) = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r} \quad (4.57)$$

lassen sich dann die prinzipiellen Bahntypen klassifizieren.

An den Umkehrpunkten der Bewegung ( $\dot{r} = 0$ ) gilt aufgrund (4.57) die Bedingung

$$E = V_{\text{eff}}. \quad (4.58)$$

Diese ergibt dann die Punkte mit dem größten ( $r_{\text{max}}$ ) und kleinsten ( $r_{\text{min}}$ ) Abstand vom Bewegungszentrum. In Abb. 4.10 haben wir die Bedingung (4.58) skizziert. Auf der Gesamtenergieachse  $E$  tragen wir die Energiebedingungen für die verschiedenen Bewegungsformen auf und ermitteln die Umkehrpunkte der Bewegung aus Bedingung (4.58).

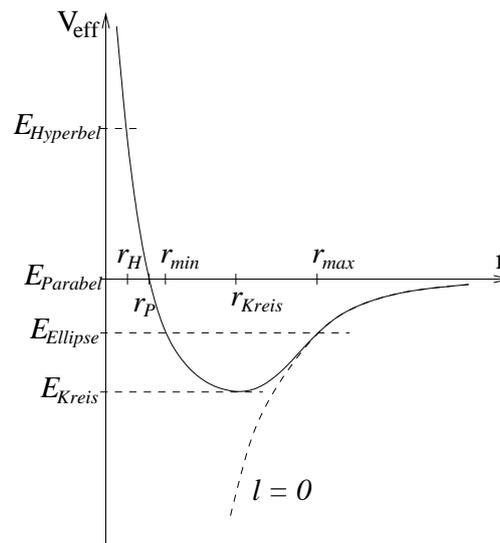


Abbildung 4.10: Bewegungsformen beim Keplerproblem

Wir erkennen:

1. Für Parabel- und Kreisbewegungen gibt es nur eine endliche Lösung von (4.58).
2. Für Hyperbel- und Ellipsenbahnen gibt es je nach Wert von  $E$  unendlich viele Lösungen für  $r_{\text{min}} \leq r \leq \infty$ .
3. Für Parabel und Hyperbel liegen keine gebundenen Bewegungen vor. Die kinetische Energie ist endlich (außer am inneren Umkehrpunkt  $r_{\text{min}}$ ); selbst bei unendlichem Abstand  $r \rightarrow \infty$  ist die kinetische Energie noch endlich. Die Körper kommen aus dem Unendlichen, werden bei  $r_P$  bzw.  $r_H$  reflektiert und verschwinden wieder im Unendlichen. (Dies hat ebenfalls Bedeutung für die Coulomb-Streuung in der Atom- und Kernphysik.)
4. Für Ellipsenbahnen gibt es gebundene Bahnen, dafür muss aber die Gesamtenergie  $E < 0$  negativ sein. Gemäß Gleichung (4.43) gilt

$$r(\phi = 0) + r(\phi = \pi) = \frac{p}{1 + \epsilon} + \frac{p}{1 - \epsilon} = \frac{2p}{1 - \epsilon^2}.$$

#### 4 Das Zweikörper-Problem

Aus der Abb. 4.7 entnehmen wir den Zusammenhang

$$2a = r(\phi = 0) + r(\phi = \pi) .$$

Die Kombination beider Gleichungen ergibt mit (4.41)–(4.42) für den Wert der großen Halbachse der Ellipse:

$$a = \frac{p}{1 - \epsilon^2} = \frac{l^2}{\mu\alpha \left[ 1 - \left( 1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2} \right) \right]} = -\frac{\alpha}{2E} = -\frac{Gm_1m_2}{2E} . \quad (4.59)$$

Der Wert der großen Halbachse  $a$  ist also nur durch die Gesamtenergie  $E$  bei gegebenen Massen  $m_1, m_2$  bestimmt. (Dieses Ergebnis ist wichtig für die Bohr-Theorie der Atome.)

Für die kleine Halbachse folgt

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{a^2 - \epsilon^2 a^2} \\ &= |a| \sqrt{1 - \epsilon^2} = \frac{|p|}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \\ &= \frac{l^2}{\mu\alpha \sqrt{\frac{2El^2}{\mu\alpha^2}}} = \frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}} = \sqrt{\frac{al^2}{\mu\alpha}} . \end{aligned} \quad (4.60)$$

#### 4.5.2 Keplersche Gesetze der Planetenbewegung

Wir diskutieren jetzt die Ellipsenlösung für ein System, das aus der Sonne und aus einem Planeten besteht. Als Bezugssystem wählen wir das Schwerpunktsystem mit  $\vec{R} = \vec{0}$ ; aufgrund von Gleichung (4.15) ist dies ein Inertialsystem. Gemäß den Gleichungen (4.5) gilt wegen  $m_p \ll M_s$  im Schwerpunktsystem ( $\vec{R} = \vec{0}$ ) für die Ortsvektoren der Sonne und des Planeten:

$$\vec{r}_S = -\frac{m_p}{M_s + m_p} \vec{r} \simeq -\frac{m_p}{M_s} \vec{r} \simeq \vec{0} \quad (4.61)$$

und

$$\vec{r}_p = +\frac{M_s}{M_s + m_p} \vec{r} \simeq \vec{r} . \quad (4.62)$$

$r$  ist aber auch der Abstand zu einem der beiden Brennpunkte der Ellipse. Sonne und Planet durchlaufen gegenläufige Ellipsenbahnen, wobei der gemeinsame Schwerpunkt in einem der Brennpunkte der Ellipse liegt. Mit den Näherungen (4.61)–(4.62) für  $M_s \gg m_p$  erhalten wir das

1. *Keplersche Gesetz: Die Planetenbahnen sind Ellipsenbahnen mit der Sonne in einem Brennpunkt der Ellipse.*

Das 2. Keplersche Gesetz bezeichnet den in Kap. 4.2.1 bewiesenen Flächensatz:

2. *Keplersche Gesetz: Der Fahrstrahl  $\vec{r}$  überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen, d.h.*

$$\dot{A} = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi} = \frac{l}{2\mu} = \text{const.} \quad (4.63)$$

3. Keplersche Gesetz: Das Quadrat der Umlaufzeit  $T$  ist proportional zur dritten Potenz der großen Halbachse  $a$ :

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const.} \quad (4.64)$$

Zum Beweis benutzen wir, dass die Fläche der Ellipse einerseits durch  $A = \pi ab$  gegeben ist und sich andererseits durch Integration des Flächensatzes (4.63) berechnen lässt:

$$A = \pi ab = \int_0^T dt \dot{A} = \frac{Tl}{2\mu}.$$

Mit Gleichung (4.60) erhalten wir dann

$$T = \frac{2\pi\mu}{l} ab = \frac{2\pi\mu}{l} a^{3/2} \sqrt{\frac{l^2}{\mu\alpha}} = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} a^{3/2},$$

$$\text{oder} \quad T^2 = 4\pi^2 \frac{\mu}{\alpha} a^3 \quad (4.65)$$

Q.E.D.

Der Proportionalitätsfaktor ist mit der reduzierten Masse (4.8) gegeben durch

$$4\pi^2 \frac{\mu}{\alpha} = 4\pi^2 \frac{\mu}{GM_s m_p} = 4\pi^2 \frac{M_s m_p}{(M_s + m_p) GM_s m_p} = \frac{4\pi^2}{G(M_s + m_p)} \simeq \frac{4\pi^2}{GM_s} \quad (4.66)$$

und ist für alle Planeten näherungsweise gleich.

Reale Planetenbahnen zeigen Abweichungen von Ellipsenbahnen aufgrund von Gravitationskräften der Planeten untereinander, kleinen relativistischen Effekten und dem Quadrupolmoment der Sonne, so dass es zu Abweichungen vom reinen  $1/r$ -Potential kommt.

### 4.5.3 Kepler's Gleichung

Wir kennen gemäß Gleichung (4.43) die Bewegungsgleichung in der Form

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \phi}.$$

Für astronomische Beobachtungen ist aber die Lösung in der Form  $\phi = \phi(t)$  wichtig. Des Weiteren interessiert die Abhängigkeit der Variation  $\phi(t)$  von den zwei fundamentalen Konstanten der Bewegung: die Umlaufzeit  $T$  und die Exzentrizität  $\epsilon$ .

Zur Ableitung benutzen wir wieder den Flächensatz (4.63)  $\dot{A} = \text{const.}$  Für die gesamte, bei einem Umlauf überstrichene, Fläche galt

$$A = \int_0^T dt \dot{A} = \dot{A} T = \pi ab,$$

so dass in der Zeit  $t$  die Fläche  $\pi ab(t/T)$  überstrichen wird, d.h.

$$\pi ab \frac{t}{T} = \int dA.$$

#### 4 Das Zweikörper-Problem

Benutzen wir (4.63) für  $dA = (r^2/2)d\phi$ , so folgt mit  $\phi = 0$  für  $t = 0$

$$\pi ab \frac{t}{T} = \frac{1}{2} \int_0^\phi d\phi' r^2(\phi') = \frac{p^2}{2} \int_0^\phi \frac{d\phi'}{(1 + \epsilon \cos \phi')^2}, \quad (4.67)$$

wobei wir Gleichung (4.43) eingesetzt haben.

Wir benutzen die Integrale

$$\int \frac{dx}{(a_1 + b_1 \cos x)^2} = \frac{-1}{a_1^2 - b_1^2} \left[ \frac{b_1 \sin x}{a_1 + b_1 \cos x} - a_1 \int \frac{dx}{a_1 + b_1 \cos x} \right]$$

und

$$\int \frac{dx}{a_1 + b_1 \cos x} = \frac{2}{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}} \arctan \frac{\sqrt{a_1^2 - b_1^2} \tan \frac{x}{2}}{a_1 + b_1}$$

und erhalten mit  $a_1 = 1$ ,  $b_1 = \epsilon$  für das Integral in Gleichung (4.67)

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1 + \epsilon \cos x)^2} &= -\frac{1}{1 - \epsilon^2} \left[ \frac{\epsilon \sin x}{1 + \epsilon \cos x} - \int \frac{dx}{1 + \epsilon \cos x} \right] \\ &= \frac{1}{1 - \epsilon^2} \left[ \frac{2}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \arctan \frac{\sqrt{1 - \epsilon^2} \tan \frac{x}{2}}{1 + \epsilon} - \frac{\epsilon \sin x}{1 + \epsilon \cos x} \right] \\ &= \frac{1}{1 - \epsilon^2} \left[ \frac{2}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \arctan \frac{\sqrt{1 - \epsilon} \tan \frac{x}{2}}{\sqrt{1 + \epsilon}} - \frac{\epsilon \sin x}{1 + \epsilon \cos x} \right]. \end{aligned}$$

Damit folgt für Gleichung (4.67)

$$\pi ab \frac{t}{T} = \frac{p^2}{2(1 - \epsilon^2)} \left[ \frac{2}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \arctan \frac{\sqrt{1 - \epsilon} \tan \frac{\phi}{2}}{\sqrt{1 + \epsilon}} - \frac{\epsilon \sin \phi}{1 + \epsilon \cos \phi} \right].$$

Mit

$$ab = a^2 (1 - \epsilon^2)^{1/2} = p^2 (1 - \epsilon^2)^{-3/2},$$

(vgl. Gleichung (4.46)) folgt

$$2\pi \frac{t}{T} = 2 \arctan \left[ \sqrt{\frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}} \tan \frac{\phi}{2} \right] - \frac{\epsilon \sqrt{1 - \epsilon^2} \sin \phi}{1 + \epsilon \cos \phi}. \quad (4.68)$$

Dies ist eine komplizierte Gleichung für  $t = t(\phi)$ , die auch noch nach  $\phi = \phi(t)$  aufgelöst werden muss.

Kepler hat das Problem durch geometrische Konstruktion gelöst, obwohl er Gleichung (4.67) nicht kannte: die Bewegung erfolgt auf der elliptischen Bahn mit dem Kraftzentrum im Brennpunkt  $O$ , den Kepler als Ursprung des rechtwinkligen Koordinatensystems  $(x, y)$  wählt (siehe Abb. 4.11).

In diesem System lautet die Bahngleichung

$$\frac{(x + a\epsilon)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.69)$$

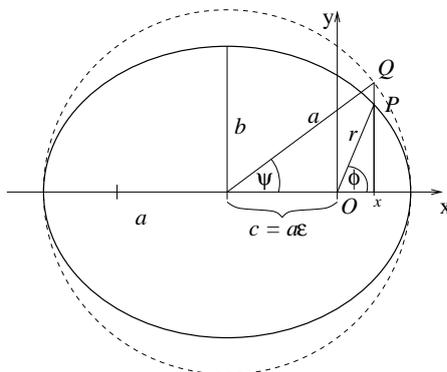


Abbildung 4.11: Zur Ableitung der Kepler-Gleichung

Als nächstes umschreiben wir die Ellipse durch einen Kreis mit dem Radius  $a$ , und projizieren den Punkt  $P$  (definiert durch  $r$  und  $\phi$ ) auf den Kreis im Punkt  $Q$ . Der Winkel  $\angle(a, x) = \psi$  wird als *exzentrische Anomalie* bezeichnet. Es gilt

$$\cos \psi = \frac{x + a\epsilon}{a}. \quad (4.70)$$

Mit Gleichung (4.69) folgt

$$\sin \psi = \sqrt{1 - \cos^2 \psi} = \sqrt{1 - \frac{(x + a\epsilon)^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)} = \frac{y}{b}. \quad (4.71)$$

Aus diesen Beziehungen folgt

$$x = a(\cos \psi - \epsilon) \quad (4.72)$$

$$\text{und} \quad y = b \sin \psi = a\sqrt{1 - \epsilon^2} \sin \psi, \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} \text{so dass} \quad r^2 = x^2 + y^2 &= a^2 \left[ (\cos \psi - \epsilon)^2 + (1 - \epsilon^2) \sin^2 \psi \right] \\ &= a^2 \left[ \cos^2 \psi - 2\epsilon \cos \psi + \epsilon^2 + \sin^2 \psi - \epsilon^2 \sin^2 \psi \right] \\ &= a^2 \left[ 1 - 2\epsilon \cos \psi + \epsilon^2 (1 - \sin^2 \psi) \right] \\ &= a^2 [1 - \epsilon \cos \psi]^2, \end{aligned}$$

$$\text{oder} \quad r = a(1 - \epsilon \cos \psi). \quad (4.74)$$

Jetzt benötigen wir noch den Zusammenhang zwischen den Winkeln  $\psi$  und  $\phi$ . Aus

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \phi} = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos \phi}$$

$$\text{folgt} \quad \epsilon r \cos \phi = a(1 - \epsilon^2) - r. \quad (4.75)$$

Wir addieren auf beiden Seiten  $\epsilon r$ :

$$\epsilon r(1 + \cos \phi) = (1 - \epsilon) [a(1 + \epsilon) - r]$$

#### 4 Das Zweikörper-Problem

und setzen auf der rechten Seite Gleichung (4.74) ein:

$$\begin{aligned} \epsilon r(1 + \cos \phi) &= (1 - \epsilon)a [1 + \epsilon - (1 - \epsilon \cos \psi)] , \\ \text{oder} \quad r(1 + \cos \phi) &= a(1 - \epsilon)(1 + \cos \psi) . \end{aligned} \quad (4.76)$$

Ebenso subtrahieren wir auf beiden Seiten von Gleichung (4.75)  $\epsilon r$ :

$$\epsilon r(\cos \phi - 1) = a(1 + \epsilon)(1 - \epsilon) - r(1 + \epsilon)$$

und setzen wieder auf der rechten Seite Gleichung (4.74) ein:

$$\begin{aligned} \epsilon r(\cos \phi - 1) &= a(1 + \epsilon) [1 - \epsilon - (1 - \epsilon \cos \psi)] , \\ \text{so dass} \quad r(1 - \cos \phi) &= a(1 + \epsilon)(1 - \cos \psi) . \end{aligned} \quad (4.77)$$

Dividieren wir Gleichung (4.77) durch Gleichung (4.76), erhalten wir unter Verwendung von

$$\begin{aligned} \tan \frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \\ \text{das Ergebnis} \quad \tan \frac{\phi}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}} \tan \frac{\psi}{2} . \end{aligned} \quad (4.78)$$

Diese Beziehung liefert direkt  $\phi = \phi(t)$ , wenn wir die Abhängigkeit  $\psi(t)$  kennen. Dazu transformieren wir Gleichung (4.67)

$$\pi ab \frac{t}{T} = \frac{1}{2} \int_0^\phi d\phi' r^2(\phi') ,$$

in eine Gleichung für  $\psi(t)$ . Nach (4.78) ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tan \frac{\phi}{2} &= \frac{1}{\cos^2 \frac{\phi}{2}} \frac{1}{2} \frac{d\phi}{dt} = \sqrt{\frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}} \frac{d}{dt} \tan \frac{\psi}{2} , \\ &= \sqrt{\frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}} \frac{1}{\cos^2 \frac{\psi}{2}} \frac{1}{2} \frac{d\psi}{dt} \\ \text{oder} \quad d\phi &= \sqrt{\frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}} \frac{\cos^2 \frac{\phi}{2}}{\cos^2 \frac{\psi}{2}} d\psi . \end{aligned} \quad (4.79)$$

Nach (4.76) ist

$$r = a(1 - \epsilon) \frac{1 + \cos \psi}{1 + \cos \phi} = a(1 - \epsilon) \frac{\cos^2 \frac{\psi}{2}}{\cos^2 \frac{\phi}{2}} . \quad (4.80)$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} r^2 d\phi = r r d\phi &= a(1 - \epsilon \cos \psi) a(1 - \epsilon) \frac{\cos^2 \frac{\psi}{2}}{\cos^2 \frac{\phi}{2}} \sqrt{\frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}} \frac{\cos^2 \frac{\phi}{2}}{\cos^2 \frac{\psi}{2}} d\psi \\ &= a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2} (1 - \epsilon \cos \psi) d\psi , \end{aligned} \quad (4.81)$$

wobei wir für das erste  $r$  Gleichung (4.74) eingesetzt haben, für das zweite  $r$  Gleichung (4.80) und  $d\phi$  nach Gleichung (4.79).

Für Gleichung (4.67) erhalten wir damit

$$\pi ab \frac{t}{T} = \frac{a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2}}{2} \int_0^\psi d\psi' (1 - \epsilon \cos \psi') = \frac{a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2}}{2} (\psi - \epsilon \sin \psi) .$$

Mit  $b = a\sqrt{1 - \epsilon^2}$  folgt *Kepler's Gleichung*

$$M = \psi - \epsilon \sin \psi \quad (4.82)$$

für die *mittlere Anomalie*

$$M \equiv \frac{2\pi t}{T} , \quad (4.83)$$

die die Winkelabweichung eines Körpers auf einer Kreisbahn mit der Periode  $T$  anzeigt. Die Inversion von Gleichung (4.82) liefert direkt  $\psi(M) = \psi(t)$ , das dann mittels Gleichung (4.78) zur gewünschten Abhängigkeit  $\phi(t)$  führt.

#### 4.5.4 Näherungslösung der Kepler-Gleichung

Um Genauigkeiten auf  $10^{-6}$  für ein typisches  $\epsilon = 0.1$  zu erzielen, ist Gleichung (4.68) unbrauchbar. Von den mehr als 120 bekannten Methoden zur näherungsweise Lösung der Kepler-Gleichung besprechen wir hier nur die einfache Methode von E. Brown (1931, Monthly Notices Royal Astronomical Society 92, 104), die gut bis  $\mathcal{O}(\epsilon^4)$  ist. Wir setzen

$$\psi = M + \eta , \quad (4.84)$$

mit dem Korrekturterm  $\eta$  in die Kepler-Gleichung (4.82) ein und erhalten

$$\eta = \epsilon \sin(M + \eta) . \quad (4.85)$$

Mit der Reihen-Entwicklung der Sinus-Funktion folgt

$$\begin{aligned} \sin \eta &= \eta - \frac{\eta^3}{3!} + \frac{\eta^5}{5!} - \dots = \sin(\epsilon \sin(M + \eta)) \\ &= \epsilon \sin(M + \eta) - \frac{\epsilon^3}{3!} \sin^3(M + \eta) + \frac{\epsilon^5}{5!} \sin^5(M + \eta) - \dots \end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned} \sin \eta - \epsilon \sin(M + \eta) &= \sin \eta - \epsilon (\sin M \cos \eta + \sin \eta \cos M) \\ &= -\frac{\epsilon^3}{3!} \sin^3(M + \eta) + \frac{\epsilon^5}{5!} \sin^5(M + \eta) - \dots \end{aligned} \quad (4.86)$$

Definieren wir die neuen Größen  $\alpha$  und  $\beta$  durch

$$\beta \sin \alpha \equiv \epsilon \sin M , \quad \beta \cos \alpha \equiv 1 - \epsilon \cos M ,$$

$$\text{so dass} \quad \alpha = \arctan \frac{\epsilon \sin M}{1 - \epsilon \cos M} \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned} \text{und} \quad \beta^2 \sin^2 \alpha + \beta^2 \cos^2 \alpha &= \beta^2 = \epsilon^2 \sin^2 M + 1 - 2\epsilon \cos M + \epsilon^2 \cos^2 M \\ &= 1 + \epsilon^2 - 2\epsilon \cos M , \end{aligned}$$

$$\text{oder} \quad \beta = \sqrt{1 + \epsilon^2 - 2\epsilon \cos M} . \quad (4.88)$$

#### 4 Das Zweikörper-Problem

Damit erhalten wir auf der linken Seite von Gleichung (4.86)

$$\begin{aligned} \beta \sin \eta \cos \alpha - \beta \sin \alpha \cos \eta &= \beta \sin(\eta - \alpha) \\ &= -\frac{\epsilon^3}{3!} \sin^3(M + \eta) + \frac{\epsilon^5}{5!} \sin^5(M + \eta) - \dots, \\ \text{oder} \quad \sin(\eta - \alpha) &= -\frac{\epsilon^3}{6\beta} \sin^3(M + \eta) + \frac{\epsilon^5}{120\beta} \sin^5(M + \eta) - \dots. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Gleichung (4.88) zeigt, dass  $\beta = \mathcal{O}(1)$ , so dass nach Gleichung (4.89)  $\eta - \alpha \simeq \mathcal{O}(\epsilon^3)$ . Vernachlässigen wir den Term proportional zu  $\epsilon^5$  in Gleichung (4.89) und schreiben  $\alpha$  für  $\eta$  im ersten Term auf der rechten Seite dieser Gleichung, so folgt

$$\sin(\eta - \alpha) \simeq -\frac{\epsilon^3}{6\beta} \sin^3(M + \alpha). \quad (4.90)$$

Dieser Ausdruck ist genau bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\epsilon^4)$ . Für  $\epsilon = 0.1$  ist der erste vernachlässigte Term von der Größe  $(\epsilon^5/120) \simeq 10^{-7}$ .

Aus Gleichung (4.90) folgt direkt

$$\eta = \alpha + \arcsin \left[ -\frac{\epsilon^3}{6\beta} \sin^3(M + \alpha) \right]$$

und mit Gleichung (4.84)

$$\psi \simeq M + \alpha + \arcsin \left[ -\frac{\epsilon^3}{6\beta} \sin^3(M + \alpha) \right], \quad (4.91)$$

wobei gemäß Gleichung (4.87)

$$\alpha = \arctan \frac{\epsilon \sin M}{1 - \epsilon \cos M}.$$

## 4.6 Hyperbelbahnen

Unter dem Einfluss eines gegenseitigen Keplerpotentials bewegen sich die beiden Massenpunkte auf Hyperbelbahnen, wenn (siehe Gleichung (4.41))

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2l^2 E}{\mu \alpha^2}} > 1.$$

Die Gesamtenergie  $E = V_{eff} + \mu/2\dot{r}^2 > 0$  ist dann immer positiv (selbst bei  $r \rightarrow \infty$ ) und dieser Fall führt auf ungebundene Bahnen.

Wir schreiben Gleichung (4.43) als

$$r(\phi) = \frac{p}{f(\phi)}, \quad \text{mit} \quad f(\phi) = 1 + \epsilon \cos \phi, \quad (4.92)$$

$f(\phi)$  kann das Vorzeichen wechseln. Weil  $r(\phi) > 0 \forall \phi$ , müssen wir verschiedene Fälle unterscheiden, je nach Vorzeichen des Parameters

$$p = \frac{l^2}{\alpha\mu}, \quad (4.93)$$

wobei (zur Erinnerung)  $\mu$  die reduzierte Masse ist und  $\alpha$  der Proportionalitätsfaktor im Keplerpotential

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}. \quad (4.94)$$

#### 4.6.1 Attraktives Potential ( $\alpha > 0$ )

Der Proportionalitätsfaktor  $\alpha$  ist positiv für das Gravitationspotential oder für das elektrostatische Potential mit entgegengesetzten Ladungen. In diesem Fall ist der Parameter  $p > 0$ .

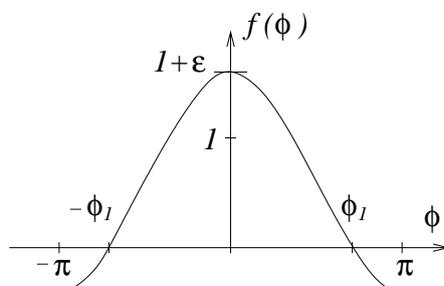


Abbildung 4.12: Variation der Funktion  $f(\phi)$  im Fall  $p > 0$

Aus der Forderung  $f(\phi) = 1 + \epsilon \cos \phi \geq 0$  ergibt sich die in Abb. 4.12 skizzierte Einschränkung der erlaubten Werte von  $\phi$  zu

$$-\pi < -\phi_1 \leq \phi \leq \phi_1 < \pi, \quad (4.95)$$

mit dem Grenzwinkel  $\phi_1 = \arccos(1/\epsilon)$ . Für den Winkel  $\phi = 0$  wird der Abstand der Bahn vom Kraftzentrum minimal,  $r_{min} = p/(1 + \epsilon)$ ; für  $\phi \rightarrow \pm\phi_1$  folgt  $r \rightarrow \infty$ . Die resultierende Bahnkurve ist in Abb. 4.13 skizziert.

#### 4.6.2 Repulsives Potential ( $\alpha < 0$ )

Die Massenpunkte stoßen sich ab, wie etwa bei gleich geladenen Ladungsträgern. Dann ist  $p < 0$ , und es muss

$$f(\phi) = 1 + \epsilon \cos \phi < 0$$

sein. Die erlaubten Werte von  $\phi$  sind dann

$$-\pi \leq \phi < -\phi_1 \quad \text{und} \quad \phi_1 < \phi \leq \pi. \quad (4.96)$$

Die in Abb. 4.14 skizzierten Bahnkurven sind Hyperbeln, die nicht das Kraftzentrum einschließen, sondern vor diesem zurückweichen.

## 4 Das Zweikörper-Problem

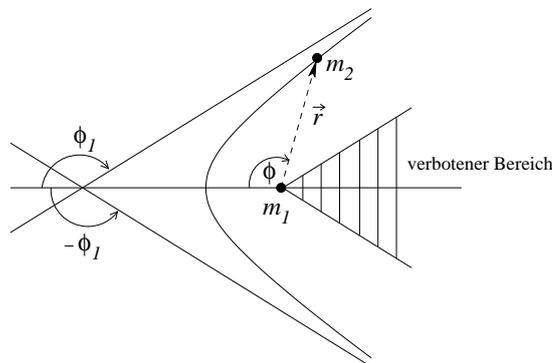


Abbildung 4.13: Hyperbelbahn bei attraktivem Potential

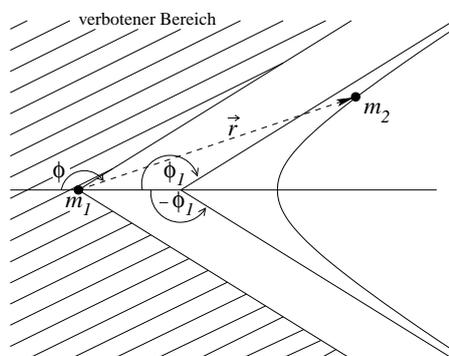


Abbildung 4.14: Hyperbelbahn bei repulsivem Potential

### 4.7 Der Runge-Lenz-Vektor

Beim attraktiven Kepler-Potential mit  $\epsilon < 1$  sind die Bahnkurven Ellipsen, insbesondere geschlossene Bahnen. Es folgt weiterhin, dass sowohl der Ort, an dem die Masse  $m_2$  der Masse  $m_1$  am nächsten kommt (*Perihel*), als auch der Ort, an dem die Masse  $m_2$  am weitesten von der Masse  $m_1$  entfernt ist (*Aphel*), nicht wandern, sondern zeitlich fest liegen (siehe Abb. 4.15).

Diese Konstanz des Perihels bzw. Aphels ist mit einer Erhaltungsgröße, dem sog. *Runge-Lenz-Vektor*, verbunden.

Der Runge-Lenz-Vektor ist definiert durch

$$\vec{B} = \dot{\vec{r}} \times \vec{l} - \alpha \frac{\vec{r}}{r}, \quad (4.97)$$

wobei

$$\vec{l} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

der Drehimpuls der Relativbewegung ist.

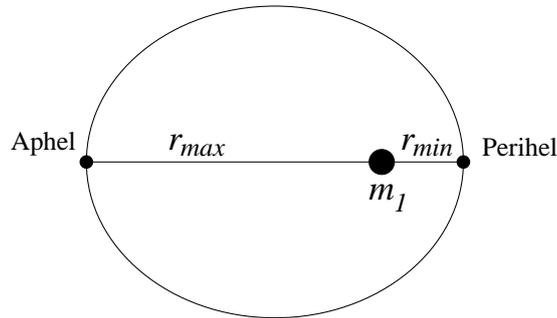


Abbildung 4.15: Perihel und Aphel

Die totale zeitliche Ableitung dieses Vektors ist

$$\dot{\vec{B}} = \ddot{\vec{r}} \times \vec{l} + \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{l}} - \alpha \frac{r\dot{\vec{r}} - \vec{r}\dot{r}}{r^2} = \ddot{\vec{r}} \times \vec{l} - \alpha \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \alpha \vec{r} \frac{\dot{r}}{r^2},$$

weil nach (4.17)  $\dot{\vec{l}} = \vec{0}$ . Mit

$$r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} \quad \text{und} \quad r\dot{r} = \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}$$

folgt dann

$$\begin{aligned} \dot{\vec{B}} &= \ddot{\vec{r}} \times \vec{l} - \alpha \frac{r^2 \dot{\vec{r}}}{r^3} + \alpha \vec{r} \frac{r\dot{r}}{r^3} \\ &= \ddot{\vec{r}} \times \vec{l} + \frac{\alpha}{r^3} \left[ \vec{r} (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}} (\vec{r} \cdot \vec{r}) \right]. \end{aligned} \quad (4.98)$$

Mit dem dreifachen Kreuzprodukt (1.22)

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

folgt für

$$\vec{a} = \vec{b} = \vec{r}$$

und

$$\vec{c} = \dot{\vec{r}}$$

die Identität

$$\vec{r} (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}} (\vec{r} \cdot \vec{r}) = \vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}),$$

so dass

$$\begin{aligned} \dot{\vec{B}} &= \ddot{\vec{r}} \times \vec{l} + \frac{\alpha}{r^3} \left[ \vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \right] \\ &= \ddot{\vec{r}} \times \vec{l} + \frac{\alpha}{\mu r^3} \vec{r} \times \vec{l} = \left( \ddot{\vec{r}} + \frac{\alpha}{\mu r^3} \vec{r} \right) \times \vec{l}. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Nach Gleichung (4.14) gilt für die Relativbewegung mit  $V(r) = -\alpha/r$

$$\mu \ddot{\vec{r}} + \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} = \mu \ddot{\vec{r}} + \frac{\alpha \vec{r}}{r^3} = 0, \quad (4.100)$$

#### 4 Das Zweikörper-Problem

so dass die Klammer in Gleichung (4.99) verschwindet. Wir erhalten also

$$\dot{\vec{B}} = \frac{d}{dt} \left[ \dot{\vec{r}} \times \vec{l} - \alpha \frac{\vec{r}}{r} \right] = 0, \quad (4.101)$$

d.h. der Runge-Lenz-Vektor  $\vec{B}$  ist bei der Keplerbewegung eine Erhaltungsgröße.

Man überlegt sich leicht, dass der Runge-Lenz-Vektor  $\vec{B}$  immer in Richtung des Perihels zeigt: dazu betrachten wir den Ortsvektor  $\vec{r}$  des Perihels (nächster Punkt). Dann liegt  $\dot{\vec{r}} \perp \vec{r}$  in der Ebene der Bahnbewegung und  $\vec{l}$  steht senkrecht auf dieser Ebene (siehe Abb. 4.16). Somit zeigen  $\dot{\vec{r}} \times \vec{l}$  und natürlich auch  $\vec{r}/r$  in Richtung des Perihels. Weil  $\vec{B}$  Erhaltungsgröße ist, ändert sich der Ort des Perihels nicht.

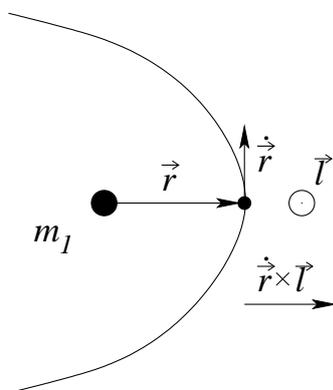


Abbildung 4.16: Zur Richtung des Runge-Lenz-Vektors

Bilden wir das Skalarprodukt  $\vec{B} \cdot \vec{r} = Br \cos \phi$  mit  $\phi = \angle(\vec{B}, \vec{r})$ , dann folgt mit Gleichung (4.97) und der Spatprodukt-Regel (1.24)

$$\begin{aligned} \vec{B} \cdot \vec{r} = Br \cos \phi &= \vec{r} \cdot \left( \dot{\vec{r}} \times \vec{l} - \alpha \frac{\vec{r}}{r} \right) \\ &= -\alpha r + \vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{l}) \\ &= -\alpha r + \vec{l} \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \frac{l^2}{\mu} - \alpha r \end{aligned}$$

oder

$$r = \frac{\frac{l^2}{\mu}}{\alpha + B \cos \phi} = \frac{\frac{l^2}{\mu \alpha}}{1 + \frac{B}{\alpha} \cos \phi} = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \phi} \quad (4.102)$$

wieder die Bahngleichung (4.43) unter Zuhilfenahme von Erhaltungsgrößen.

### 4.8 Das Streuproblem

Das Zweikörperproblem lässt sich auch auf Streuexperimente der Kernphysik bei Coulombwechselwirkung anwenden. Wir machen dabei die vereinfachende Annahme, dass die Masse



#### 4 Das Zweikörper-Problem

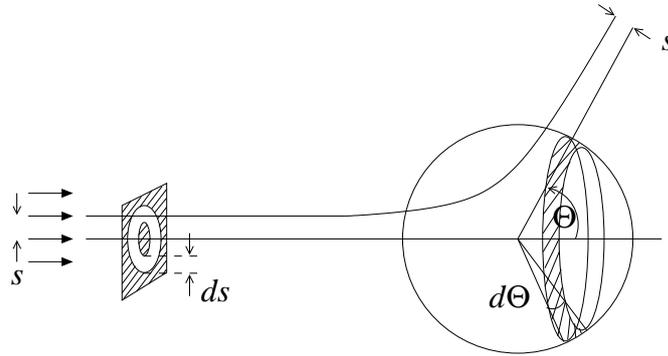


Abbildung 4.18: Zum differentiellen Wirkungsquerschnitt

Als *differentiellen Wirkungsquerschnitt*  $d\sigma$  bezeichnen wir das Verhältnis der Anzahl der in den Raumwinkel  $d\Omega$  pro Zeiteinheit gestreuten Teilchen durch die Anzahl der einlaufenden Teilchen pro Zeiteinheit und Eintrittsfläche:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\dot{N}_{aus}}{\dot{N}_{ein}} . \quad (4.107)$$

Mit Gleichung (4.106) folgt

$$d\sigma = \frac{\dot{N}_{aus} d\Omega}{\dot{N}_{ein}} = 2\pi s ds . \quad (4.108)$$

Mit  $d\Omega = 2\pi \sin \Theta d\Theta$  erhalten wir

$$d\sigma = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{2\pi s ds}{2\pi \sin \Theta d\Theta} d\Omega = \frac{s}{\sin \Theta} \left| \frac{ds}{d\Theta} \right| d\Omega . \quad (4.109)$$

Aus den Gleichungen (4.103)–(4.105) folgt

$$l^2 = m_2^2 v_0^2 s^2 = 2m_2 E s^2$$

und

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{4E^2 s^2}{\alpha^2}} ,$$

so dass

$$C_G = \cos \phi_G = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4E^2 s^2}{\alpha^2}}}$$

oder

$$s = -\frac{\alpha}{2E} \sqrt{\frac{1}{C_G^2} - 1} . \quad (4.110)$$

Es folgt

$$\frac{ds}{dC_G} = \frac{\alpha^2}{4E^2 s C_G^3} .$$

Benutzen wir

$$\Theta = \pi - 2\phi_G,$$

so dass 
$$C_G = \cos \phi_G = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\Theta}{2} \right) = \sin \frac{\Theta}{2},$$

dann folgt 
$$\frac{ds}{dC_G} = \frac{\alpha^2}{4E^2 s \sin^3 \frac{\Theta}{2}}$$

und 
$$\frac{ds}{d\Theta} = \frac{ds}{d \sin \frac{\Theta}{2}} \frac{d \sin \frac{\Theta}{2}}{d\Theta} = \frac{1}{2} \cos \frac{\Theta}{2} \frac{ds}{dC_G} = \frac{\alpha^2 \cos \frac{\Theta}{2}}{8E^2 s \sin^3 \frac{\Theta}{2}}$$

und wir erhalten für Gleichung (4.109)

$$d\sigma = \frac{\alpha^2 \cos \frac{\Theta}{2}}{8E^2 \sin \Theta \sin^3 \frac{\Theta}{2}} d\Omega$$

oder mit 
$$\sin \Theta = 2 \sin \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\Theta}{2}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{16E^2} \sin^{-4} \frac{\Theta}{2}. \quad (4.111)$$

Für die Streuung von Teilchen der Ladung  $q_2$  an Kernen der Ladung  $q_1$  ist  $\alpha^2 = (q_1 q_2)^2$ , und unser Ergebnis (4.111) stellt die *Rutherford'sche Streuformel* dar.

#### 4 *Das Zweikörper-Problem*

## 5 Hamilton-Mechanik

Mit der Hamiltonschen Formulierung der Bewegungsgleichungen geschieht oberflächlich betrachtet nur eine mathematische Neuformulierung der Lagrange-Gleichungen 2. Art. Diese Neuformulierung ist aber wichtig für das Verständnis der Quantenmechanik.

### 5.1 Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

Das Ziel unserer Überlegungen ist der Übergang von den Veränderlichen

$$\left( \text{Ort } \vec{q}, \text{ Geschwindigkeit } \dot{\vec{q}}, \text{ Zeit } t \right) \rightarrow \left( \text{Ort } \vec{q}, \text{ Impuls } \vec{p}, \text{ Zeit } t \right). \quad (5.1)$$

Die Vektoren deuten an, dass es sich jeweils um die Anzahl  $s$  verallgemeinerter Koordinaten handelt.

Nach Gleichung (3.195) ist der in Gleichung (5.1) eingehende kanonisch konjugierte Impuls durch

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (5.2)$$

definiert. Die Art des Übergangs (5.1), in dem eine partielle Ableitung als neue Variable auftaucht, geschieht elegant durch die sogenannte *Legendre-Transformation*.

#### 5.1.1 Mathematischer Einschub: Legendre-Transformation

Wir betrachten den Übergang von einer Funktion  $f(x, y)$  zur Funktion

$$\begin{aligned} g(x, u) &= g\left(x, \frac{\partial f}{\partial y}\right), \\ \text{mit} \quad g(x, u) &\equiv uy - f(x, y), \\ \text{mit} \quad u &= \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Die so gebildete Funktion  $g$  enthält  $y$  nicht mehr als unabhängige Variable, wie man am totalen Differential erkennt:

$$dg = ydu + udy - df = ydu + udy - \left( \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right).$$

Für

$$u = \frac{\partial f}{\partial y}$$

folgt  $dg = ydu + udy - \frac{\partial f}{\partial x}dx - udy = ydu - \frac{\partial f}{\partial x}dx$

und es gilt  $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x}$ .

### 5.1.2 Ableitung der Hamilton-Gleichungen

Wir betrachten das totale Differential der Lagrange-Funktion:

$$dL = \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} dt . \quad (5.4)$$

Mit Gleichung (5.2) und den Lagrange-Gleichungen 2. Art (3.96) folgt

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \dot{p}_j ,$$

so dass  $dL = \sum_{j=1}^s \dot{p}_j dq_j + \sum_{j=1}^s p_j d\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} dt . \quad (5.5)$

Es gilt die Beziehung

$$d \left( \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j \right) = \sum_{j=1}^s \dot{q}_j dp_j + \sum_{j=1}^s p_j d\dot{q}_j , \quad (5.6)$$

so dass wir mit Gleichung (5.5) erhalten:

$$\begin{aligned} d \left( \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - L \right) &= \sum_{j=1}^s \dot{q}_j dp_j + \sum_{j=1}^s p_j d\dot{q}_j - \sum_{j=1}^s \dot{p}_j dq_j - \sum_{j=1}^s p_j d\dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_{j=1}^s \dot{q}_j dp_j - \sum_{j=1}^s \dot{p}_j dq_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt . \end{aligned} \quad (5.7)$$

Wir definieren die Hamilton-Funktion (siehe auch Gleichung (3.203))

$$H(\vec{p}, \vec{q}, t) \equiv \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - L . \quad (5.8)$$

Diese enthält zwar über die Lagrange-Funktion  $L$  auch die Geschwindigkeiten  $\dot{q}_j$ , aber diese stehen über Gleichung (5.2) in direktem Bezug zu den Impulsen  $p_j$ , so dass wir  $\dot{q}_j = \dot{q}_j(q_j, p_j)$  durch  $q_j$  und  $p_j$  ausdrücken können. Der Vergleich mit Gleichung (5.3) zeigt, dass die Hamilton-Funktion durch eine Legendre-Transformation aus der Lagrange-Funktion entsteht.

## 5.1 Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

Offensichtlich ist die linke Seite von Gleichung (5.7) das totale Differential  $dH$ , das ebenfalls auch durch

$$dH = \sum_{j=1}^s \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (5.9)$$

gegeben ist. Durch Vergleich mit Gleichung (5.7) folgen die *Hamiltonschen Bewegungsgleichungen*, die auch als *kanonische Bewegungsgleichungen* bezeichnet werden:

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\dot{p}_j \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} . \quad (5.12)$$

Damit haben wir die  $s$  Differentialgleichungen 2. Ordnung in der Lagrange-Formulierung auf  $2s$  Differentialgleichungen 1. Ordnung in der Hamilton-Formulierung reduziert.

Die kanonischen Gleichungen (5.10)–(5.11) zeigen sehr deutlich die Symmetrie und Gleichwertigkeit von Ort und Impuls auf. Die kanonischen Gleichungen zeichnen weder Ort noch Impuls besonders aus.

### 5.1.3 Der Phasenraum

Der mit der neuen Darstellung aufgespannte  $2s$ -dimensionale Raum heißt *Phasenraum*. Anschaulich kann der Phasenraum nur im Fall  $s = 1$  dargestellt werden (Abb. 5.1).

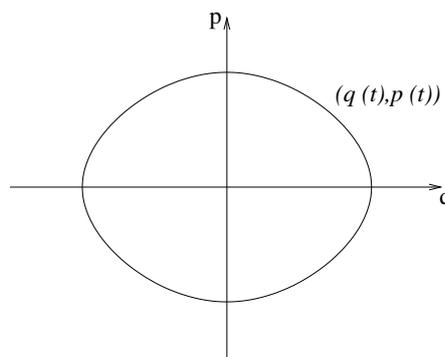


Abbildung 5.1: Illustration des Phasenraums für  $s = 1$

Die in Abb. 5.1 skizzierte Kurve beschreibt die Zustände von Ort und Impuls, die das Teilchen als Funktion des Parameters  $t$  (Zeit) durchläuft. Die Zustände sind durch die Variation der Hamilton-Funktion bestimmt. Die Kurve stellt die Niveauläche für  $H = \text{const.}$  dar. Das gezeigte Beispiel entspricht einer periodischen Bewegung.

### 5.1.4 Bedeutung der Hamilton-Funktion

Betrachten wir zunächst den Fall, dass die Kräfte zeit- und geschwindigkeitsunabhängig sind. In Kap. 3.8.3 haben wir gezeigt, dass in diesem Fall die kinetische Energie  $T$  eine homogene Funktion 2. Grades in den verallgemeinerten Geschwindigkeiten ist. In Kap. 3.12.1 haben wir bewiesen, dass in diesem Fall die Hamiltonfunktion  $H = E = T + V$  gleich der konstanten Gesamtenergie des Systems ist.

Dies verdeutlicht auch die totale Ableitung der Hamilton-Funktion nach der Zeit:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial t} .$$

Mit den kanonischen Gleichungen (5.10) und (5.11) erhalten wir dafür

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{j=1}^s \left[ \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right] = \frac{\partial H}{\partial t} . \quad (5.13)$$

Falls die Hamiltonfunktion nicht explizit von der Zeit abhängt (d.h.  $(\partial H/\partial t) = 0$ ), verschwindet die totale Ableitung, und die Hamilton-Funktion und damit die Gesamtenergie sind konstant.

### 5.1.5 Beispiel 1: Der eindimensionale harmonische lineare Oszillator

Nach Kap. 2.4.4 ist die Hamilton-Funktion in diesem Fall gegeben durch

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} . \quad (5.14)$$

Damit erhalten wir für die kanonischen Gleichungen (5.10)–(5.11)

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx , \quad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} ,$$

so dass

$$\ddot{x} = \frac{\dot{p}}{m} = -\frac{k}{m}x ,$$

mit der Lösung

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t , \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} .$$

Mit der Anfangsbedingung

$$x(t=0) = A \quad \text{folgt} \quad B = 0 ,$$

so dass

$$x(t) = A \cos \omega t , \quad p(t) = m\dot{x} = -Am\omega \sin \omega t .$$

Für die Gesamtenergie erhalten wir dann

$$E = H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 .$$

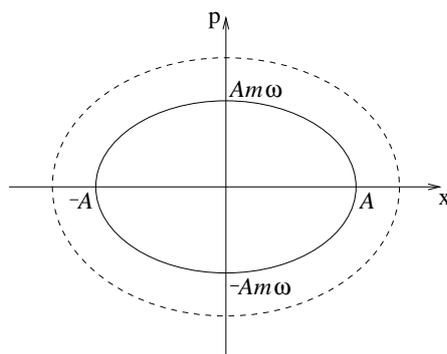


Abbildung 5.2: Phasenraumdiagramm des eindimensionalen harmonischen Oszillators. Die gestrichelte Kurve repräsentiert eine höhere Gesamtenergie  $H'$

Weil die Hamilton-Funktion konstant ist, hat Gleichung (5.14) die Gestalt einer Ellipsengleichung im Phasenraum, d.h. in den Koordinaten  $p$  und  $x$ , wie in Abb. 5.2 skizziert.

Die eingeschlossene Fläche im Phasenraum ist durch

$$F = \int p \, dx \quad (5.15)$$

gegeben und hat die Dimension einer Wirkung. Spalten wir das Integral in einen Teil oberhalb und einen Teil unterhalb der  $x$ -Achse auf, oder transformieren wir auf das entsprechende Zeit-Integral, so folgt

$$\begin{aligned} F &= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dt \, p(t) \frac{dx}{dt} = mA^2\omega^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dt \sin^2 \omega t \\ &= mA^2\omega^2 \frac{\pi}{\omega} = \pi m\omega A^2 = \pi A^2 \sqrt{mk} . \end{aligned} \quad (5.16)$$

### 5.1.6 Beispiel 2: Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld

Nach Gleichung (3.238) lautet die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - e\Phi + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} . \quad (5.17)$$

Daraus erhalten wir den konjugierten Impuls zu

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + \frac{e}{c} \vec{A} , \quad (5.18)$$

oder

$$\vec{v} = \frac{1}{m} \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) . \quad (5.19)$$

## 5 Hamilton-Mechanik

Nach der Definition (5.8) folgt dann für die Hamilton-Funktion

$$\begin{aligned}
 H &= \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \frac{\vec{p}}{m} \cdot \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) - \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\Phi - \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \left( \vec{p} - \frac{e}{mc} \vec{A} \right) \\
 &= e\Phi + \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \cdot \left[ \frac{\vec{p}}{m} - \frac{\vec{p}}{2m} + \frac{e}{2mc} \vec{A} - \frac{e}{mc} \vec{A} \right] \\
 &= \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\Phi .
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

### 5.1.7 Beispiel 3: Das Pendel im Schwerfeld

Nach Kap. 3.2 gilt für die Lagrange-Funktion

$$L = T - V = \frac{m}{2} l^2 \dot{\phi}^2 - mgl(1 - \cos \phi) .$$

Für den kanonisch konjugierten Impuls erhalten wir dann

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ml^2 \dot{\phi} .$$

Die Hamilton-Funktion lautet dann

$$H = T + V = E = \frac{p_\phi^2}{2ml^2} + mgl(1 - \cos \phi) . \tag{5.21}$$

Die kanonischen Bewegungsgleichungen sind dann

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -mgl \sin \phi , \quad \dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{ml^2} .$$

Die zweite Gleichung liefert

$$\dot{p}_\phi = ml^2 \ddot{\phi}$$

und das Gleichsetzen mit der ersten kanonischen Gleichung führt auf die bekannte (vgl. mit (3.27)) Bewegungsgleichung

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l} \sin \phi = 0 .$$

Aus Gleichung (5.21) erhalten wir für die Bahn im Phasenraum  $p_\phi = p_\phi(\phi)$

$$p_\phi = \pm \sqrt{2ml^2(E - mgl + mgl \cos \phi)} . \tag{5.22}$$

Wie in Abb. 5.3 skizziert, ist die sich ergebende Kurvenschar vom Wert der Gesamtenergie  $E$  abhängig.

Solange  $E < 2mgl$ , erhalten wir geschlossene, ellipsenähnliche Kurven; das Pendel schwingt hin und her. Dies entspricht natürlich dem in Kap. 3.2.2 diskutierten Schwingungsfall.

Für  $E > 2mgl$  hat das Pendel selbst in den Punkten  $\phi = \pm\pi$  noch kinetische Energie und schwingt ohne Richtungsumkehr weiter. Dies entspricht dem in Kap. 3.2.5 diskutierten Rotationsfall.

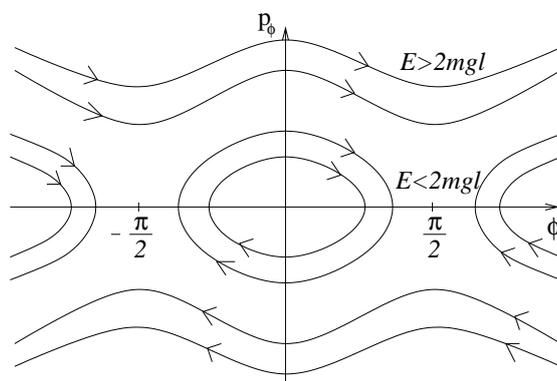


Abbildung 5.3: Phasenbahnen des Pendels im Schwerfeld

### 5.1.8 Ableitung der kanonischen Bewegungsgleichungen aus dem Hamilton-Prinzip

Ersetzen wir im Hamilton-Prinzip (3.163)

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

die Lagrange-Funktion

$$L = \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t)$$

durch die Hamilton-Funktion gemäß Gleichung (5.8), so erhalten wir das *modifizierte Hamilton-Prinzip* zu

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t) \right] dt \\ &= \delta \sum_i \int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}_i dt - \delta \int_{t_1}^{t_2} H(q_i, p_i, t) dt = 0. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Führen wir die Variation mit der  $\delta$ -Notation (Kap. 3.11.1) durch, so folgt

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[ \delta p_i \dot{q}_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right] dt = 0. \quad (5.24)$$

Im zweiten Term vertauschen wir die Ableitung nach der Zeit mit der Variation, da die Variationen bei festen Zeiten stattfinden sollen und integrieren anschließend partiell über die Zeit

$$\int_{t_1}^{t_2} dt p_i \delta \dot{q}_i = \int_{t_1}^{t_2} dt p_i \frac{d}{dt} \delta q_i = [p_i \delta q_i]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{p}_i \delta q_i = - \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{p}_i \delta q_i,$$

## 5 Hamilton-Mechanik

wobei wir ausnutzen, dass alle variierten Wege die gleichen festen Endpunkte haben ( $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ ). Für Gleichung (5.24) folgt dann

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[ \delta p_i \dot{q}_i - \dot{p}_i \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left( \left[ \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right] \delta p_i - \left[ \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right] \delta q_i \right) dt = 0.\end{aligned}\quad (5.25)$$

Da die Variationen  $\delta q_i$  und  $\delta p_i$  unabhängig sind, kann das Integral nur verschwinden, wenn die Koeffizienten einzeln verschwinden, d.h.

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\quad (5.26)$$

es folgen die kanonischen Bewegungsgleichungen.

Die Forderung nach unabhängiger Variation von  $q_i$  und  $p_i$ , die so wesentlich für die obige Ableitung ist, beleuchtet den fundamentalen Unterschied zwischen der Lagrangeschen und Hamiltonschen Formulierung:

Im Lagrange-Verfahren müssen die generalisierten Koordinaten  $q_i$  und die generalisierten Geschwindigkeiten  $\dot{q}_i$  am Anfang angegeben werden, um die Bewegung des Systems vollständig zu bestimmen. Aber die  $\dot{q}_i$  wurden stets als *abhängige* Variablen betrachtet, eng verknüpft mit den  $q_i$  durch ihre zeitliche Ableitung. Bei der Herleitung der Lagrange-Gleichung wurde die Variation  $\delta \dot{q}_i$  durch die unabhängige Variation  $\delta q_i$  mittels einer partiellen Integration nach der Zeit ausgedrückt. Dies führte auf eine zweite Ableitung der Lagrange-Funktion  $L$  und folglich auf Bewegungsgleichungen 2. Ordnung.

Wir erhalten Gleichungen erster Ordnung aus dem modifizierten Hamilton-Prinzip nur deshalb, weil die Variation  $\delta p_i$ , anders als  $\delta \dot{q}_i$ , als *unabhängig* von  $\delta q_i$  angesehen wird. Die Impulse mussten deshalb auf den gleichen Status wie die Koordinaten gehoben werden; beide sind gleichberechtigte unabhängige Variablen, die *nur durch die Bewegungsgleichungen selbst* und keine a-priori definierte Beziehung verbunden sind. Nur wenn die Menge der unabhängigen Variablen von  $s$  auf  $2s$  Größen erweitert wird, sind wir in der Lage Bewegungsgleichungen zu erhalten, die von erster Ordnung sind.

## 5.2 Poisson-Klammern

Es sei eine Funktion  $f = f(\vec{q}, \vec{p}, t)$  gegeben. Solche Funktionen stellen beispielsweise messbare, physikalische Größen ("Observable") dar. Die totale zeitliche Ableitung lautet dann

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right).\quad (5.27)$$

Mit den Hamilton-Bewegungsgleichungen (5.10)–(5.11) folgt

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right).\quad (5.28)$$

*Definition* : Wir definieren die *Poisson-Klammer* von  $f$  und  $H$  durch

$$[f, H] \equiv \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) . \quad (5.29)$$

Damit schreibt sich Gleichung (5.28) als

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] . \quad (5.30)$$

Falls  $f$  nicht explizit von der Zeit abhängt ( $\partial f / \partial t = 0$ ), gilt

$$\frac{df}{dt} = [f, H] .$$

Es liegt also ein Integral der Bewegung oder eine Erhaltungsgröße vor, d.h. die Messgröße ist zeitlich konstant,  $df/dt = 0$ , wenn

$$[f, H] = 0 \quad (5.31)$$

die Poisson-Klammer von  $f$  mit der Hamilton-Funktion  $H$  verschwindet.

Analog zur Definition (5.29) führen wir die allgemeine Poisson-Klammer für ein beliebiges Paar von Funktionen ein durch

$$[f, g] \equiv \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) . \quad (5.32)$$

### 5.2.1 Eigenschaften der allgemeinen Poisson-Klammer

Seien die Funktionen  $f_1, f_2, f, g, h$  und die Konstante  $c = \text{const.}$  gegeben. Aus der Definition (5.32) beweist man sofort durch Einsetzen folgende Eigenschaften der Poisson-Klammer:

(a) Antisymmetrie  $[f, g] = -[g, f] , \quad (5.33)$

mit der Folgerung  $[f, f] = -[f, f] = 0 \quad (5.34)$

(b)  $[f, c] = 0 \quad (5.35)$

(c) Bilinearität  $[f_1 + f_2, g] = [f_1, g] + [f_2, g] \quad (5.36)$

(d)  $[f_1 \cdot f_2, g] = f_1 [f_2, g] + f_2 [f_1, g] \quad (5.37)$

(e)  $\frac{\partial}{\partial t} [f, g] = \left[ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right] \quad (5.38)$

(f) Schwieriger zu beweisen ist die *Jacobi-Identität*:

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0 . \quad (5.39)$$

### 5.2.2 Spezielle Fälle von Poisson-Klammern

Es ist

1.  $[f, q_k] = -\frac{\partial f}{\partial p_k}$  weil  $\left(\frac{\partial q_k}{\partial p_i}\right) = 0$
2. Ebenso gilt  $[f, p_k] = \frac{\partial f}{\partial q_k}$
3.  $[q_i, q_k] = 0$
4.  $[p_i, p_k] = 0$
5.  $[p_i, q_k] = \sum_{n=1}^s \left( \frac{\partial p_i}{\partial q_n} \frac{\partial q_k}{\partial p_n} - \frac{\partial p_i}{\partial p_n} \frac{\partial q_k}{\partial q_n} \right) = 0 - \sum_{n=1}^s \delta_{in} \delta_{kn} = -\delta_{ik}$  und  $[q_i, p_j] = \delta_{ij}$ ,

wobei  $\delta_{ik}$  das Kronecker-Symbol (1.6) bezeichnet.

Die kanonischen Bewegungsgleichungen ergeben sich dann mit (5.10)–(5.11) als

$$[p_k, H] = \sum_{n=1}^s \left( \frac{\partial p_k}{\partial q_n} \frac{\partial H}{\partial p_n} - \frac{\partial p_k}{\partial p_n} \frac{\partial H}{\partial q_n} \right) = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = \dot{p}_k,$$

also  $\dot{p}_k = [p_k, H]$  (5.40)

und  $[q_k, H] = \sum_{n=1}^s \left( \frac{\partial q_k}{\partial q_n} \frac{\partial H}{\partial p_n} - \frac{\partial q_k}{\partial p_n} \frac{\partial H}{\partial q_n} \right) = \frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k,$

also  $\dot{q}_k = [q_k, H]$ . (5.41)

### 5.2.3 Poisson-Theorem

Das Poisson-Theorem ist hilfreich, bei bekannten Bewegungsintegralen weitere zu finden.

*Poisson-Theorem:* Für alle  $f$  und  $g$  mit

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{dg}{dt} = 0 \\ \text{gilt} \quad [f, g] &= \text{const.}, \end{aligned} \quad (5.42)$$

d.h.  $[f, g]$  ist Bewegungsintegral.

Beweis: Nach (5.30) gilt

$$\frac{d}{dt} [f, g] = \frac{\partial [f, g]}{\partial t} + [[f, g], H].$$

Nutzen wir die Beziehungen (5.33), (5.36), (5.38) und (5.39) auf der rechten Seite dieser

Gleichung, so folgt

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} [f, g] &= \left[ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right] - [H, [f, g]] \\
 &= \left[ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right] + [f, [g, H]] + [g, [H, f]] \\
 &= \left[ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right] + [f, [g, H]] + [[f, H], g] \\
 &= \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H], g \right] + \left[ f, \frac{\partial g}{\partial t} + [g, H] \right] \\
 &= \left[ \frac{df}{dt}, g \right] + \left[ f, \frac{dg}{dt} \right] = [0, g] + [f, 0] = 0,
 \end{aligned}$$

also  $[f, g] = \text{const.}$  Q.E.D.

Sind also zwei Bewegungsintegrale gefunden, kann man so weitere Bewegungsintegrale konstruieren.

### 5.3 Kanonische Transformationen

Unsere bisherige Erfahrung lehrt uns, dass für die Lösbarkeit mechanischer Probleme die Wahl der Koordinaten entscheidend ist. Wir suchen daher nach einer Darstellung, in der möglichst viele (oder sogar alle) Koordinaten zyklisch sind. Diese liefern dann jeweils konstante konjugierte Impulse als Erhaltungsgrößen, so dass sich das mechanische Problem enorm vereinfacht.

*Definition: Integrables System: Bei einem integrablen System sind alle Ortskoordinaten zyklisch.* Dann gilt für alle konjugierten Impulse

$$p_k = \alpha_k = \text{const.} \quad (5.43)$$

Sei außerdem die Hamilton-Funktion eine Konstante der Bewegung. Die Hamilton-Funktion ist dann weder eine explizite Funktion der Zeit noch der zyklischen Koordinaten, d.h.

$$H = H(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad (5.44)$$

Als Folge erhalten wir für die kanonische Gleichung (5.11)

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = \omega_i = \omega_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad (5.45)$$

Die  $\omega_i$  sind wieder zeitlich konstant, da sie nur von den  $\alpha_i$  abhängen. Als Lösung der Bewegungsgleichung (5.45) ergibt sich

$$q_i = \omega_i t + \beta_i, \quad (5.46)$$

wobei die Integrationskonstanten  $\beta_i$  aus den Anfangsbedingungen folgen.

Wir suchen also eine Transformation für die Koordinaten, die es erlaubt, die Lösung so einfach wie in Gleichung (5.46) zu formulieren:

$$Q_j = Q_j(\vec{q}, \vec{p}, t), \quad (5.47)$$

$$P_j = P_j(\vec{q}, \vec{p}, t). \quad (5.48)$$

Anders als früher (Kap. 3.6.3) ändert sich die Anzahl der unabhängigen Koordinaten nicht mehr (keine neuen Zwangsbedingungen). Die einzige Bedingung an die Transformationen (5.47)–(5.48) ist, dass sie die Form der kanonischen Bewegungsgleichungen beibehalten, d.h.

$$\dot{P}_j = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_j}, \quad (5.49)$$

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_j}. \quad (5.50)$$

Allerdings kann sich die Hamilton-Funktion bei der Transformation ändern

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t) \rightarrow \bar{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t). \quad (5.51)$$

Diese Transformationen heißen *kanonische Transformationen*, weil sie die Form der kanonischen Gleichungen invariant lassen.

### 5.3.1 Erzeugende Funktion

Die Forderung, dass die Form der kanonischen Gleichungen und nicht die Hamilton-Funktion invariant bleiben, ist darauf zurückzuführen, dass die Bewegungsgleichungen das Äquivalent zu den Lagrange-Gleichungen sind und sich damit aus dem Hamilton-Prinzip herleiten lassen. Das Hamilton-Prinzip der stationären Wirkung muss weiterhin gültig sein und zwar in beiden Formulierungen  $(\vec{q}, \vec{p}, t)$  und  $(\vec{Q}, \vec{P}, t)$ .

Nach Gleichung (5.8) ist

$$L = \sum_k p_k \dot{q}_k - H(\vec{q}, \vec{p}, t). \quad (5.52)$$

Damit erscheint das Hamilton-Prinzip (5.23) mit  $dq_k = \dot{q}_k dt$  in der Form

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_j p_j dq_j - H dt \right] = \delta \sum_j \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_j P_j dQ_j - \bar{H} dt \right] = 0. \quad (5.53)$$

Wegen der festgehaltenen Randwerte der Integration können sich beide Integranden nur um die totale Zeitableitung einer beliebigen Funktion  $F(\vec{q}, \vec{p}, \vec{Q}, \vec{P}, t)$  unterscheiden,

$$L - \bar{L} = \frac{dF}{dt}, \quad (5.54)$$

denn  $\delta [F(t_2) - F(t_1)] = 0$ ,

weil  $\delta \left[ \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt} dt \right] = \delta [F(t_2) - F(t_1)] = 0$

wegen  $\delta F(t_2) = \delta F(t_1) = 0$ .

Aus den Gleichungen (5.52) und (5.54) folgt also

$$\sum_j p_j dq_j - H(\vec{q}, \vec{p}, t) dt = \sum_j P_j dQ_j - \bar{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t) dt + dF(\vec{q}, \vec{Q}, t), \quad (5.55)$$

mit 
$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \sum_j \frac{\partial F}{\partial q_j} dq_j + \sum_j \frac{\partial F}{\partial Q_j} dQ_j. \quad (5.56)$$

Die *erzeugende Funktion*  $F$  ist im Allgemeinen eine Funktion  $F = F(\vec{q}, \vec{p}, \vec{Q}, \vec{P}, t)$  der "neuen" und "alten" Koordinaten, also von  $4n$  Variablen. Die konjugierten Impulse sind aber über ihre zeitliche Ableitung gemäß den kanonischen Gleichungen durch die Ableitung der Hamilton-Funktion (aus der bekannten Lagrange-Funktion) nach  $\vec{q}$  und  $\vec{Q}$  schon implizit durch  $F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t)$  gegeben. Von den  $4n$  Variablen sind nur  $2n$  unabhängig voneinander, daher können wir die erzeugende Funktion in einer der folgenden vier Formen schreiben:

- (a)  $F_1(q_i, Q_i, t)$
- (b)  $F_2(q_i, P_i, t)$
- (c)  $F_3(p_i, Q_i, t)$
- (d)  $F_4(p_i, P_i, t)$

je nach Art des Problems.

Ist zum Beispiel die erste Form  $F_1$  geeignet, so folgt aus Gleichung (5.56)

$$\frac{dF_1}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial F_1}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \dot{Q}_j.$$

Setzen wir dies in Gleichung (5.55) ein, erhalten wir

$$\sum_j p_j \dot{q}_j - H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \sum_j P_j \dot{Q}_j - \bar{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial F_1}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \dot{Q}_j,$$

oder nach Umstellen

$$\sum_j \left( p_j - \frac{\partial F_1}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j = \sum_j \left( P_j + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \right) \dot{Q}_j + H(\vec{q}, \vec{p}, t) - \bar{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (5.57)$$

Da die alten ( $q_j$ ) und neuen ( $Q_j$ ) Koordinaten hier als unabhängig angesehen werden, müssen die Koeffizienten der  $\dot{q}_j$  und  $\dot{Q}_j$  einzeln verschwinden, d.h.

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j} = p_j(q, Q, t), \quad (5.58)$$

$$P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j} = P_j(q, Q, t), \quad (5.59)$$

so dass 
$$\bar{H} = H + \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial t} \quad (5.60)$$

## 5 Hamilton-Mechanik

übrig bleibt.

Man kann die  $2n$  Gleichungen (5.58)–(5.59) nach  $q = q(Q, P, t)$  und  $p = p(Q, P, t)$  auflösen. Setzt man diese auf der rechten Seite von Gleichung (5.60) ein, so folgt die neue Hamilton-Funktion  $\bar{H}(Q, P, t)$ .

Als nächstes behandeln wir die Transformationsgleichungen für eine Erzeugende vom Typ  $F_2(q, P, t)$ . Diese lässt sich durch eine Legendre-Transformation aus  $F_1$  ableiten, da nach Gleichung (5.59)  $P_j = -(\partial F_1 / \partial Q_j)$  ist; es gilt also

$$F_2(q, P, t) = F_1(q, Q, t) + \sum_j P_j Q_j . \quad (5.61)$$

Dann erhalten wir für Gleichung (5.55)

$$\begin{aligned} \sum_j p_j \dot{q}_j - H(\vec{q}, \vec{p}, t) &= \sum_j P_j \dot{Q}_j - \bar{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t) + \frac{dF_1}{dt} \\ &= \sum_j P_j \dot{Q}_j - \bar{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t) + \frac{d}{dt} \left[ F_2(q, P, t) - \sum_j P_j Q_j \right] . \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \sum_j p_j \dot{q}_j - \sum_j P_j \dot{Q}_j - H + \bar{H} &= \frac{\partial F_2}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial F_2}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial F_2}{\partial P_j} \dot{P}_j - \sum_j \dot{P}_j Q_j - \sum_j P_j \dot{Q}_j \\ \text{oder} \quad \sum_j p_j \dot{q}_j + \sum_j \dot{P}_j Q_j - H + \bar{H} &= \frac{\partial F_2}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial F_2}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial F_2}{\partial P_j} \dot{P}_j . \end{aligned} \quad (5.62)$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt

$$p_j = \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial q_j} , \quad (5.63)$$

$$Q_j = \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial P_j} , \quad (5.64)$$

$$\bar{H}(P_i, Q_i, t) = H(p_i, q_i, t) + \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial t} . \quad (5.65)$$

Ähnlich verfährt man mit den Erzeugenden  $F_3$  und  $F_4$  (Übungsaufgaben).  $F_3(p, Q, t)$  erhält man aus  $F_1(q, Q, t)$  durch die Legendre-Transformation

$$F_3(p, Q, t) = - \sum_j q_j p_j + F_1(q, Q, t) , \quad (5.66)$$

### 5.3 Kanonische Transformationen

weil nach Gleichung (5.58)  $p_j = (\partial F_1 / \partial q_j)$ . Damit erhält man als Transformationsgleichungen

$$q_j = -\frac{\partial F_3(p, Q, t)}{\partial p_j}, \quad P_j = -\frac{\partial F_3(p, Q, t)}{\partial Q_j}, \quad \bar{H} = H + \frac{\partial F_3(p, Q, t)}{\partial t}. \quad (5.67)$$

$F_4(p, P, t)$  erhält man aus  $F_1(q, Q, t)$  durch die doppelte Legendre-Transformation

$$F_4(p, P, t) = F_1(q, Q, t) + \sum_j P_j Q_j - \sum_j q_j p_j. \quad (5.68)$$

Als Transformationsgleichungen ergeben sich in diesem Fall

$$q_j = -\frac{\partial F_4(p, P, t)}{\partial p_j}, \quad Q_j = \frac{\partial F_4(p, P, t)}{\partial P_j}, \quad \bar{H} = H + \frac{\partial F_4(p, P, t)}{\partial t}. \quad (5.69)$$

In Tabelle 5.1 haben wir die Transformationseigenschaften der vier Erzeugenden zusammengefasst. In allen Fällen ist

$$\bar{H} = H + \frac{\partial F_i}{\partial t}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (5.70)$$

Tabelle 5.1: Transformationseigenschaften der erzeugenden Funktionen

	$Q$	$P$
$q$	$F_1(q, Q, t)$ $p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j}, P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j}$	$F_2(q, P, t)$ $p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j}, Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j}$
$p$	$F_3(p, Q, t)$ $q_j = -\frac{\partial F_3}{\partial p_j}, P_j = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_j}$	$F_4(p, P, t)$ $q_j = -\frac{\partial F_4}{\partial p_j}, Q_j = \frac{\partial F_4}{\partial P_j}$

### 5.3.2 Beispiele kanonischer Transformationen

(a) Identische Transformation:

Die Transformation

$$F_2(q, P, t) = \sum_j q_j P_j \quad (5.71)$$

heißt identische Transformation, denn nach den Gleichungen (5.63)–(5.65) sind dann

$$\begin{aligned} p_j &= \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial q_j} = P_j, \\ Q_j &= \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial P_j} = q_j \end{aligned}$$

die neuen und alten Koordinaten gleich, ebenso wie die alte und neue Hamilton-Funktion  $\bar{H} = H$ .

Übungsaufgabe:

A5.3.1) Zeigen Sie, dass auch  $F_3 = -\sum_j p_j Q_j$  die identische Transformation ergibt.

(b) Punkttransformation:

Sei

$$F_2(q, P, t) = \sum_k f_k(q_1, \dots, q_s, t) P_k. \quad (5.72)$$

Nach den Transformationsgleichungen (5.63)–(5.64) ergibt sich

$$p_j = \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial q_j} = \sum_k \frac{\partial f_k}{\partial q_j} P_k$$

und 
$$Q_j = f_j(q_1, \dots, q_s, t),$$

d.h. hier hängen die neuen Koordinaten nur von den alten Koordinaten und der Zeit ab, nicht aber von den alten Impulsen. Solche Transformationen bezeichnet man als Punkttransformationen. Da die  $f_k$  beliebig sind, folgt, dass *alle Punkttransformationen kanonisch sind*. Nach Gleichung (5.65) enthält die neue Hamilton-Funktion die Zeitableitung ( $\partial f_k / \partial t$ ) der Funktionen  $f_k$ .

(c) Vertauschungstransformation:

Die Transformation

$$F_1(q, Q, t) = \sum_j q_j Q_j \quad (5.73)$$

vertauscht die Rolle von Impulsen und Koordinaten, denn aus den Transformationsgleichungen (5.58)–(5.59) folgt

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j} = Q_j$$

und

$$P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j} = -q_j .$$

Dieses Beispiel zeigt sehr schön die Gleichwertigkeit von Begriffen wie Koordinaten und Impulsen in der Hamilton-Mechanik.

Übungsaufgabe:

A5.3.2) Zeigen Sie, dass auch  $F_4 = -\sum_j p_j P_j$  die Vertauschungstransformation ergibt.

(d) Spezielle Transformation:

Für spätere Diskussion betrachten wir die Erzeugende

$$F_1(q, Q, t) = \frac{m}{2} \omega q^2 \cot Q , \quad (5.74)$$

wobei  $m$  und  $\omega$  Konstanten bezeichnen.

Aus den Transformationsgleichungen (5.58)–(5.59) erhalten wir dann

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q$$

$$\text{und} \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = -\frac{m}{2} \omega q^2 \frac{1}{-\sin^2 Q} = \frac{m\omega q^2}{2 \sin^2 Q}$$

$$\text{oder} \quad q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \quad (5.75)$$

$$\text{und damit} \quad p = m\omega \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \frac{\cos Q}{\sin Q} = \sqrt{2m\omega P} \cos Q . \quad (5.76)$$

Da die Erzeugende (5.74) die Zeit nicht enthält, folgt aus Gleichung (5.60) für die neue Hamilton-Funktion

$$\bar{H}(Q, P) = H(q(Q, P), p(Q, P)) . \quad (5.77)$$

Wir wenden diese spezielle Erzeugende auf den Fall des linearen harmonischen Oszillators an.

### 5.3.3 Anwendung: linearer harmonischer Oszillator

Mit  $V = (k/2)q^2$  gilt für die Hamilton-Funktion des linearen harmonischen Oszillators

$$H = T + V = \frac{m}{2} \dot{q}^2 + \frac{kq^2}{2} = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} .$$

## 5 Hamilton-Mechanik

Mit  $k = m\omega^2$  folgt

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} . \quad (5.78)$$

Wir transformieren jetzt auf neue Variablen  $(Q, P)$  mittels der Erzeugenden (5.74). Setzen wir die Gleichungen (5.75) und (5.76) gemäß Beziehung (5.77) ein, so erhalten wir eine besonders einfache neue Hamilton-Funktion:

$$\bar{H} = H = \frac{1}{2m} 2m\omega P \cos^2 Q + \frac{m\omega^2}{2} \frac{2P}{m\omega} \sin^2 Q = \omega P [\cos^2 Q + \sin^2 Q] = \omega P . \quad (5.79)$$

Die neue Hamilton-Funktion ist zyklisch in  $Q$ . Aus der kanonischen Gleichung (5.49)

$$\dot{P} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q} = 0$$

folgt 
$$P = \text{const.} = P_0 = \frac{E}{\omega} .$$

Gleichzeitig folgt aus der kanonischen Gleichung (5.50)

$$\dot{Q} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P} = \omega ,$$

so dass sich 
$$Q(t) = \omega t + \alpha$$

als allgemeine Lösung ergibt. Aus Gleichung (5.75) erhalten wir damit

$$q(t) = \sqrt{\frac{2P_0}{m\omega}} \sin(\omega t + \alpha) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \alpha) \quad (5.80)$$

die bekannte Lösung (2.66) (mit  $a = \sqrt{2E/k} = \sqrt{2E/m\omega^2}$ ). Die Frage, wie wir auf die Erzeugende (5.74) gekommen sind, werden wir später beantworten (siehe Kap. 5.4.3).

### 5.3.4 Kriterien für Kanonizität

Wie erkennt man nun, ob eine Transformation

$$P_j = P_j(\vec{q}, \vec{p}, t) , \quad Q_j = Q_j(\vec{q}, \vec{p}, t) \quad (5.81)$$

kanonisch ist, wenn die zugehörige erzeugende Funktion nicht explizit bekannt ist?

*Satz: Die Phasentransformation (5.81) ist genau dann kanonisch, wenn die fundamentalen Poissonklammern in den neuen Variablen*

$$[Q_i, P_j] = \delta_{ij} , \quad (5.82)$$

$$[Q_i, Q_j] = [P_i, P_j] = 0 \quad (5.83)$$

*erfüllt sind.*

Den Beweis für nicht explizit zeitabhängige erzeugende Funktionen findet sich im Band 2 des Mechanik-Buches von Nolting (Übungsaufgabe).

## 5.4 Hamilton-Jacobi-Gleichung

Auf welche Weise muss eine Hamilton-Funktion  $H$  transformiert werden, damit die Lösung eines möglichen physikalischen Problems möglichst einfach wird?

Eine mögliche Transformation besteht darin, so zu transformieren, dass in den neuen Variablen  $(Q, P)$  die transformierte Hamilton-Funktion  $\bar{H}$  ein bekanntes, bereits gelöstes Problem darstellt (z.B. den harmonischen Oszillator).

Noch einfacher wird die Lösung, wenn die neue Hamilton-Funktion gänzlich verschwindet. Dann ist die Lösung der neuen kanonischen Gleichungen (5.49)–(5.50) trivial, nämlich

$$\dot{P}_j = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_j} = 0, \quad \rightarrow P_j = \alpha_j = \text{const}, \quad j = 1, \dots, s, \quad (5.84)$$

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_j} = 0, \quad \rightarrow Q_j = \beta_j = \text{const}, \quad j = 1, \dots, s. \quad (5.85)$$

Deshalb bestimmen wir hier diejenige kanonische Transformation  $F$ , für die die neue Hamilton-Funktion verschwindet. Gemäß Gleichung (5.70) muss dann gelten

$$\bar{H}(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \quad (5.86)$$

Diese Bedingung führt zu einer partiellen Differentialgleichung für  $F$ , der *Hamilton-Jacobi-Gleichung*.

Es ist zweckmäßig, aber keinesfalls notwendig, die Erzeugende vom Typ  $F_2 = F_2(q, P, t)$  zu wählen. Dann gilt nach den Transformationsgleichungen (5.63)–(5.64):

$$p_j = \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial q_j}, \quad Q_j = \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial P_j}. \quad (5.87)$$

Setzen wir dies in die rechte Seite von Gleichung (5.86) ein, so ergibt sich die Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung (HJD) zu

$$H\left(q_1, \dots, q_s, \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q_s}, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0. \quad (5.88)$$

Es ist manchmal einfacher, diese HJD anstatt der Bewegungsgleichungen zu lösen.

### 5.4.1 Anmerkungen zur Hamilton-Jacobi-Gleichung und Lösungsverfahren

(1) Wir berechnen die totale Zeitableitung von  $F_2$ :

$$\frac{dF_2}{dt} = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \sum_{j=1}^s \left[ \frac{\partial F_2}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F_2}{\partial P_j} \dot{P}_j \right].$$

Mit den Gleichungen (5.84) und (5.87a) ergibt sich

$$\frac{dF_2}{dt} = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j = \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - H(q, p, t) = L, \quad (5.89)$$

## 5 Hamilton-Mechanik

wobei wir die Gleichungen (5.86) und (5.8) verwendet haben. Integrieren wir Gleichung (5.89), so erhalten wir

$$F_2 = \int dt L(p, q, t) + const = S + const. \quad (5.90)$$

Bis auf eine Konstante ist die erzeugende Funktion  $F_2$  gleich der Wirkungsfunktion  $S = \int dt L$ , die beim Hamilton-Prinzip minimiert wurde. Deshalb heißt

$$F_2(q, P, t) = S(q, P, t) \quad (5.91)$$

*Hamiltonsche Wirkungsfunktion.*

**(2)** Die HJD (5.88) ist eine nichtlineare Differentialgleichung 1. Ordnung für  $F_2$  in den  $(s+1)$  Variablen  $q_1, \dots, q_s, t$ . Sie ist nichtlinear, da  $H$  im Allgemeinen quadratisch von den Impulsen  $p_j$  und damit von  $(\partial F_2 / \partial q_j)$  abhängt. Es treten nur partielle Ableitungen 1. Ordnung nach den  $q_j$  und nach  $t$  auf.

**(3)** Die HJD enthält  $(s+1)$ -verschiedene Ableitungen der gesuchten Funktion  $F_2$ . Nach der Integration der Gleichung erhalten wir demnach  $(s+1)$  Integrationskonstanten. Da die HJD  $F_2$  nur in der Form  $(\partial F_2 / \partial q_j)$  oder  $(\partial F_2 / \partial t)$  enthält, ist mit  $F_2$  auch stets  $F_2 + const.$  Lösung. Von den Integrationskonstanten ist also eine trivial additiv. Die vollständige Lösung hat also die Gestalt

$$F_2(q_1, \dots, q_s, t | \alpha_1, \dots, \alpha_s) + \alpha_{s+1} \quad (5.92)$$

$\alpha_{s+1}$  ist unwichtig, da die Transformationsformeln (5.87) nur die Ableitungen von  $F_2$  enthalten.

**(4)** Die HJD bestimmt nur die  $q_j$ - und  $t$ -Abhängigkeiten der Lösung  $F_2 = F_2(q_j, P_j, t)$  und macht keine Aussagen über die Impulse  $P_j$ . Wir wissen aber aus Gleichung (5.84), dass die Impulse konstant sind, und haben deshalb die Freiheit, die Integrationskonstanten mit den neuen Impulsen zu identifizieren:

$$P_j = \alpha_j, \quad j = 1, \dots, s. \quad (5.93)$$

Aus diesen Überlegungen konstruieren wir das folgende *Lösungsverfahren*:

**(a)** Man formuliere  $H = H(\vec{q}, \vec{p}, t)$ , setze  $p_j = \partial F_2 / \partial q_j$  ein und stelle die HJD auf.

**(b)** Man löse die HJD für  $F_2$ :

$$F_2 = S(q_1, \dots, q_s, t | \alpha_1, \dots, \alpha_s)$$

und identifiziere die Integrationskonstanten mit den *neuen* Impulsen:

$$P_j = \alpha_j, \quad j = 1, \dots, s.$$

**(c)** Man setze nach Gleichung (5.87b)

$$Q_j = \frac{\partial S(\vec{q}, t | \vec{\alpha})}{\partial \alpha_j} = Q_j(\vec{q}, t | \vec{\alpha}) = \beta_j, \quad j = 1, \dots, s. \quad (5.94)$$

Das sind  $s$ -Gleichungen, die nach den alten Koordinaten  $q_1, \dots, q_s$  aufzulösen sind:

$$q_j = q_j(t | \beta_1, \dots, \beta_s, \alpha_1, \dots, \alpha_s) = q_j\left(t \left| \vec{\beta}, \vec{\alpha} \right.\right), \quad j = 1, \dots, s. \quad (5.95)$$

**(d)** Man berechne die alten Impulse aus Gleichung (5.87a)

$$p_j = \frac{\partial S(\vec{q}, t | \vec{\alpha})}{\partial q_j} = p_j(\vec{q}, t | \vec{\alpha}), \quad j = 1, \dots, s \quad (5.96)$$

und setze die Koordinaten aus Gleichung (5.95) ein:

$$p_j = p_j(t | \beta_1, \dots, \beta_s, \alpha_1, \dots, \alpha_s) = p_j\left(t \left| \vec{\beta}, \vec{\alpha} \right.\right), \quad j = 1, \dots, s. \quad (5.97)$$

**(e)** Die Anfangsbedingungen

$$q_j^{(0)} = q_j(t = t_0), \quad p_j^{(0)} = p_j(t = t_0), \quad j = 1, \dots, s$$

liefern über (5.95) und (5.97)

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}\left(t_0 \left| \vec{p}^{(0)}, \vec{q}^{(0)} \right.\right), \quad \vec{\beta} = \vec{\beta}\left(t_0 \left| \vec{p}^{(0)}, \vec{q}^{(0)} \right.\right),$$

die dann wiederum in (5.95) und (5.97) eingesetzt werden, womit das mechanische Problem vollständig gelöst ist.

Wir illustrieren das Verfahren am Beispiel des linearen harmonischen Oszillators.

### 5.4.2 Beispiel des Lösungsverfahrens: Der lineare harmonische Oszillator

**(a)** Nach Gleichung (5.78) ist die Hamilton-Funktion mit  $k = m\omega^2$  durch

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$$

gegeben. Wir setzen  $p = (\partial S / \partial q)$  und erhalten als HJD nach Gleichung (5.88)

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \frac{m\omega^2 q^2}{2} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (5.98)$$

**(b)** Wegen der  $t$ -Abhängigkeit nur im letzten Term von Gleichung (5.98) machen wir den Ansatz

$$S(q, P, t) = W(q | P) - \alpha t, \quad (5.99)$$

mit der Integrationskonstanten  $\alpha$  und erhalten die Gleichung

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{dW}{dq} \right)^2 + \frac{m\omega^2 q^2}{2} = \alpha$$

## 5 Hamilton-Mechanik

für die Funktion  $W(q|P)$ . Es folgt

$$\frac{dW}{dq} = m\omega \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2} - q^2}$$

und nach Integration

$$W = m\omega \int dq \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2} - q^2} + \text{const.}$$

Für die Lösung der HJD (5.99) folgt

$$\begin{aligned} S(q, \alpha, t) &= m\omega \int dq \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2} - q^2} - \alpha t + \text{const} \\ &= m\omega \left[ \frac{q}{2} \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2} - q^2} + \frac{\alpha}{m\omega^2} \arcsin \left( q \sqrt{\frac{m\omega^2}{2|\alpha|}} \right) \right] - \alpha t + \text{const}. \end{aligned} \quad (5.100)$$

Der neue Impuls ist

$$P = \alpha. \quad (5.101)$$

**(c)** Wir setzen

$$Q = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \beta = \text{const}$$

und erhalten mit der Lösung (5.100)

$$\beta = \frac{1}{\omega} \int dq \left[ \frac{2\alpha}{m\omega^2} - q^2 \right]^{-1/2} - t$$

$$\text{oder} \quad \beta + t = \frac{1}{\omega} \arcsin \left( q\omega \sqrt{\frac{m}{2\alpha}} \right). \quad (5.102)$$

Wir lösen diese Gleichung nach  $q$  auf:

$$q = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2\alpha}{m}} \sin \omega (t + \beta). \quad (5.103)$$

Offensichtlich hat die neue Ortskoordinate  $Q = \beta$  die Dimension Zeit.

**(d)** Den alten Impuls berechnen wir aus

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{dW}{dq} = m\omega \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2} - q^2} \quad (5.104)$$

und setzen das Ergebnis (5.103) für  $q$  ein. Mit

$$\frac{2\alpha}{m\omega^2} - q^2 = \frac{2\alpha}{m\omega^2} [1 - \sin^2 \omega (t + \beta)] = \frac{2\alpha}{m\omega^2} \cos^2 \omega (t + \beta) \quad (5.105)$$

erhalten wir

$$p = \sqrt{2\alpha m} \cos \omega (t + \beta). \quad (5.106)$$

(e) Mit den Anfangsbedingungen bei  $t = t_0 = 0$ :  $p^{(0)} = 0$ ,  $q^{(0)} = q_0 \neq 0$  folgt aus Gleichung (5.104)

$$\alpha = \frac{1}{2} m \omega^2 q_0^2 = E. \quad (5.107)$$

Da wir zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  nur potentielle Energie haben, ist nach Gleichung (5.107)  $\alpha$  gleich der Gesamtenergie  $E$  des Systems. Gleichung (5.102) für  $t = 0$  liefert dann mit (5.107)

$$\beta = \frac{1}{\omega} \arcsin \left( q_0 \omega \sqrt{\frac{m}{m \omega^2 q_0^2}} \right) = \frac{1}{\omega} \arcsin(1) = \frac{\pi}{2\omega}. \quad (5.108)$$

(f) Setzen wir die Ergebnisse (5.107) und (5.108) für  $\alpha$  bzw.  $\beta$  in die Lösungen (5.103) und (5.106) ein, so folgen als vollständige Lösungen der Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2E}{m}} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{\frac{2E}{m}} \omega^2 \cos \omega t, \\ p(t) &= \sqrt{2Em} \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = -\sqrt{2Em} \sin \omega t. \end{aligned} \quad (5.109)$$

### 5.4.3 Zusatzüberlegung

Die Lösung (5.100) ist eine Erzeugende vom Typ  $F_2(q, P, t)$ . Mit Hilfe der Ergebnisse können wir auch die entsprechende Erzeugende vom Typ  $F_1(q, Q, t)$  aufstellen. Dazu erinnern wir uns, dass nach den Gleichungen (5.58)–(5.59):

$$\begin{aligned} p_j &= \frac{\partial F_1}{\partial q_j} \\ \text{und} \quad P_j &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j}. \end{aligned}$$

Mit den Gleichungen (5.101) und (5.102) folgt mit  $\beta = Q$

$$P = \alpha = \frac{m \omega^2 q^2}{2 \sin^2 \omega (t + \beta)} = \frac{m \omega^2 q^2}{2 \sin^2 \omega (t + Q)}.$$

Setzen wir dies in Gleichung (5.59) ein, erhalten wir

$$P = \frac{m \omega^2 q^2}{2 \sin^2 \omega (t + Q)} = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}. \quad (5.110)$$

Dann folgt daraus mit Gleichung (5.106)

$$p = \sqrt{2\alpha m} \cos \omega (t + Q) = \sqrt{2Pm} \cos \omega (t + Q) = \frac{m \omega q \cos \omega (t + Q)}{\sin \omega (t + Q)} = \frac{\partial F_1}{\partial q} \quad (5.111)$$

nach Gleichung (5.58). Integrieren wir diese Gleichung bezüglich  $q$ , so folgt

$$F_1(q, Q, t) = \frac{1}{2} m \omega q^2 \cot \omega (t + Q) + f_1(Q, t).$$

## 5 Hamilton-Mechanik

Leiten wir dieses Ergebnis nach  $Q$  ab:

$$\frac{\partial F_1}{\partial Q} = -\frac{1}{2}m\omega q^2 \frac{\omega}{\sin^2 \omega(t+Q)} + \frac{\partial f_1}{\partial Q}$$

und vergleichen mit Gleichung (5.110), so folgt

$$\frac{\partial f_1}{\partial Q} = 0,$$

$$\text{so dass} \quad F_1(q, Q, t) = \frac{1}{2}m\omega q^2 \cot \omega(t+Q) + f_1(t). \quad (5.112)$$

$F_1$  muss außerdem die HJD (5.98) des harmonischen Oszillators erfüllen, d.h.

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial F_1}{\partial q} \right)^2 + \frac{m\omega^2 q^2}{2} + \frac{\partial F_1}{\partial t} = 0.$$

Mit den Gleichungen (5.111) und (5.112) folgt dann

$$\begin{aligned} -\frac{\partial f_1}{\partial t} &= \frac{m\omega^2 q^2}{2} \cot^2 \omega(t+Q) + \frac{m\omega^2 q^2}{2} - \frac{m\omega^2 q^2}{2 \sin^2 \omega(t+Q)} \\ &= \frac{m\omega^2 q^2}{2} \left[ 1 - \frac{1}{\sin^2 \omega(t+Q)} + \frac{\cos^2 \omega(t+Q)}{\sin^2 \omega(t+Q)} \right] = 0, \end{aligned}$$

so dass bis auf eine unwesentliche additive Konstante

$$F_1(q, Q, t) = \frac{1}{2}m\omega q^2 \cot \omega(t+Q). \quad (5.113)$$

Damit haben wir die Herkunft der Transformation (5.74) begründet.

## 5.5 Hamiltonsche charakteristische Funktion

Das Beispiel in Kap. 5.4.2 konnte so einfach gelöst werden, weil die Erzeugende  $S$  (siehe Ansatz (5.99)) in zwei Teile separiert werden konnte: der eine enthielt nur die Variable  $q$ , der andere nur die Zeit  $t$ . Eine solche Separation ist immer dann möglich, wenn die *alte* Hamilton-Funktion  $H$  die Zeit nicht explizit enthält,  $(\partial H / \partial t) = 0$ ,  $H$  also ein Integral der Bewegung ist. In solchen Fällen lautet die HJD (5.88)

$$H \left( \vec{q}, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s} \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (5.114)$$

und die gesamte Zeitabhängigkeit wird durch den zweiten Term beschrieben. Mit dem Ansatz

$$S(\vec{q}, \vec{P}, t) = W(\vec{q} | \vec{P}) - Et \quad (5.115)$$

$$\text{folgt} \quad H \left( \vec{q}, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_s} \right) = E. \quad (5.116)$$

Die Konstante  $E$  ist in der Regel, nämlich bei skleronomen Zwangsbedingungen, die Gesamtenergie des Systems. Die Funktion  $W(\vec{q}|\vec{P})$  wird *Hamiltonsche charakteristische Funktion* genannt.

Die Konstante  $E$  ist von den *neuen* Impulsen  $P_j = \alpha_j$  abhängig:

$$E = E(\alpha_1, \dots, \alpha_s) . \quad (5.117)$$

Die durch die Funktion (5.115) erzeugte kanonische Transformation ist nach den Gleichungen (5.63)–(5.64) gegeben durch

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j} = \frac{\partial W}{\partial q_j} , \quad (5.118)$$

$$Q_j = \frac{\partial S}{\partial P_j} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial E}{\partial \alpha_j} t . \quad (5.119)$$

## 5.6 Separation der Variablen

Ist das Hamilton-Jacobi-Verfahren überhaupt hilfreich? Man ersetzt schließlich  $2s$  gewöhnliche (Hamiltonsche) Differentialgleichungen durch eine partielle Differentialgleichung. Letztere sind aber im Allgemeinen schwieriger zu lösen. Die Hamilton-Jacobi-Methode ist nur dann ein mächtiges Verfahren, wenn sich die HJD separieren lässt.

Betrachten wir den Fall einer alten Hamilton-Funktion, die nicht explizit von der Zeit  $t$  abhängt, so dass nach Gleichung (5.116)

$$H\left(\vec{q}, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_s}\right) = E . \quad (5.120)$$

Wir nehmen an, dass  $q_1$  und  $(\partial W/\partial q_1)$  in  $H$  nur in der Form

$$f\left(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1}\right)$$

erscheinen, wobei die Funktion  $f$  keine anderen  $q_j$  und  $(\partial W/\partial q_j)$  mit  $j > 1$  enthält. Dann reduziert sich die HJD (5.120) auf

$$H\left(q_2, \dots, q_s, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_s}, f\left(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1}\right)\right) = E . \quad (5.121)$$

Es empfiehlt sich der Ansatz

$$W(\vec{q}|\vec{P}) = \bar{W}(q_2, \dots, q_s|\vec{P}) + W_1(q_1|\vec{P}) . \quad (5.122)$$

Einsetzen in Gleichung (5.121) liefert

$$H\left(q_2, \dots, q_s, \frac{\partial \bar{W}}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial \bar{W}}{\partial q_s}, f\left(q_1, \frac{\partial W_1}{\partial q_1}\right)\right) = E . \quad (5.123)$$

## 5 Hamilton-Mechanik

Nehmen wir an, wir hätten die Lösung für  $W$  bereits gefunden. Dann muss Gleichung (5.123) zur Identität werden, d.h. insbesondere für alle  $q_1$  erfüllt sein. Eine Änderung von  $q_1$  darf sich bezüglich  $H$  nicht bemerkbar machen. Da  $q_1$  aber nur in die Funktion  $f$  eingeht, muss  $f$  selbst konstant sein, d.h.

$$f\left(q_1, \frac{dW_1}{dq_1}\right) = C_1 = \text{const}, \quad (5.124)$$

so dass

$$H\left(q_2, \dots, q_s, \frac{\partial \bar{W}}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial \bar{W}}{\partial q_s}, C_1\right) = E. \quad (5.125)$$

Da die neuen Impulse  $P_j$  nach Konstruktion sämtlich konstant sind, ist  $W_1$  nur von  $q_1$  abhängig und wir dürfen in (5.124) die partielle Ableitung  $\partial W_1 / \partial q_1 = dW_1 / dq_1$  durch die totale Ableitung ersetzen. Gleichung (5.124) ist damit eine *gewöhnliche* Differentialgleichung für  $W_1$ ; Gleichung (5.125) nach wie vor eine partielle Differentialgleichung für  $\bar{W}$ , aber mit einer um eins kleineren Zahl unabhängiger Variablen.

In manchen Fällen lassen sich so sukzessive alle Koordinaten abtrennen und die vollständige Lösung der HJD in Verallgemeinerung von Gleichung (5.122) ansetzen als

$$W = \sum_{j=1}^s W_j(q_j | \alpha_1, \dots, \alpha_s). \quad (5.126)$$

Dadurch wird die HJD in  $s$  gewöhnliche Differentialgleichungen der Form

$$H_j\left(q_j, \frac{dW_j}{dq_j}, \alpha_1, \dots, \alpha_s\right) = \alpha_j \quad (5.127)$$

zerlegt, d.h. die HJD ist in den Koordinaten  $q_j$  separabel.

Für den *Spezialfall*, dass nur eine Koordinate nicht zyklisch ist, ist eine Separation immer möglich: sei  $q_1$  nicht-zyklisch,  $q_j$  für  $j > 1$  zyklisch. Dann folgt nach (5.118)

$$p_j = \frac{\partial W}{\partial q_j} = \alpha_j = \text{const}, \quad j > 1. \quad (5.128)$$

Welcher Ansatz für  $W$  ist hier sinnvoll? Nach Konstruktion erzeugt  $W$  eine Transformation auf ausnahmslos zyklische neue Koordinaten.  $q_2, \dots, q_s$  sind aber bereits zyklisch. Für diese sollte  $W$  die identische Transformation (5.71)

$$F_2(\vec{q}, \vec{P}) = \sum_{j=2}^s q_j P_j,$$

sein. Mit  $P_j = \alpha_j$  bietet sich als Ansatz für  $W$  an:

$$W = W_1(q_1) + \sum_{j=2}^s q_j P_j. \quad (5.129)$$

Die HJD (5.120) wird damit zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung für  $W_1$

$$H \left( q_1, \frac{dW_1}{dq_1}, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_s \right) = E. \quad (5.130)$$

Gleichung (5.130) lässt sich verallgemeinern, so dass man generell *jede* zyklische Koordinate  $q_i$  durch einen Ansatz der Form

$$W = \bar{W} \left( q_{j,j \neq i} \mid \vec{P} \right) + \alpha_i q_i \quad (5.131)$$

separiert.

Für nicht-zyklische Koordinaten gibt es kein allgemeines Verfahren zur Separation.

### 5.6.1 Beispiel: Ebene Bewegung eines Teilchens im Zentralfeld

Zentralfeld bedeutet für das Potential  $V(\vec{r}) = V(r)$ . Generalisierte Koordinaten sind hier die Kugelkoordinaten, wobei die ebene Bewegung für  $\theta = \text{const.}$  sorgt (vergl. Kap. 4.2). Es bleiben also

$$q_1 = r, \quad q_2 = \phi. \quad (5.132)$$

Wir stellen zunächst die Hamilton-Funktion  $H$  auf. Aus der Lagrange-Funktion der Relativbewegung (4.18)

$$L = \frac{\mu}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right) - V(r)$$

erhalten wir für die konjugierten Impulse

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \mu \dot{r}, \quad \dot{r} = \frac{p_r}{\mu}$$

und

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \mu r^2 \dot{\phi}, \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{\mu r^2}$$

und erhalten nach Gleichung (5.8)

$$\begin{aligned} H &= \sum_j p_j \dot{q}_j - L = p_r \dot{r} + p_\phi \dot{\phi} - L = \frac{p_r^2}{\mu} + \frac{p_\phi^2}{\mu r^2} - \left( \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{p_\phi^2}{2\mu r^2} - V(r) \right) \\ &= \frac{1}{2\mu} \left[ p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} \right] + V(r). \end{aligned} \quad (5.133)$$

Die Koordinate  $\phi$  ist zyklisch und damit ist  $p_\phi = \alpha_\phi = l = \text{const.}$  (vergl. Gleichung (4.19)). Nach Gleichung (5.131) wählen wir für die charakteristische Funktion  $W$  den Ansatz

$$W = W_1(r) + \alpha_\phi \phi. \quad (5.134)$$

Weil  $(\partial H / \partial t) = 0$  und ferner die Zwangsbedingung (Bewegung in der Ebene) skleronom ist, lautet die zu lösende HJD (5.120)

$$\frac{1}{2\mu} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 \right] + V(r) = E,$$

## 5 Hamilton-Mechanik

wobei  $E$  die Gesamtenergie des Systems ist.  
Mit dem Ansatz (5.134) erhalten wir

$$\frac{1}{2\mu} \left[ \left( \frac{dW_1}{dr} \right)^2 + \frac{\alpha_\phi^2}{r^2} \right] + V(r) = E,$$

so dass

$$\frac{dW_1}{dr} = \left[ 2\mu(E - V(r)) - \frac{\alpha_\phi^2}{r^2} \right]^{1/2}$$

und

$$W = \alpha_\phi \phi + \int dr \left[ 2\mu(E - V(r)) - \frac{\alpha_\phi^2}{r^2} \right]^{1/2}. \quad (5.135)$$

Gemäß Gleichung (5.94) sind die neuen Koordinaten konstant  $Q_j = \beta_j$ . Gleichzeitig gilt die Transformation (5.119), so dass

$$Q_j = \beta_j = \frac{\partial W}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial E}{\partial \alpha_j} t. \quad (5.136)$$

Identifizieren wir  $E = \alpha_1$  mit der zweiten Konstante des Systems, so folgt für  $j = 1$  aus Gleichung (5.136)

$$\beta_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial E}{\partial \alpha_1} t = \frac{\partial W}{\partial E} - t,$$

oder mit Gleichung (5.135)

$$t + \beta_1 = \int dr \frac{\mu}{\left[ 2\mu(E - V(r)) - \frac{\alpha_\phi^2}{r^2} \right]^{1/2}}. \quad (5.137)$$

Die Umkehrung dieser Gleichung liefert

$$r = r(t, \alpha_1, \alpha_\phi, \beta_1).$$

Für  $j = 2$  liefert Gleichung (5.136)

$$\beta_2 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_\phi} = \phi - \alpha_\phi \int dr \frac{1}{r^2 \left[ 2\mu(E - V(r)) - \frac{\alpha_\phi^2}{r^2} \right]^{1/2}}.$$

Mit  $\beta_2 = \phi_0$  und  $x = 1/r$  folgt

$$\phi = \phi_0 - \int \frac{dx}{\left[ \frac{2\mu}{l^2} (E - V(\frac{1}{x})) - x^2 \right]^{1/2}}. \quad (5.138)$$

Die Umkehrung dieser Gleichung liefert die Bahngleichung  $r = r(\phi)$ . Die Anfangsbedingungen legen die Konstanten  $\beta_1$ ,  $\phi_0$ ,  $E$  und  $l = \alpha_\phi$  fest.

### 5.6.2 Beispiel: Teilchen im Schwerfeld

Die Hamilton-Funktion  $H = T + V = E$  ist

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + mgz .$$

Die Koordinaten  $x$  und  $y$  sind zyklisch, so dass  $p_x = \alpha_x = \text{const.}$ ,  $p_y = \alpha_y = \text{const.}$  Nach Gleichung (5.131) wählen wir für die charakteristische Funktion  $W$  den Ansatz

$$W = W_1(z) + \alpha_x x + \alpha_y y$$

und erhalten für die HJD in diesem Fall

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{dW_1}{dz} \right)^2 + \alpha_x^2 + \alpha_y^2 \right] + mgz = E ,$$

$$\begin{aligned} \text{so dass } W_1(z) &= \int dz [2m(E - mgz) - \alpha_x^2 - \alpha_y^2]^{1/2} \\ &= -\frac{1}{3m^2g} [2m(E - mgz) - \alpha_x^2 - \alpha_y^2]^{3/2} \end{aligned}$$

$$\text{und } W = -\frac{1}{3m^2g} [2m(E - mgz) - \alpha_x^2 - \alpha_y^2]^{3/2} + \alpha_x x + \alpha_y y . \quad (5.139)$$

Wir setzen wieder  $E = \alpha_1$  und erhalten aus Gleichung (5.136) die drei Gleichungen

$$(a) \quad Q_1 = \beta_1 = \frac{\partial W}{\partial E} - t = -\frac{1}{mg} [2m(E - mgz) - \alpha_x^2 - \alpha_y^2]^{1/2} - t ,$$

$$(b) \quad Q_2 = \beta_2 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_x} = x + \frac{\alpha_x}{m^2g} [2m(E - mgz) - \alpha_x^2 - \alpha_y^2]^{1/2}$$

$$\text{und (c) } Q_3 = \beta_3 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_y} = y + \frac{\alpha_y}{m^2g} [2m(E - mgz) - \alpha_x^2 - \alpha_y^2]^{1/2} . \quad (5.140)$$

Die erste Gleichung (5.140a) liefert über

$$2mE - 2m^2gz - \alpha_x^2 - \alpha_y^2 = m^2g^2 (t + \beta_1)^2$$

die Beziehung

$$z(t) = -\frac{1}{2}g(t + \beta_1)^2 + \frac{2mE - (\alpha_x^2 + \alpha_y^2)}{2m^2g} . \quad (5.141)$$

Setzen wir dies in die Gleichungen (5.140b) und (5.140c) ein, folgt

$$x(t) = \beta_2 + \frac{\alpha_x}{m} (t + \beta_1) , y(t) = \beta_3 + \frac{\alpha_y}{m} (t + \beta_1) . \quad (5.142)$$

Als spezielle Anfangsbedingungen für  $t = 0$  wählen wir  $x(0) = y(0) = z(0)$  und  $p_x(0) = p_y(0) = p_z(0) = 0$ .

## 5 Hamilton-Mechanik

Gemäß Gleichung (5.118) folgt dann

$$p_x = \frac{\partial W}{\partial x} = \alpha_x = \text{const.} = p_0 ,$$

$$p_y = \frac{\partial W}{\partial y} = \alpha_y = \text{const.} = 0 ,$$

und

$$p_z = \frac{\partial W}{\partial z} = [2m(E - mgz) - \alpha_x^2 - \alpha_y^2]^{1/2}$$

$$= [2m(E - mgz) - p_0^2]^{1/2} .$$

Letztere Gleichung für  $z = 0$  liefert

$$0 = [2mE - p_0^2]^{1/2} ,$$

oder

$$E = \frac{p_0^2}{2m} .$$

Damit folgt

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$$

und die Bewegungsgleichungen (5.141)–(5.142) reduzieren sich auf

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 , \quad x(t) = \frac{p_0}{m}t , \quad y(t) = 0 . \quad (5.143)$$

## 5.7 Satz von Liouville

Der Satz von Liouville hat grundlegende Bedeutung für die statistische Mechanik, d.h. der Beschreibung von Systemen mit großer Teilchenanzahl  $\mathcal{O}(10^{23})$ . Der Satz macht Aussagen über das Verhalten der Teilchendichte im Phasenraum als Funktion der Zeit  $t$ .

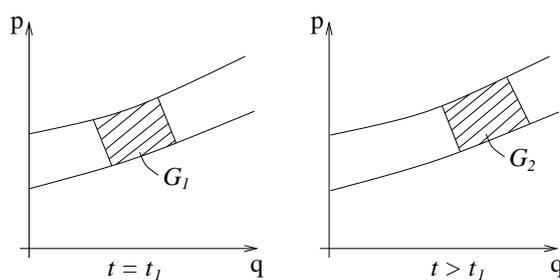


Abbildung 5.4: Bewegung eines Volumens im Phasenraum

Wie in Abb. 5.4 skizziert, betrachten wir die Lage von  $f$  Massenpunkten zur Zeit  $t_1$  in einem Gebiet  $G_1$  im  $2f$ -dimensionalen Phasenraum mit dem Volumen

$$\Delta V = \Delta q_1 \cdots \Delta q_f \Delta p_1 \cdots \Delta p_f .$$

Bezeichnen wir mit  $\Delta N$  die Anzahl der  $f$  Massenpunkte, dann gilt für die Teilchendichte

$$\rho = \frac{\Delta N}{\Delta V} .$$

Mit Ablauf der Bewegung entsprechend den Hamiltonschen-Bewegungsgleichungen (5.10)–(5.11) für alle  $f$  Teilchen transformiert sich das Gebiet  $G_1$  in das Gebiet  $G_2$ .

*Satz von Liouville: Das Volumen irgendeines beliebigen Gebiets des Phasenraums bleibt erhalten, wenn sich die Punkte seiner Bewegung entsprechend den kanonischen Gleichungen bewegen.*

Oder anders formuliert: *Die Dichte der Punkte im Phasenraum  $\rho$  in der Umgebung eines mitbewegten Punktes ist konstant.*

Beweis: Wir betrachten die Bewegung von Systempunkten durch ein Volumenelement des Phasenraums. Die Projektion des  $2f$ -dimensionalen Volumenelements auf die  $q_k - p_k$ -Ebene ist gleich der Fläche ABCD in Abb. 5.5.

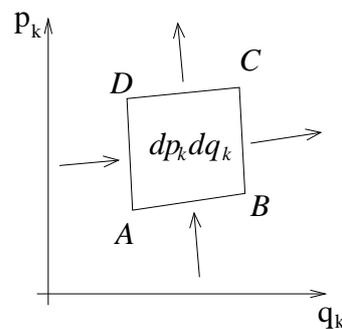


Abbildung 5.5: Zum Beweis des Satzes von Liouville

Der Fluss von Punkten durch die Seitenfläche, deren Projektion auf die  $q_k - p_k$ -Ebene gleich  $\overline{AD}$  ist, ist durch

$$\rho \dot{q}_k dp_k dV_k ,$$

gegeben, weil sich in Richtung  $q_k$  alle Punkte mit der Geschwindigkeit  $\dot{q}_k$  bewegen und  $dp_k dV_k$  die Größe der Seitenfläche ist. Dabei ist

$$dV_k = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq k}^f dq_\alpha dp_\alpha$$

das  $(2f - 2)$ -dimensionale Restvolumenelement.

Für den Fluss der bei  $\overline{BC}$  austretenden Punkte ergibt die Taylor-Entwicklung

$$\left[ \rho \dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial q_k} (\rho \dot{q}_k) dq_k \right] dp_k dV_k .$$

Analog berechnen wir den Fluss in  $p_k$ -Richtung:

$$\begin{aligned} \text{Eintritt durch } \overline{AB} &: \rho \dot{p}_k dq_k dV_k \\ \text{Austritt durch } \overline{CD} &: \left[ \rho \dot{p}_k + \frac{\partial}{\partial p_k} (\rho \dot{p}_k) dp_k \right] dq_k dV_k . \end{aligned}$$

Aus der Differenz der ein- und austretenden Flüsse berechnen wir die Anzahl der in dem Volumenelement vorhandenen Punkte zu

$$-dV \left[ \frac{\partial}{\partial q_k} (\rho \dot{q}_k) + \frac{\partial}{\partial p_k} (\rho \dot{p}_k) \right] .$$

Durch Summation über alle  $k = 1, \dots, f$  erhält man die Anzahl  $dV \partial \rho / \partial t$  der steckengebliebenen Punkte, also

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= - \sum_{k=1}^f \left[ \frac{\partial}{\partial q_k} (\rho \dot{q}_k) + \frac{\partial}{\partial p_k} (\rho \dot{p}_k) \right] \\ &= - \sum_{k=1}^f \left[ \frac{\partial \rho}{\partial q_k} \dot{q}_k + \rho \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} + \frac{\partial \rho}{\partial p_k} \dot{p}_k + \rho \frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} \right] . \end{aligned} \quad (5.144)$$

Mit den Hamiltonschen-Bewegungsgleichungen (5.10)–(5.11)

$$\begin{aligned} \dot{q}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k} , & \dot{p}_k &= - \frac{\partial H}{\partial q_k} \\ \text{folgt} & \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial p_k} , & \frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} &= - \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q_k} , \\ \text{so dass} & \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} &= 0 . \end{aligned}$$

Gleichung (5.144) reduziert sich dann auf

$$\sum_{k=1}^f \left[ \frac{\partial \rho}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \rho}{\partial p_k} \dot{p}_k \right] + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{dt} = 0 , \quad (5.145)$$

oder  $\rho = \text{const.}$  Q.E.D.

## 5.8 Integralinvarianten von Poincare

Kanonische Transformationen sind so definiert, dass die Form der kanonischen Bewegungsgleichungen bei der Transformation erhalten bleibt. Gibt es andere Ausdrücke, die gegenüber kanonischen Transformationen invariant sind? JA: die von Poincare gefundenen Integralinvarianten haben diese Eigenschaft.

Wir betrachten den  $2n$ -dimensionalen Phasenraum  $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ .

Satz von Poincare: Das Integral

$$J_1 = \int_S \int \sum_i dq_i dp_i = \int_S \int \sum_k dQ_k dP_k \quad (5.146)$$

ist gegenüber kanonischen Transformationen invariant, wobei  $S$  anzeigt, dass das Integral über eine beliebige 2-dimensionale Fläche im Phasenraum zu erstrecken ist.

Beweis:

Zwei Parameter  $u$  und  $v$  kennzeichnen die Lage eines Punktes auf der 2-dimensionalen Fläche  $S$  vollständig. Dort sei  $q_i = q_i(u, v)$ ,  $p_i = p_i(u, v)$ . Dann kann ein Flächenelement  $dq_i dp_i$  mithilfe der Jacobi-Determinante

$$\frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial u} & \frac{\partial p_i}{\partial u} \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} & \frac{\partial p_i}{\partial v} \end{vmatrix}. \quad (5.147)$$

auf ein Flächenelement  $dudv$  transformiert werden:

$$dq_i dp_i = \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} dudv.$$

Somit ist die Behauptung (5.146) äquivalent zu

$$\int_S \int \sum_i \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} dudv = \int_S \int \sum_k \frac{\partial(Q_k, P_k)}{\partial(u, v)} dudv.$$

Da das Integrationsgebiet  $S$  beliebig ist, können die Integrale nur dann gleich sein, wenn die Integranden identisch sind

$$\sum_i \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} dudv = \sum_k \frac{\partial(Q_k, P_k)}{\partial(u, v)} dudv.$$

Wir fassen die kanonische Transformation von den  $(q, p)$  zu den  $(Q, P)$  so auf, als hätten wir sie aus einer Erzeugenden vom Typ  $F_2(q, P, t)$  erhalten. Mit Gleichung (5.63)  $p_i = \partial F_2 / \partial q_i$  ist

$$\frac{\partial p_i}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial q_i} \right).$$

Die Größe in der Klammer ist wegen ihrer Argumente  $q$  und  $P$  eine Funktion von  $u$  und wir erhalten

$$\frac{\partial p_i}{\partial u} = \sum_k \frac{\partial^2 F_2(q, P, t)}{\partial q_i \partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial u} + \sum_k \frac{\partial^2 F_2(q, P, t)}{\partial q_i \partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial u}.$$

Ebenso gilt

$$\frac{\partial p_i}{\partial v} = \sum_k \frac{\partial^2 F_2(q, P, t)}{\partial q_i \partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial v} + \sum_k \frac{\partial^2 F_2(q, P, t)}{\partial q_i \partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial v}.$$

## 5 Hamilton-Mechanik

Damit erhalten wir mit (5.147) mit den Rechenregeln für Determinanten (2 Summanden, Faktoren in einer Spalte herausziehen)

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} &= \sum_i \left| \begin{array}{c} \frac{\partial q_i}{\partial u} \sum_k \frac{\partial^2 F_2(q, P, t)}{\partial q_i \partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial u} + \sum_k \frac{\partial^2 F_2(q, P, t)}{\partial q_i \partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial u} \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} \sum_k \frac{\partial^2 F_2(q, P, t)}{\partial q_i \partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial v} + \sum_k \frac{\partial^2 F_2(q, P, t)}{\partial q_i \partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial v} \end{array} \right| \\ &= \sum_i \sum_k \frac{\partial^2 F_2(q, P, t)}{\partial q_i \partial P_k} \left| \begin{array}{c} \frac{\partial q_i}{\partial u} \quad \frac{\partial P_k}{\partial u} \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} \quad \frac{\partial P_k}{\partial v} \end{array} \right| \\ &\quad + \sum_i \sum_k \frac{\partial^2 F_2(q, P, t)}{\partial q_i \partial q_k} \left| \begin{array}{c} \frac{\partial q_i}{\partial u} \quad \frac{\partial q_k}{\partial u} \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} \quad \frac{\partial q_k}{\partial v} \end{array} \right|. \end{aligned}$$

Die Terme der zweiten Reihe sind antisymmetrisch bezüglich der Vertauschung der Indizes  $i$  und  $k$ , da dabei die zwei Spalten der Determinante vertauscht werden. Der Wert der Summe darf aber nicht durch Vertauschen der Indizes beeinflusst werden; demnach muss die zweite Reihe identisch verschwinden. Wir dürfen an ihre Stelle eine ähnlich konstruierte Reihe setzen, deren Summe ebenfalls Null ist:

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} &= \sum_i \sum_k \frac{\partial^2 F_2(q, P, t)}{\partial q_i \partial P_k} \left| \begin{array}{c} \frac{\partial q_i}{\partial u} \quad \frac{\partial P_k}{\partial u} \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} \quad \frac{\partial P_k}{\partial v} \end{array} \right| \\ &\quad + \sum_i \sum_k \frac{\partial^2 F_2(q, P, t)}{\partial P_i \partial P_k} \left| \begin{array}{c} \frac{\partial p_i}{\partial u} \quad \frac{\partial P_k}{\partial u} \\ \frac{\partial p_i}{\partial v} \quad \frac{\partial P_k}{\partial v} \end{array} \right|. \end{aligned}$$

Die Operation der Entwicklung der Determinantensumme kann nun umgekehrt werden, allerdings soll in der Determinante jetzt die Summe über  $i$  und nicht über  $k$  gebildet werden. Z.B. in der 1. Spalte der Determinante tritt die Summe auf:

$$\sum_i \frac{\partial^2 F_2(q, P, t)}{\partial q_i \partial P_k} \frac{\partial q_i}{\partial u} + \sum_i \frac{\partial^2 F_2(q, P, t)}{\partial P_i \partial P_k} \frac{\partial p_i}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial F_2}{\partial P_k} \right) = \frac{\partial Q_k}{\partial u},$$

wobei wir im letzten Schritt Gleichung (5.64) benutzt haben. Damit reduziert sich die Determinantensumme auf

$$\sum_i \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} = \sum_k \left| \begin{array}{c} \frac{\partial Q_k}{\partial u} \quad \frac{\partial P_k}{\partial u} \\ \frac{\partial Q_k}{\partial v} \quad \frac{\partial P_k}{\partial v} \end{array} \right| = \sum_k \frac{\partial(Q_k, P_k)}{\partial(u, v)}$$

Q.E.D.

Auf ähnliche Weise – der Beweis ist jedoch komplizierter – kann man die Invarianz von

$$J_2 = \int \int_S \int \int \sum_{i,k} dq_i dp_i dq_k dp_k$$

bei kanonischer Transformation zeigen, wobei  $S$  eine beliebige vierdimensionale Fläche des  $2n$ -dimensionalen Phasenraums ist. Diese Kette von Integralinvarianten kann schließlich erweitert werden auf die Invarianz von

$$J_n = \int \cdots \int dq_1 \cdots dq_n dp_1 \cdots dp_n,$$

### 5.8 Integralinvarianten von Poincare

wobei das Integral über ein beliebiges Gebiet des Phasenraums ausgedehnt werden kann. Die Invarianz von  $J_n$  ist der Feststellung gleichwertig, dass das Volumen im Phasenraum gegenüber kanonischen Transformationen invariant ist. Daraus folgt, dass das Volumen im Phasenraum zeitlich konstant ist, da wir die zeitliche Entwicklung durch infinitesimale kanonische Transformationen darstellen können (für mehr Details siehe Goldstein, Kap. 8.6).



# 6 Bewegung des starren Körpers

## 6.1 Kinematik

Bisher haben wir nur die Bewegung von diskreten Massenpunkten betrachtet. Hier untersuchen wir jetzt Körper mit bestimmter, nicht vernachlässigbarer Ausdehnung.

Wir denken uns einen solchen Körper als ein System von Massenpunkten, wobei die Anzahl der Massenpunkte sehr groß ist. Des Weiteren sollen sich die Körper nicht deformieren lassen, so dass die Abstände zwischen den einzelnen Massenpunkten konstant sind. Es gelten also die Zwangsbedingungen

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_k| = c_{ik} = \text{const} . \quad (6.1)$$

Damit ist auch die Oberfläche des Körpers *starr*, was die Bezeichnung starrer Körper rechtfertigt.

Dreht man einen starren Körper, so ändert er im Gegensatz zum Massenpunkt seine Lage. Also muss man zur vollständigen Beschreibung eines Körpers im Raum auch seine Orientierung angeben. Es stellt sich die Frage: wie viele Koordinaten beschreiben die Lage eines starren Körpers vollständig? Wie viele Freiheitsgrade besitzt der starre Körper?

Die Lage eines starren Körpers wird durch die Ortsvektoren dreier fester Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, vollständig beschrieben:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1(t) &= (x_1(t), y_1(t), z_1(t)) , \\ \vec{r}_2(t) &= (x_2(t), y_2(t), z_2(t)) , \\ \vec{r}_3(t) &= (x_3(t), y_3(t), z_3(t)) . \end{aligned} \quad (6.2)$$

Man braucht also 9 Koordinaten. Da es sich um einen starren Körper handelt, sind die Abstände der drei Punkte konstant und man hat zusätzlich nach Gleichung (6.1) noch die drei Bedingungen

$$\begin{aligned} |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| &= c_{12} , \\ |\vec{r}_1 - \vec{r}_3| &= c_{13} , \\ |\vec{r}_2 - \vec{r}_3| &= c_{23} . \end{aligned} \quad (6.3)$$

Dadurch wird die Anzahl der Freiheitsgrade auf  $f = 9 - 3 = 6$  eingeschränkt. Sechs Koordinaten reichen zur Beschreibung vollständig aus: drei beschreiben die Translation eines Massenpunktes des starren Körpers, drei zur Rotation um diesen Punkt (Theorem von Chasles). Welche Wahl der sechs Koordinaten ist zweckmäßig? Wir erinnern uns, dass zyklische Koordinaten auf Erhaltungssätze führen und damit die Bewegungsgleichungen vereinfachen. Die *Translationsbewegung* des starren Körpers lässt sich durch die Koordinaten des Ortsvektors  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  eines beliebigen festen Punktes des starren Körpers wiedergeben. Eine spezielle

## 6 Bewegung des starren Körpers

Wahl dieser drei Koordinaten ist der Schwerpunktvektor  $\vec{R} = \vec{R}(t)$ , der die Translations- und Rotationsbewegung entkoppelt, wie im Kap. 4.1 für das Zwei-Körper-Problem gezeigt wurde.

Jetzt muss noch durch die restlichen drei Koordinaten die Orientierung des Körpers im Raum wiedergegeben werden. Man führt hierzu ein körperfestes Koordinatensystem ein, indem man an den ausgezeichneten Punkt des starren Körpers (z.B. Schwerpunkt) gedanklich ein Koordinatensystem anheftet. Dieses soll alle Bewegungen des starren Körpers mit ausführen (siehe Abb. 6.1).

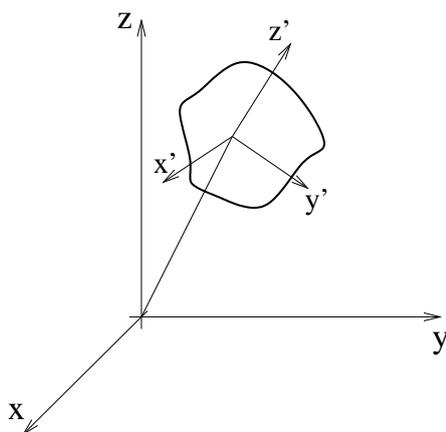


Abbildung 6.1: Raumfestes und körperfestes Koordinatensystem

Durch die Beschreibung der Bewegung des körperfesten Koordinatensystems im raumfesten Koordinatensystem wird dann die Rotationsbewegung des starren Körpers wiedergegeben. Im Folgenden gehen wir davon aus, dass der Ursprung des körperfesten Koordinatensystems und des raumfesten Koordinatensystems zusammenfallen (siehe Abb. 6.2), d.h. wir betrachten nur noch die Drehung des Körpers, so dass sich die Anzahl der Freiheitsgrade auf drei reduziert.

Die Lage eines beliebigen Massenpunktes des starren Körpers  $P$  lässt sich in beiden Koordinatensystemen angeben:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \quad , \quad \vec{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3) \quad . \quad (6.4)$$

Da der tatsächliche Vektor unverändert bleibt, egal in welchem Koordinatensystem man seine Komponenten angibt, muss der Betrag des Vektors in beiden Systemen derselbe sein:

$$|\vec{x}'|^2 = \sum_{i=1}^3 x_i'^2 = |\vec{x}|^2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2 \quad . \quad (6.5)$$

Durch die Transformationsmatrix  $A = (a_{ik})$  lassen sich die Koordinaten im raumfesten System in die Koordinaten im körperfesten System überführen:

$$\vec{x}' = A\vec{x} \quad . \quad (6.6)$$

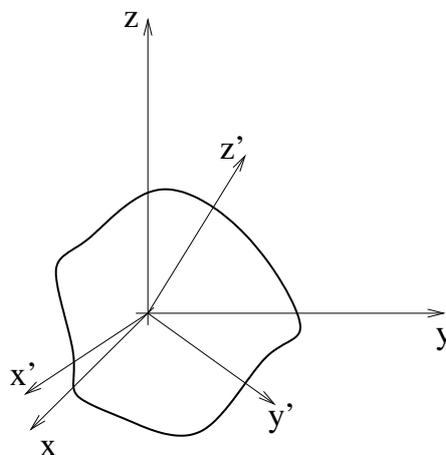


Abbildung 6.2: Raumfestes und körperfestes Koordinatensystem mit gemeinsamem Koordinatenursprung

oder komponentenweise

$$x'_i = \sum_{k=1}^3 a_{ik} x_k, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.7)$$

Damit erhalten wir für Gleichung (6.5)

$$\sum_{i=1}^3 x_i'^2 = \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \right) \left( \sum_{k=1}^3 a_{ik} x_k \right) = \sum_{j=1}^3 \left( \sum_{k=1}^3 \left( \sum_{i=1}^3 a_{ij} a_{ik} \right) x_k \right) x_j = \sum_{j=1}^3 x_j^2.$$

Diese Gleichung ist nur erfüllt, wenn

$$\sum_{i=1}^3 a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2, 3. \quad (6.8)$$

ist. Transformationen mit dieser Eigenschaft heißen *orthogonale Transformationen*.

Das Vertauschen der Indizes  $k$  und  $j$  in dieser Herleitung führt auf dieselbe Gleichung. Deshalb führen die neun Gleichungen (6.8) auf sechs Bedingungen für die Wahl der Matrixelemente  $a_{ij}$ . Damit bleiben drei Parameter übrig, um die Orientierung des körperfesten Koordinatensystems im raumfesten Koordinatensystem anzugeben, z.B. die drei Eulerschen Winkel (siehe Kap. 6.7).

Der einfachste Fall einer Drehung ist die ebene Rotation (vergl. Kap. 1.5). Dreht man den starren Körper z.B. um die raumfeste Achse  $\vec{e}_3$ , so gilt  $x'_3 = x_3$  und  $x'_1$  und  $x'_2$  müssen aus dem Drehwinkel  $\phi$  bestimmt werden. In diesem Fall ist nach Gleichung (1.30)

$$A = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

## 6 Bewegung des starren Körpers

Eine konkrete Wahl der drei die Rotation eines starren Körpers beschreibenden Koordinaten wären die Drehwinkel um die drei festen Raumachsen. Jeder dieser drei Drehungen wird durch eine Matrix der Form (6.9) beschrieben. Drehungen, bzw. die zugehörigen Matrixmultiplikationen, sind aber im Allgemeinen nicht kommutativ, so dass es auf die Reihenfolge der Drehungen ankommt. Deshalb betrachten wir zunächst Drehungen, die sich als kommutativ erweisen werden.

### 6.2 Infinitesimale Drehungen

Wir betrachten die Verknüpfung zweier Drehungen, die durch die Drehmatrizen  $A$  und  $B$  wiedergegeben werden:

$$\vec{a} = A\vec{x}, \quad \vec{b} = B\vec{x}.$$

Die zwei Möglichkeiten der Reihenfolge  $\vec{c}_1 = BA\vec{x}$  und  $\vec{c}_2 = AB\vec{x}$  sind für endliche Drehungen im Allgemeinen verschieden  $\vec{c}_1 \neq \vec{c}_2$ , wie man am Beispiel einer Streichholzsachtel, die man in verschiedener Reihenfolge um 2 raumfeste Achsen jeweils um neunzig Grad dreht, leicht feststellt (Abb. 6.3).

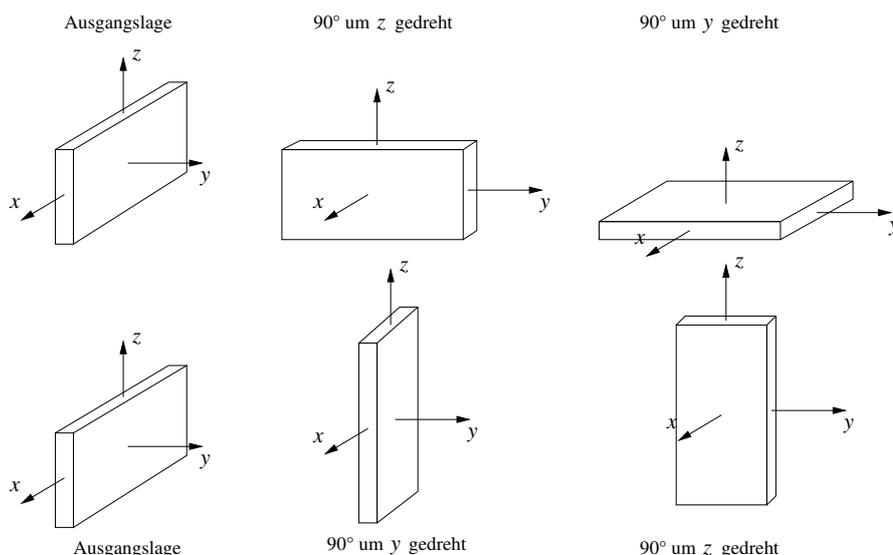


Abbildung 6.3: Endliche Drehungen eines starren Körpers

Für die Transformation einer Koordinate gilt nach Gleichung (6.7)

$$x'_i = \sum_{k=1}^3 a_{ik} x_k. \quad (6.10)$$

Wir betrachten den Fall, dass es sich bei den Matrizen  $A$  und  $B$  jeweils um eine *nahezu identische Transformation* handelt, d.h.

$$a_{ik} = \delta_{ik} + \epsilon_{ik}, \quad (6.11)$$

wobei  $\epsilon_{ik}$  infinitesimal klein sein soll. Damit folgt für (6.10)

$$x'_i = \sum_{k=1}^3 (\delta_{ik} + \epsilon_{ik}) x_k \quad (6.12)$$

und somit 
$$\vec{x}' = (I + E) \vec{x}, \quad (6.13)$$

wobei 
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.14)$$

die Matrix der identischen Abbildung ist, und  $E$  eine Matrix mit infinitesimalen Einträgen ist.

Wir zeigen jetzt, dass solche infinitesimalen Drehungen kommutativ sind: mit  $A = I + E_1$  und  $B = I + E_2$  folgt

$$\begin{aligned} BA\vec{x} &= (I + E_2)(I + E_1)\vec{x} = (I + E_2 + E_1 + E_2E_1)\vec{x} = \vec{c}_1 \\ AB\vec{x} &= (I + E_1)(I + E_2)\vec{x} = (I + E_1 + E_2 + E_1E_2)\vec{x} = \vec{c}_2. \end{aligned}$$

Da es sich um infinitesimale Drehungen handelt, vernachlässigen wir Terme höherer als 1. Ordnung in  $E_1$  und  $E_2$ , so dass

$$\vec{c}_2 = (I + E_1 + E_2)\vec{x} = \vec{c}_1, \quad (6.15)$$

also sind infinitesimale Drehungen kommutativ.

$A^{-1} = I - E_1$  ist die zu  $A = I + E_1$  inverse Drehung, denn

$$AA^{-1} = (I + E_1)(I - E_1) = I + E_1 - E_1 - E_1E_1 = I. \quad (6.16)$$

Für die infinitesimale Drehung um die  $\vec{e}_3$ -Achse erhalten wir aus Gleichung (6.9) für kleine  $\phi = d\phi_3 \ll 1$  mit  $\cos \phi \simeq 1$  und  $\sin \phi \simeq d\phi_3$

$$\begin{aligned} A = I + E_3 &= \begin{pmatrix} 1 & d\phi_3 & 0 \\ -d\phi_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{so dass} \quad E_3 &= \begin{pmatrix} 0 & d\phi_3 & 0 \\ -d\phi_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = d\phi_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Diese Matrix ist antisymmetrisch ( $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$ ). Es lässt sich zeigen, dass die Matrix jeder infinitesimalen Drehung antisymmetrisch ist.

Die Matrizen für die infinitesimale Drehung um die  $\vec{e}_1$ - bzw.  $\vec{e}_2$ -Achse haben die Form

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d\phi_1 \\ 0 & -d\phi_1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -d\phi_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ d\phi_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.18)$$

## 6 Bewegung des starren Körpers

Dabei vertauschen sich die Vorzeichen je nach Definition der Richtung der Drehung um die jeweilige Achse.

Eine allgemeine infinitesimale Drehung wird durch die Matrix

$$(I + E_1)(I + E_2)(I + E_3) = \begin{pmatrix} 1 & d\phi_3 & -d\phi_2 \\ -d\phi_3 & 1 & d\phi_1 \\ d\phi_2 & -d\phi_1 & 1 \end{pmatrix} \equiv I + E. \quad (6.19)$$

beschrieben, also ist

$$E = \begin{pmatrix} 0 & d\phi_3 & -d\phi_2 \\ -d\phi_3 & 0 & d\phi_1 \\ d\phi_2 & -d\phi_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

eine Matrix mit insgesamt drei Parametern  $d\phi_1$ ,  $d\phi_2$  und  $d\phi_3$ . Kann man diese zu einem Vektor zusammenfassen? Dazu betrachten wir den Vektor  $\vec{x}$  nach einer infinitesimalen Drehung:  $\vec{x}' = (I + E)\vec{x}$  und berechnen die Änderung des Vektors  $d\vec{x} = \vec{x}' - \vec{x} = (I + E)\vec{x} - \vec{x} = E\vec{x}$ , d.h.

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & d\phi_3 & -d\phi_2 \\ -d\phi_3 & 0 & d\phi_1 \\ d\phi_2 & -d\phi_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 d\phi_3 - x_3 d\phi_2 \\ -x_1 d\phi_3 + x_3 d\phi_1 \\ x_1 d\phi_2 - x_2 d\phi_1 \end{pmatrix} = \vec{x} \times d\vec{\Omega}, \quad (6.21)$$

d.h.  $d\vec{x} = \vec{x} \times d\vec{\Omega}$  kann als Kreuzprodukt von  $\vec{x}$  mit  $d\vec{\Omega}$  dargestellt werden, wobei

$$d\vec{\Omega} \equiv \begin{pmatrix} d\phi_1 \\ d\phi_2 \\ d\phi_3 \end{pmatrix}. \quad (6.22)$$

$d\vec{\Omega}$  ist ein "Pseudovektor", da er für Spiegelungstransformationen invariant ist (Beweis siehe Goldstein, Kap. 4.7).

Betrachten wir als Beispiel noch einmal die Drehung um die  $\vec{e}_3$ -Achse (siehe Abb. 6.4). Mit  $d\vec{\Omega} = (0, 0, d\phi_3)$  folgt

$$d\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \times (0, 0, d\phi_3) = (x_2 d\phi_3, -x_1 d\phi_3, 0).$$

Mit  $x_1 = \rho \sin \phi_3$ ,  $x_2 = \rho \cos \phi_3$  folgt

$$|d\vec{x}| = \sqrt{\rho^2 \cos^2 \phi_3 d\phi_3^2 + \rho^2 \sin^2 \phi_3 d\phi_3^2} = \rho d\phi_3.$$

Damit haben wir nachträglich Gleichung (3.214) zur Darstellung infinitesimaler Drehungen bewiesen.

Wir betrachten jetzt die infinitesimale Bewegung eines beliebigen Vektors  $\vec{G}$  im körperfesten Koordinatensystem. Gemäß unseren Ausführungen in Kap. 6.1 setzt sich diese zusammen aus der Bewegung des Körpers im raumfesten System und der Änderung der Koordinaten von  $\vec{G}$  aufgrund der Drehung der Körperachsen:

$$\left( d\vec{G} \right)_{\text{körperfest}} = \left( d\vec{G} \right)_{\text{raumfest}} + \left( d\vec{G} \right)_{\text{rot}}. \quad (6.23)$$

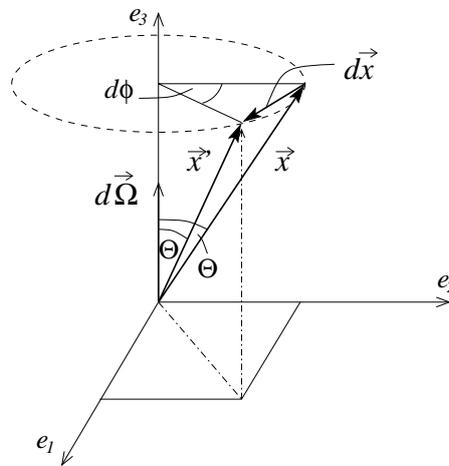


Abbildung 6.4: Infinitesimale Drehung um die  $\vec{e}_3$ -Achse

Die Änderung der Komponenten von  $\vec{G}$  aufgrund der infinitesimalen Koordinatendrehung beträgt analog zu Gleichung (6.21)

$$\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{\text{rot}} = \vec{G} \times d\vec{\Omega}, \quad (6.24)$$

so dass

$$\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{\text{raumfest}} = \left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{\text{körperfest}} + d\vec{\Omega} \times \vec{G}. \quad (6.25)$$

Für die Änderung des Vektors  $\vec{G}$  erhalten wir damit die Beziehung

$$\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{\text{raumfest}} = \left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{\text{körperfest}} + \vec{\omega} \times \vec{G}, \quad (6.26)$$

mit der *Winkelgeschwindigkeit des Körpers*

$$\vec{\omega} \equiv \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \left(\frac{d\Omega_1}{dt}, \frac{d\Omega_2}{dt}, \frac{d\Omega_3}{dt}\right) = \left(\frac{d\phi_1}{dt}, \frac{d\phi_2}{dt}, \frac{d\phi_3}{dt}\right). \quad (6.27)$$

Da der Vektor  $\vec{G}$  beliebig ist, können wir Gleichung (6.26) auch als Operatorgleichung

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{raumfest}} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{körperfest}} + \vec{\omega} \times . \quad (6.28)$$

schreiben. Wenden wir diese Operatorgleichung auf die Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  selbst an, so folgt

$$\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{\text{raumfest}} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{\text{körperfest}}. \quad (6.29)$$

### 6.3 Scheinkräfte

*Scheinkräfte* sind Kräfte, die ein Körper im rotierenden Bezugssystem zusätzlich zu den äußeren Kräften erfährt. Aufgrund der Erddrehung ist die Erdoberfläche ein Beispiel für ein rotierendes System.

Wenden wir die Operatorgleichung (6.28) auf den Ortsvektor  $\vec{r}$  an, so erhalten wir für die Geschwindigkeit im raumfesten Koordinatensystem

$$\vec{v}_R = \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)_R = \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)_K + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}_K + \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (6.30)$$

wobei die Indizes  $R$  für das raumfeste und  $K$  für das körperfeste (d. h. rotierende) Koordinatensystem stehen.

Wenden wir die Operatorgleichung (6.28) nochmals auf  $\vec{v}_R$  an, so folgt für die Beschleunigung

$$\vec{a}_R = \left( \frac{d\vec{v}_R}{dt} \right)_R = \left( \frac{d\vec{v}_R}{dt} \right)_K + \vec{\omega} \times \vec{v}_R$$

und nach Einsetzen von Gleichung (6.30)

$$\begin{aligned} \vec{a}_R &= \left( \frac{d\vec{v}_K}{dt} \right)_K + \left( \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{r}) \right)_K + \vec{\omega} \times \vec{v}_K + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= \vec{a}_K + \left( \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_K \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)_K + \vec{\omega} \times \vec{v}_K + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \end{aligned}$$

$$\text{also} \quad \vec{a}_R = \vec{a}_K + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_K + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (6.31)$$

Für die äußere Kraft gilt im raumfesten Inertialsystem  $\vec{F}_R = m\vec{a}_R$ ; also erhalten wir mit Gleichung (6.31)

$$\vec{F}_R = m\vec{a}_K + m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_K + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (6.32)$$

Der mit dem körperfesten System mitbewegte Beobachter misst also die Kraft

$$\begin{aligned} \vec{F}_K &= m\vec{a}_K = \vec{F}_R - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_K - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= \vec{F}_R + \vec{F}_{\text{Bahnbeschleunigung}} + \vec{F}_{\text{Coriolis}} + \vec{F}_{\text{Zentrifugal}}, \end{aligned} \quad (6.33)$$

wobei wir drei verschiedene *Scheinkräfte* oder *Trägheitskräfte* einführen:

$$\vec{F}_{\text{Bahnbeschleunigung}} \equiv -m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}, \quad (6.34)$$

$$\vec{F}_{\text{Coriolis}} \equiv -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_K, \quad (6.35)$$

$$\vec{F}_{\text{Zentrifugal}} \equiv -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (6.36)$$

Die Scheinkräfte auf der Erdoberfläche können oft vernachlässigt werden, weil der Betrag der Winkelgeschwindigkeit der Erde mit  $T = 24$  Stunden = 86400 s

$$\omega_{\text{Erde}} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86400} = 7.27 \cdot 10^{-5} \quad \text{s}^{-1} \quad (6.37)$$

klein ist.

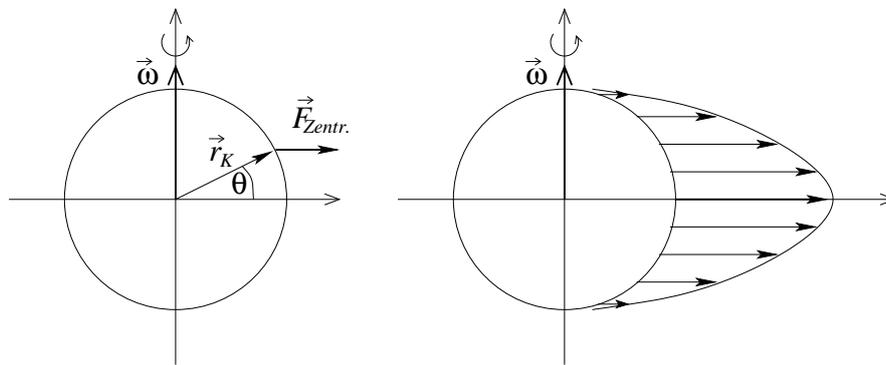


Abbildung 6.5: Zur Zentrifugalkraft auf der Erde

- (a) Die Bahnbeschleunigungskraft (6.34) resultiert aus einer zeitlichen Änderung der Winkelgeschwindigkeit im rotierenden System.
- (b) Die Zentrifugalkraft (6.36) steht senkrecht auf der Drehachse und wirkt radial nach außen. Für das Beispiel der Erdoberfläche ist in Abb. 6.5 die Richtung der Zentrifugalkraft skizziert. Mit dem körperfesten Koordinatensystem auf der Erdoberfläche finden wir in Abhängigkeit vom Breitengrad  $\theta$  für den Betrag der Zentrifugalkraft:

$$\left| \vec{F}_{\text{Zentrifugal}} \right| = m\omega^2 r \cos \theta . \quad (6.38)$$

Diese ist also am Äquator ( $\theta = 0$ ) am stärksten. Für die maximale Zentrifugalbeschleunigung ergibt sich mit  $r_K = 6370$  km und Gleichungen (6.37)–(6.38)

$$\left| \vec{a}_{\text{Zentrifugal, max}} \right| = \omega^2 r = (7.27 \cdot 10^{-5})^2 (6.37 \cdot 10^6) = 0.034 \frac{m}{s^2} = 3.4 \frac{cm}{s^2} , \quad (6.39)$$

der mit dem Wert der Gravitationsbeschleunigung  $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$  zu vergleichen ist.

Die Breitenwinkelabhängigkeit (6.38) der Zentrifugalkraft führt zur Abplattung der Erde.

- (c) Die Corioliskraft (6.35) tritt erst bei Bewegung ( $v_K \neq 0$ ) der Masse  $m$  im rotierenden Koordinatensystem auf. Sie steht senkrecht zur Drehachse  $\vec{\omega}$  und senkrecht zur Bewegungsrichtung  $\vec{v}_K$  der Masse.

Bewegt sich die Masse entlang eines Längengrads auf der Erdoberfläche, so bewirkt die Corioliskraft auf der Nordhalbkugel eine Rechtsabweichung und auf der Südhalbkugel eine Linksabweichung (siehe Abb. 6.6).

Der Betrag der Corioliskraft

$$\left| \vec{F}_{\text{Coriolis}} \right| = 2mv_K\omega |\sin \theta| \quad (6.40)$$

verschwindet am Äquator und hat an den Polen sein Maximum.

6 Bewegung des starren Körpers

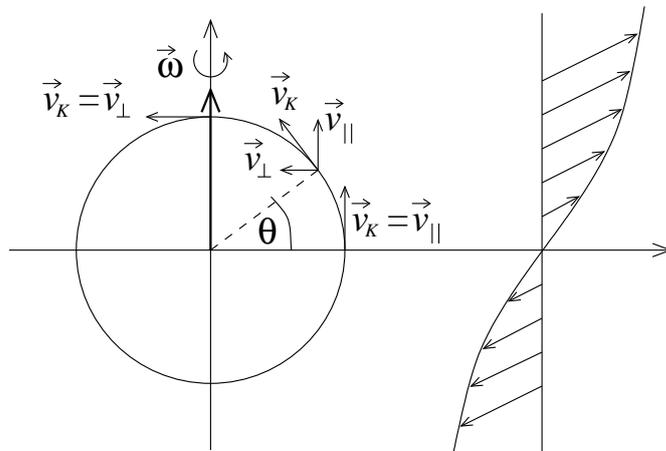


Abbildung 6.6: Zur Wirkung der Corioliskraft bei Massenbewegung entlang eines Längengrades auf der Erde

Bewegt sich die Masse entlang eines Breitengrads auf der Erdoberfläche, so ist die Coriolisbeschleunigung zur Zentrifugalbeschleunigung parallel gerichtet. Falls sich die Masse dabei entgegengesetzt zur Rotationsrichtung bewegt (siehe Abb. 6.7), so gilt für die Summe der Beschleunigungswerte

$$a = a_{\text{Zentrifugal}} + a_{\text{Coriolis}} = \omega^2 r \cos \theta - 2\omega v_K = \omega r \cos \theta \left( \omega - \frac{2v_K}{r \cos \theta} \right). \quad (6.41)$$

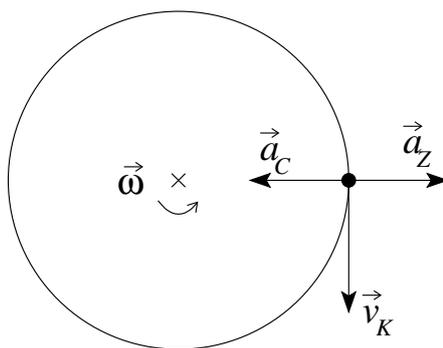


Abbildung 6.7: Zur Wirkung der Corioliskraft bei Massenbewegung entlang eines Breitengrades entgegengesetzt zur Rotationsrichtung der Erde

## 6.4 Trägheitstensor und Hauptachsentransformation

Zur Bestimmung der Bewegungsgleichungen des starren Körpers ist es hilfreich, den sogenannten *Trägheitstensor* einzuführen. Dazu erinnern wir uns, dass der Drehimpuls  $\vec{L}_i$  eines Massenpunktes  $m_i$  bezüglich des Koordinatenursprungs durch

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

definiert ist. Hat man ein System von  $N$  Massenpunkten, so ist der Gesamtdrehimpuls

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) . \quad (6.42)$$

### 6.4.1 Trägheitstensor

Gemäß unserer Diskussion in Kap. 6.1 und 6.3 ist jede Bewegung des starren Körpers zusammengesetzt aus der Translation des Schwerpunkts und der Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$ . Setzen wir das körperfeste Koordinatensystem mit dem Schwerpunktsystem gleich, so gilt nach Gleichung (6.30) für die Geschwindigkeit des  $i$ -ten Massenpunktes

$$\vec{v}_{i,R} = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i , \quad (6.43)$$

wobei  $\vec{V}$  die Translationsgeschwindigkeit des Schwerpunkts des Systems ist. Für die gesamte kinetische Energie des Systems von  $N$  Massenpunkten erhalten wir dann

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_{i,R}^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i V^2 + \sum_{i=1}^N m_i \vec{V} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 . \end{aligned}$$

Mit der Spatproduktregel (1.24)

$$\vec{V} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \vec{r}_i \cdot (\vec{V} \times \vec{\omega})$$

finden wir, dass der zweite Term aufgrund der Schwerpunktbedingung (siehe Kap. 3.12.2) verschwindet, d. h.

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{V} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = (\vec{V} \times \vec{\omega}) \cdot \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = 0 .$$

## 6 Bewegung des starren Körpers

Damit setzt sich die gesamte kinetische Energie aus zwei Anteilen zusammen

$$T = T_{trans} + T_{rot} , \quad (6.44)$$

mit 
$$T_{trans} = \frac{M}{2} V^2 \quad (6.45)$$

und 
$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 . \quad (6.46)$$

Wenden wir erneut die Spatproduktregel (1.24) auf die Rotationsanteile der kinetischen Energien an

$$(\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \vec{\omega} \cdot [\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)] ,$$

so folgt 
$$T_{rot} = \frac{\vec{\omega}}{2} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) . \quad (6.47)$$

Setzen wir gemäß Gleichung (6.43)  $\vec{v}_{i,K} = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$  in den Gesamtdrehimpuls (6.42) ein, so erhalten wir

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) . \quad (6.48)$$

Damit lässt sich Gleichung (6.47) schreiben als

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} . \quad (6.49)$$

Mit der Identität (1.22) für das dreifache Kreuzprodukt in der Gleichung (6.48) erhalten wir

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i [\vec{\omega} (\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})] . \quad (6.50)$$

Für die drei Komponenten folgen dann

$$\begin{aligned} L_x &= \sum_{i=1}^N m_i [\omega_x r_i^2 - x_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z)] \\ &= \sum_{i=1}^N m_i [(r_i^2 - x_i^2) \omega_x - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z] , \\ L_y &= \sum_{i=1}^N m_i [\omega_y r_i^2 - y_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z)] \\ &= \sum_{i=1}^N m_i [-x_i y_i \omega_x + (r_i^2 - y_i^2) \omega_y - y_i z_i \omega_z] , \\ L_z &= \sum_{i=1}^N m_i [\omega_z r_i^2 - z_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z)] \\ &= \sum_{i=1}^N m_i [-x_i z_i \omega_x - y_i z_i \omega_y + (r_i^2 - z_i^2) \omega_z] , \end{aligned}$$

## 6.4 Trägheitstensor und Hauptachsentransformation

lineare Abhängigkeiten von den Komponenten der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_i$ . Mit Hilfe des *Trägheitstensors*

$$\hat{\Theta} = \begin{pmatrix} \Theta_{xx} & \Theta_{xy} & \Theta_{xz} \\ \Theta_{yx} & \Theta_{yy} & \Theta_{yz} \\ \Theta_{zx} & \Theta_{zy} & \Theta_{zz} \end{pmatrix} \equiv \sum_{i=1}^N m_i \begin{pmatrix} r_i^2 - x_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & r_i^2 - y_i^2 & -z_i y_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & r_i^2 - z_i^2 \end{pmatrix} \quad (6.51)$$

schreibt sich Gleichung (6.50) dann kurz als

$$\vec{L} = \hat{\Theta} \vec{\omega}. \quad (6.52)$$

Da die Komponenten des Trägheitstensors reell und symmetrisch ( $\Theta_{ij} = \Theta_{ji}$ ) sind, kann die Matrix (6.51) durch eine Drehung des Koordinatensystems auf Diagonalgestalt gebracht werden:

$$\hat{\Theta} = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix}. \quad (6.53)$$

Die neuen Koordinatenachsen, die mit den Richtungen der Eigenvektoren dieser Matrix übereinstimmen, heißen *Hauptachsen* oder *Hauptträgheitsachsen*, die Diagonalelemente  $\Theta_i$  *Hauptträgheitsmomente*.

Geht man vom Vielteilchensystem zu einer kontinuierlichen Massenverteilung mit der Dichteverteilung  $\rho(\vec{r})$  über, so berechnen sich die Komponenten des Trägheitstensors in Analogie zu (6.51) aus

$$\Theta_{ij} = \int_V dV \rho(\vec{r}) (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j). \quad (6.54)$$

Als Beispiel zur Berechnung von Trägheitstensen betrachten wir einen homogenen ( $\rho = \text{const}$ ) Würfel der Masse  $M$  mit der Kantenlänge  $b$ , der mit einer Ecke im Ursprung liegt (siehe Abb. 6.8).

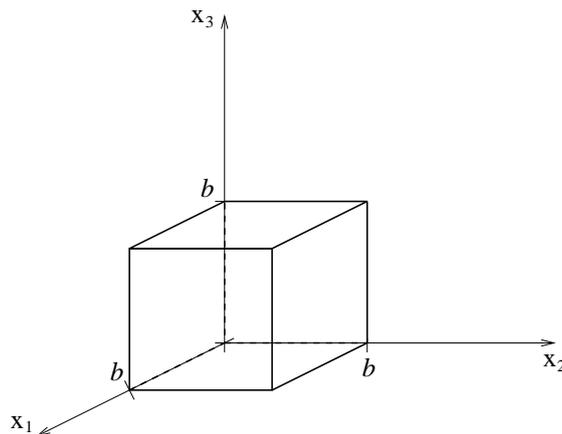


Abbildung 6.8: Homogener Würfel mit einer Ecke im Ursprung

## 6 Bewegung des starren Körpers

Nach Gleichung (6.54) erhalten wir für

$$\begin{aligned}\Theta_{11} &= \rho \int_0^b dx_3 \int_0^b dx_2 \int_0^b dx_1 [(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_1^2] \\ &= \rho \int_0^b dx_3 \int_0^b dx_2 \int_0^b dx_1 (x_2^2 + x_3^2) \\ &= \rho b \int_0^b dx_3 \int_0^b dx_2 (x_2^2 + x_3^2) \\ &= \rho b \int_0^b dx_3 \left( \frac{b^3}{3} + x_3^2 b \right) = \rho b \left( \frac{b^4}{3} + \frac{b^4}{3} \right) = \frac{2}{3} \rho b^5 = \frac{2}{3} M b^2 ,\end{aligned}$$

weil  $M = \rho b^3$ . Ebenso folgt

$$\begin{aligned}\Theta_{12} &= -\rho \int_0^b dx_3 \int_0^b dx_2 \int_0^b dx_1 x_1 x_2 \\ &= -\rho b \int_0^b dx_2 x_2 \int_0^b dx_1 x_1 = -\frac{1}{4} \rho b^5 = -\frac{1}{4} M b^2 .\end{aligned}$$

Alle anderen Nichtdiagonalkomponenten sind gleich  $\Theta_{12}$  und alle Diagonalkomponenten gleich  $\Theta_{11}$ .

### 6.4.2 Trägheitsmoment

Mithilfe von Gleichung (6.52) schreibt sich die kinetische Energie der Rotation (6.49) als

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\hat{\Theta} \vec{\omega}) . \quad (6.55)$$

Rotiert der starre Körper um eine feste Drehachse  $\vec{n}$  (siehe Abb. 6.9), so gilt

$$\vec{\omega} = \omega \vec{n} , \quad (6.56)$$

und wir erhalten für Gleichung (6.55)

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \omega \vec{n} \cdot (\hat{\Theta} \omega \vec{n}) = \frac{\omega^2}{2} \Theta_{\vec{n}} , \quad (6.57)$$

mit dem skalaren *Trägheitsmoment* bezüglich der Achse  $\vec{n}$

$$\Theta_{\vec{n}} \equiv \vec{n} \cdot (\hat{\Theta} \vec{n}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \Theta_{ij} n_i n_j . \quad (6.58)$$

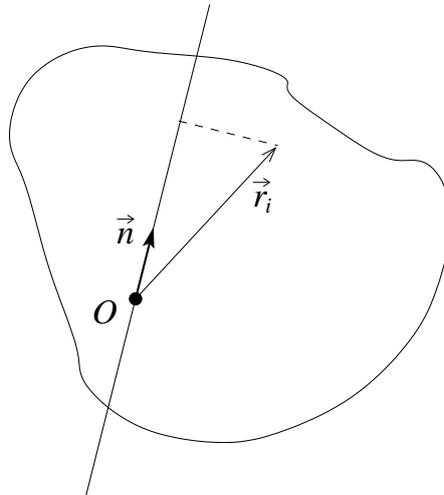


Abbildung 6.9: Drehung um eine feste Drehachse  $\vec{n}$

Benutzen wir Gleichung (6.56) in Gleichung (6.47), so gilt ebenfalls

$$\begin{aligned}
 T_{rot} &= \frac{\omega}{2} \vec{n} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \omega \vec{r}_i \times (\vec{n} \times \vec{r}_i) \\
 &= \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{n} \cdot [\vec{n} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{n})] \\
 &= \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^N m_i [r_i^2 - (\vec{r}_i \cdot \vec{n})^2] .
 \end{aligned} \tag{6.59}$$

Durch Vergleich der Gleichungen (6.57) und (6.59) erhalten wir für das Trägheitsmoment den Ausdruck

$$\Theta_{\vec{n}} = \sum_{i=1}^N m_i [r_i^2 - (\vec{r}_i \cdot \vec{n})^2] . \tag{6.60}$$

### 6.4.3 Satz von Steiner

Der Trägheitstensor und das Trägheitsmoment hängen von der Wahl des Ursprungs des körperfesten Achsensystems ab. Es existiert ein einfacher Zusammenhang zwischen dem Trägheitsmoment um eine gegebene Achse  $\vec{a}$  mit dem Trägheitsmoment um eine parallele Achse  $\vec{b}$ , die durch das Massenzentrum des starren Körpers verläuft (siehe Abb. 6.10).

Nach den Gleichungen (6.59) und (6.60) ist

$$\Theta_{\vec{a}} = \sum_{i=1}^N m_i [r_i^2 - (\vec{r}_i \cdot \vec{n})^2] = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i \times \vec{n})^2 , \tag{6.61}$$

## 6 Bewegung des starren Körpers

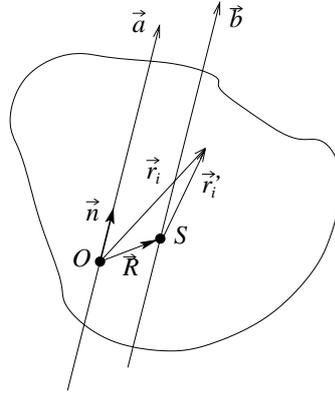


Abbildung 6.10: Zum Satz von Steiner

wobei wir die Spatproduktregel (1.24) für

$$\begin{aligned} (\vec{r}_i \times \vec{n})^2 &= (\vec{r}_i \times \vec{n}) \cdot (\vec{r}_i \times \vec{n}) \\ &= \vec{r}_i \cdot [\vec{n} \times (\vec{r}_i \times \vec{n})] \\ &= \vec{r}_i \cdot [\vec{r}_i (\vec{n} \cdot \vec{n}) - \vec{n} (\vec{n} \cdot \vec{r}_i)] = r_i^2 - (\vec{n} \cdot \vec{r}_i)^2 \end{aligned}$$

ausgenutzt haben. Nach Abb. 6.10 gilt  $\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}'_i$  und wir erhalten für Gleichung (6.61)

$$\begin{aligned} \Theta_{\vec{a}} &= \sum_{i=1}^N m_i \left[ (\vec{R} + \vec{r}'_i) \times \vec{n} \right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^N m_i (\vec{R} \times \vec{n})^2 + \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}'_i \times \vec{n})^2 + 2 (\vec{R} \times \vec{n}) \cdot \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}'_i \times \vec{n}) . \end{aligned}$$

Der letzte Term verschwindet aufgrund der Definition des Massenzentrums  $\sum_i m_i \vec{r}'_i = \vec{0}$ , denn

$$2 (\vec{R} \times \vec{n}) \cdot \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}'_i \times \vec{n}) = -2 (\vec{R} \times \vec{n}) \cdot \left( \vec{n} \times \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \right) = 0 .$$

Dann ergibt sich der *Satz von Steiner*:

$$\Theta_{\vec{a}} = \Theta_{\vec{b}} + M (\vec{R} \times \vec{n})^2 . \quad (6.62)$$

$|\vec{R} \times \vec{n}|$  ist der senkrechte Abstand des Schwerpunkts von der Achse  $\vec{a}$  durch den Ursprung (siehe Abb. 6.10).

Analog verfahren wir mit dem Trägheitstensor (6.51):

$$\Theta_{ij} = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} [r_{\alpha}^2 \delta_{ij} - r_{\alpha,i} r_{\alpha,j}] . \quad (6.63)$$

Mit

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_\alpha &= \vec{R} + \vec{r}'_\alpha \\
 \text{oder } r_{\alpha,i} &= R_i + r'_{\alpha,i} \\
 \text{folgt } \Theta_{ij} &= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \left[ \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 (R_k + r'_{\alpha,k})^2 - (R_i + r'_{\alpha,i})(R_j + r'_{\alpha,j}) \right] \\
 &= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \left[ \delta_{ij} \left( \sum_{k=1}^3 R_k^2 + \sum_{k=1}^3 r'^2_{\alpha,k} + 2 \sum_{k=1}^3 R_k r'_{\alpha,k} \right) \right. \\
 &\quad \left. - R_i R_j - r'_{\alpha,i} r'_{\alpha,j} - R_i r'_{\alpha,j} - R_j r'_{\alpha,i} \right] \\
 &= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \left[ \delta_{ij} r'^2_\alpha - r'_{\alpha,i} r'_{\alpha,j} \right] + \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \left[ \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 R_k^2 - R_i R_j \right] \\
 &\quad + \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \left[ 2 \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 R_k r'_{\alpha,k} - R_i r'_{\alpha,j} - R_j r'_{\alpha,i} \right]. \tag{6.64}
 \end{aligned}$$

Die erste Summe in Gleichung (6.64) identifizieren wir mit dem neuen Trägheitstensor bezüglich des Schwerpunkts,

$$I_{ij} \equiv \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \left[ \delta_{ij} r'^2_\alpha - r'_{\alpha,i} r'_{\alpha,j} \right]. \tag{6.65}$$

Man beachte, dass dieser Tensor die gleiche formale Struktur wie der Tensor (6.63) hat.

In der dritten Summe von Gleichung (6.64) treten immer Summen der Art  $\sum_{\alpha} m_\alpha r'_\alpha$  auf, die aufgrund der Schwerpunktsbedingung  $\sum_{\alpha} m_\alpha \vec{r}'_\alpha = \vec{0}$  alle verschwinden.

Damit verbleibt

$$\Theta_{ij} = I_{ij} + M (\delta_{ij} R^2 - R_i R_j), \tag{6.66}$$

$$\text{oder } I_{ij} = \Theta_{ij} - M (\delta_{ij} R^2 - R_i R_j), \tag{6.67}$$

was oft als *Verallgemeinerung des Steinerschen Satzes* bezeichnet wird.

#### 6.4.4 Beispiel des Würfels

Zur Illustration des Steinerschen Satzes behandeln wir noch einmal den in Kap. 6.4.1 betrachteten homogenen Würfel mit einer Ecke im Ursprung (siehe Abb. 6.8).

Im Folgenden bezeichnen wir mit  $X_i$  die alten Achsen und mit  $x_i$  die Schwerpunktsachsen (siehe Abb. 6.11)

## 6 Bewegung des starren Körpers

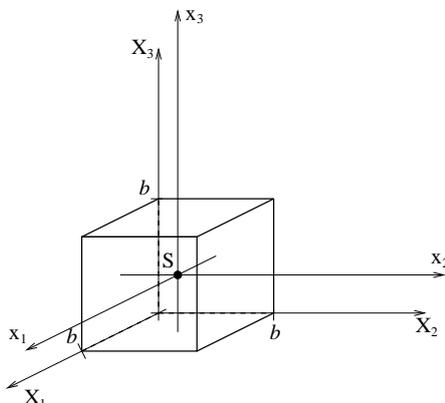


Abbildung 6.11: Alte Achsen  $X_i$  und Schwerpunktsachsen  $x_i$  des homogenen Würfels mit einer Ecke im Ursprung

Der Schwerpunktvektor ist in diesem Fall

$$\vec{R} = \left( \frac{b}{2}, \frac{b}{2}, \frac{b}{2} \right),$$

d. h.  $R_1 = R_2 = R_3 = \frac{b}{2}$

und  $R^2 = \sum_{k=1}^3 R_k^2 = \frac{3}{4}b^2.$

In Kap. 6.4.1 haben wir die Komponenten des alten Trägheitstensors zu

$$\Theta_{11} = \Theta_{22} = \Theta_{33} = \frac{2}{3}Mb^2$$

und  $\Theta_{12} = \Theta_{13} = \Theta_{23} = -\frac{1}{4}Mb^2$

berechnet.

Nach dem verallgemeinerten Steinerschen Satz (6.67) erhalten wir

$$I_{11} = \Theta_{11} - M(R^2 - R_1^2) = \frac{2}{3}Mb^2 - \frac{1}{2}Mb^2 = \frac{1}{6}Mb^2$$

und  $I_{12} = \Theta_{12} - M(-R_1R_2) = -\frac{1}{4}Mb^2 + M\frac{b^2}{4} = 0$

und analog  $I_{22} = I_{33} = I_{11} = \frac{1}{6}Mb^2$

und  $I_{13} = I_{23} = I_{12} = 0.$

Der neue Tensor ist also diagonal

$$\hat{I} = \frac{1}{6}Mb^2\hat{1} = \frac{1}{6}Mb^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 6.4.5 Hauptachsentransformation

Wir haben bereits in Kap. 6.4.1 vermerkt, dass die Komponenten des Trägheitstensors (6.51), (6.54) und (6.63) reell ( $\Theta_{ij} = \Theta_{ij}^*$ ) und symmetrisch ( $\Theta_{ij} = \Theta_{ji}$ ) sind, d.h. die Matrix  $\hat{\Theta}$  ist *hermitesch* oder *selbstadjungiert*. Jede reelle und symmetrische Matrix lässt sich durch eine orthogonale Koordinatentransformation auf Diagonalform bringen. Durch die Einführung eines neuen, gedrehten Koordinatensystems kann der Trägheitstensor stets auf Diagonalform – wie in Gleichung (6.53) – transformiert werden. Die neuen Koordinatenachsen heißen *Hauptachsen* oder *Hauptträgheitsachsen*.

Bezeichnen wir den resultierenden diagonalisierten Trägheitstensor mit

$$I_{ij} = I_i \delta_{ij} , \quad (6.68)$$

so erhalten wir nach Gleichung (6.52) sehr einfache Ausdrücke für die Komponenten des Drehimpulsvektors

$$L_i = \sum_{j=1}^3 I_{ij} \omega_j = \sum_{j=1}^3 I_i \delta_{ij} \omega_j = I_i \omega_i \quad (6.69)$$

und die Rotationsenergie (6.49)

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \omega_i L_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 I_{ij} \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 I_i \delta_{ij} \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 I_i \omega_i^2 . \quad (6.70)$$

Das Ergebnis (6.69) impliziert, dass bei Rotation um die  $\vec{e}_\mu$ -Hauptachse, d. h.  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_\mu$ , dann auch der Drehimpuls parallel zu dieser Achse ist, d. h.  $\vec{L} \parallel \vec{\omega} \parallel \vec{e}_\mu$ . Rotiert ein starrer Körper um eine solche Hauptträgheitsachse und bezeichnet  $I$  das Hauptträgheitsmoment um diese Achse, so gilt nach Gleichung (6.69)

$$L_i = I \omega_i = \sum_{j=1}^3 I \delta_{ij} \omega_j . \quad (6.71)$$

Andererseits gilt für den alten (nicht-diagonalen) Trägheitstensor  $\hat{\Theta}$  nach wie vor Gleichung (6.52), d.h.

$$\vec{L} = \hat{\Theta} \vec{\omega} , \quad \text{oder} \quad L_i = \sum_{j=1}^3 \Theta_{ij} \omega_j . \quad (6.72)$$

Das Gleichsetzen der Gleichungen (6.71) und (6.72) liefert sofort für  $i = 1, 2, 3$  das Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^3 (\Theta_{ij} - I \delta_{ij}) \omega_j = 0 . \quad (6.73)$$

Ausgeschrieben lautet das Gleichungssystem (6.73)

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & (\Theta_{11} - I) \omega_1 + \Theta_{12} \omega_2 + \Theta_{13} \omega_3 = 0 \\ \text{(b)} \quad & \Theta_{12} \omega_1 + (\Theta_{22} - I) \omega_2 + \Theta_{23} \omega_3 = 0 \\ \text{(c)} \quad & \Theta_{13} \omega_1 + \Theta_{23} \omega_2 + (\Theta_{33} - I) \omega_3 = 0 . \end{aligned} \quad (6.74)$$

## 6 Bewegung des starren Körpers

Für nicht-triviale Lösungen  $\vec{\omega}^{(i)} \neq \vec{0}$  müssen wir fordern, dass die Koeffizientendeterminante verschwindet:

$$\det(\Theta_{ij} - I\delta_{ij}) = \begin{vmatrix} \Theta_{11} - I & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ \Theta_{12} & \Theta_{22} - I & \Theta_{23} \\ \Theta_{13} & \Theta_{23} & \Theta_{33} - I \end{vmatrix} = 0. \quad (6.75)$$

Gleichung (6.75) ist eine kubische Gleichung für  $I$  mit den drei Lösungen  $I_1, I_2$  und  $I_3$ . Jede dieser Lösungen ist das Hauptträgheitsmoment um eine der Hauptachsen.

Offensichtlich können drei Fälle auftreten:

- (a) Sind alle Hauptträgheitsmomente verschieden  $I_1 \neq I_2 \neq I_3 \neq I_1$ , so handelt es sich um einen *unsymmetrischen Kreisel*.
- (b) Beim *symmetrischen Kreisel* sind zwei Hauptträgheitsmomente gleich groß, z. B.  $I_1 = I_2 \neq I_3$ .
- (c) Beim *Kugelkreisel* sind alle drei Hauptträgheitsmomente gleich groß, d. h.  $I_1 = I_2 = I_3$ . Der in Kap. 6.4.4 betrachtete Würfel bei Drehung um den Schwerpunkt ist ein Beispiel für einen Kugelkreisel.

Rotiert der starre Körper um die Achse, die dem Hauptträgheitsmoment  $I_1$  entspricht, dann ist nach Gleichung (6.71)  $\vec{L} = I_1\vec{\omega}$ , und beide Vektoren  $\vec{\omega}$  und  $\vec{L}$  sind entlang dieser Hauptachse gerichtet. Die Richtung von  $\vec{\omega}$  in Bezug auf das körperfeste Koordinatensystem ist dann identisch mit der Richtung der zu  $I_1$  gehörenden Hauptträgheitsachse. Deshalb können wir die Richtung dieser Hauptachse bestimmen, indem wir  $I_1$  für  $I$  in das Gleichungssystem (6.74) einsetzen, und damit das **Verhältnis** der Komponenten der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3$  berechnen; dies entspricht der Bestimmung der Richtungskosini.

Ebenso verfahren wir mit  $I_2$  und  $I_3$ , um die Richtung der entsprechenden Hauptachsen zu bestimmen.

Mit der Bestimmung des Verhältnisses  $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3$  sind die Richtungen der Vektoren  $\vec{\omega}^{(i)}$  eindeutig festgelegt. Natürlich sind diese Vektoren gerade die Eigenvektoren der Matrix in Gleichung (6.73).

Wir illustrieren dieses Verfahren am Beispiel des in Kap. 6.4.1 betrachteten Würfels mit einer Ecke im Ursprung. Mit  $A = 2Mb^2/3$ ,  $B = Mb^2/4$  lautet der Trägheitstensor

$$\hat{\Theta}_{ij} = \begin{pmatrix} A & -B & -B \\ -B & A & -B \\ -B & -B & A \end{pmatrix}$$

und die Determinante (6.75) ist

$$\det(\Theta_{ij} - I\delta_{ij}) = \begin{vmatrix} A - I & -B & -B \\ -B & A - I & -B \\ -B & -B & A - I \end{vmatrix} = (A - I)^3 - 3B^2(A - I) - 2B^2 = 0,$$

mit den drei Lösungen  $I_1 = A - 2B = Mb^2/6$  und  $I_{2,3} = A + B = 11Mb^2/12$ .

Setzen wir die Lösung  $I = I_1$  in das Gleichungssystem (6.74) ein, so folgt das System

$$\begin{aligned} 2\omega_1 - \omega_2 - \omega_3 &= 0 \\ -\omega_1 + 2\omega_2 - \omega_3 &= 0 \\ -\omega_1 - \omega_2 + 2\omega_3 &= 0, \end{aligned}$$

mit der Lösung  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$  und damit für den normierten Eigenvektor  $\vec{n}_1 = 3^{-1/2}(1, 1, 1)$ , der in Richtung des Schwerpunktes zeigt. Ebenso verfährt man mit der zweiten entarteten Lösung  $I_{2,3}$ , die auf die drei identischen Gleichungen

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$$

führt. Eine mögliche Wahl des Eigenvektors ist  $\vec{n}_2 = 6^{-1/2}(2, -1, -1)$ .

## 6.5 Das Trägheitsellipsoid

Zur Veranschaulichung der Richtungsabhängigkeit des Trägheitsmoments  $\Theta_{\vec{n}}$  dient das sogenannte Trägheitsellipsoid. Wie in Abb. 6.12 skizziert, geben wir eine beliebige Rotationsachse durch den Einheitsvektor  $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  mit den Richtungskosini vor.

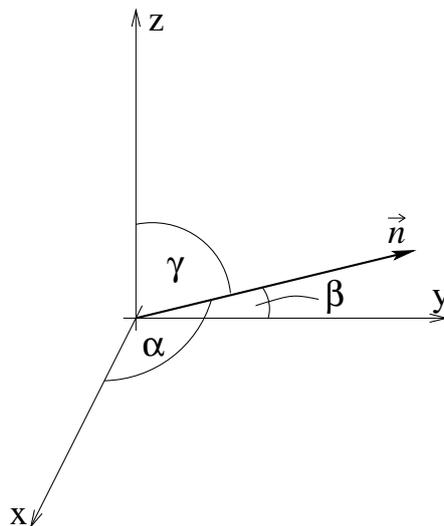


Abbildung 6.12: Zum Trägheitsellipsoid

## 6 Bewegung des starren Körpers

Gemäß Gleichung (6.58) ist das Trägheitsmoment um diese Achse

$$\begin{aligned}
 \Theta = \Theta_{\vec{n}} = \vec{n} \cdot (\hat{\Theta} \vec{n}) &= (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \begin{pmatrix} \Theta_{xx} & \Theta_{xy} & \Theta_{xz} \\ \Theta_{yx} & \Theta_{yy} & \Theta_{yz} \\ \Theta_{zx} & \Theta_{zy} & \Theta_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix} \\
 &= (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \begin{pmatrix} \Theta_{xx} \cos \alpha + \Theta_{xy} \cos \beta + \Theta_{xz} \cos \gamma \\ \Theta_{yx} \cos \alpha + \Theta_{yy} \cos \beta + \Theta_{yz} \cos \gamma \\ \Theta_{zx} \cos \alpha + \Theta_{zy} \cos \beta + \Theta_{zz} \cos \gamma \end{pmatrix} \\
 &= \Theta_{xx} \cos^2 \alpha + \Theta_{yy} \cos^2 \beta + \Theta_{zz} \cos^2 \gamma \\
 &\quad + 2\Theta_{xy} \cos \alpha \cos \beta + 2\Theta_{xz} \cos \alpha \cos \gamma + 2\Theta_{yz} \cos \beta \cos \gamma, \quad (6.76)
 \end{aligned}$$

wobei wir die Symmetrie des Trägheitstensors  $\hat{\Theta}$  ausgenutzt haben.

Führen wir den neuen Vektor

$$\vec{w} \equiv \frac{\vec{n}}{\sqrt{\Theta}} = \left( \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\Theta}}, \frac{\cos \beta}{\sqrt{\Theta}}, \frac{\cos \gamma}{\sqrt{\Theta}} \right) \quad (6.77)$$

ein, so schreibt sich Gleichung (6.76) als

$$\Theta_{xx} w_x^2 + \Theta_{yy} w_y^2 + \Theta_{zz} w_z^2 + 2\Theta_{xy} w_x w_y + 2\Theta_{xz} w_x w_z + 2\Theta_{yz} w_y w_z = 1. \quad (6.78)$$

Gleichung (6.78) stellt in den Koordinaten  $(w_x, w_y, w_z)$  ein Ellipsoid dar, das sogenannte *Trägheitsellipsoid*.

Der Abstand  $w$  vom Drehpunkt 0 in Richtung  $\vec{n}$  zum Trägheitsellipsoid ist

$$w = \frac{1}{\sqrt{\Theta}}. \quad (6.79)$$

Durch Drehung des Koordinatensystems können wir das Ellipsoid in seine Normalform überführen,

$$\Theta_1 w_1^2 + \Theta_2 w_2^2 + \Theta_3 w_3^2 = 1 = \frac{w_1^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\Theta_1}}\right)^2} + \frac{w_2^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\Theta_2}}\right)^2} + \frac{w_3^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\Theta_3}}\right)^2}, \quad (6.80)$$

ohne die in Gleichung (6.78) auftretenden Mischterme. Gleichung (6.80) entspricht dem Trägheitsellipsoid im Hauptachsensystem. Nach Gleichung (6.79) ist der Radiusvektor zu einem Punkt auf diesem Trägheitsellipsoid umgekehrt proportional zum Hauptträgheitsmoment bei Rotation um diesen Vektor.

## 6.6 Die Eulerschen Gleichungen

Wir betrachten die Bewegungsgleichung des starren Körpers mit einem festgehaltenen Punkt, d.h.  $\vec{V} = \vec{0}$  in Gleichung (6.43).

Im raumfesten Koordinatensystem gilt gemäß Gleichung (2.39) der Drehimpulssatz

$$\left( \frac{d}{dt} \right)_R \vec{L} = \vec{D}, \quad (6.81)$$

## 6.6 Die Eulerschen Gleichungen

mit dem äußeren Drehmoment  $\vec{D} = \vec{r} \times \vec{F}$ . Mit der Operatorgleichung (6.28) folgt im körperfesten Koordinatensystem der Drehimpulssatz zu

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_K + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{D}. \quad (6.82)$$

Wählt man die körperfesten Achsen als die Hauptträgheitsachsen des starren Körpers, dann ist nach Gleichung (6.69)

$$L_1 = \Theta_1 \omega_1, \quad L_2 = \Theta_2 \omega_2 \quad \text{und} \quad L_3 = \Theta_3 \omega_3$$

und Gleichung (6.82) führt auf

$$\Theta_i \dot{\omega}_i + \epsilon_{ijk} \Theta_k \omega_j \omega_k = D_i, \quad (6.83)$$

oder komponentenweise geschrieben auf das gekoppelte Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \Theta_1 \dot{\omega}_1 - (\Theta_2 - \Theta_3) \omega_2 \omega_3 = D_1 \\ \text{(b)} \quad & \Theta_2 \dot{\omega}_2 - (\Theta_3 - \Theta_1) \omega_3 \omega_1 = D_2 \\ \text{(c)} \quad & \Theta_3 \dot{\omega}_3 - (\Theta_1 - \Theta_2) \omega_1 \omega_2 = D_3. \end{aligned} \quad (6.84)$$

Dies sind die *Eulerschen Gleichungen des starren Körpers*. Die Lösungen  $\vec{\omega}(t)$  gelten im körperfesten Koordinatensystem. Die Schwierigkeit besteht zunächst darin, die Komponenten des externen Drehmoments  $\vec{D}$  im Hauptachsensystem zu bestimmen.

Wir betrachten daher zunächst den Fall des *kräftefreien* starren Körpers, d. h.  $\vec{F} = \vec{0}$ , so dass  $\vec{D} = \vec{0}$ . In diesem Fall vereinfachen sich die Eulerschen Gleichungen (6.84) auf

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \Theta_1 \dot{\omega}_1 = (\Theta_2 - \Theta_3) \omega_2 \omega_3 \\ \text{(b)} \quad & \Theta_2 \dot{\omega}_2 = (\Theta_3 - \Theta_1) \omega_3 \omega_1 \\ \text{(c)} \quad & \Theta_3 \dot{\omega}_3 = (\Theta_1 - \Theta_2) \omega_1 \omega_2. \end{aligned} \quad (6.85)$$

### 6.6.1 Beispiel 1: Kräftefreier Kugelkreisel

Mit  $\vec{D} = \vec{0}$  und  $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3$  folgt aus den Gleichungen (6.85) sofort  $\dot{\vec{\omega}} = \vec{0}$ , d. h.  $\vec{\omega} = \text{const.}$ , d. h. starre Rotation.

Dies entspricht der Bewegung des in Kap. 6.4.4 betrachteten kräftefreien Würfels um seinen Schwerpunkt.

### 6.6.2 Beispiel 2: Kräftefreier symmetrischer Kreisel

Mit  $\vec{D} = \vec{0}$  und  $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta$  erhalten wir für Gleichung (6.85c) für die Symmetrieachse  $\vec{e}_3$ :

$$\begin{aligned} & \Theta_3 \dot{\omega}_3 = 0, \\ \text{so dass} \quad & \omega_3 = \tilde{\omega}_3 = \text{const.} \end{aligned} \quad (6.86)$$

## 6 Bewegung des starren Körpers

Eingesetzt in Gleichung (6.85a)

$$\begin{aligned} \Theta \dot{\omega}_1 &= (\Theta - \Theta_3) \tilde{\omega}_3 \omega_2 \\ \text{folgt} \quad \dot{\omega}_1 + \Omega \omega_2 &= 0, \end{aligned} \quad (6.87)$$

$$\text{mit der Konstanten} \quad \Omega \equiv \left( \frac{\Theta_3}{\Theta} - 1 \right) \tilde{\omega}_3 .$$

Gleichung (6.85b) ergibt ebenso

$$\dot{\omega}_2 - \Omega \omega_1 = 0 . \quad (6.88)$$

Multiplizieren wir die letzte Gleichung mit  $i = \sqrt{-1}$  und addieren wir die resultierende Gleichung mit Gleichung (6.87), so folgt

$$\dot{\omega}_1 + i\dot{\omega}_2 + \Omega \omega_2 - i\Omega \omega_1 = 0 .$$

Für die Größe  $\eta \equiv \omega_1 + i\omega_2$  folgt die Gleichung

$$\dot{\eta} - i\Omega \eta = 0 ,$$

mit der Lösung

$$\begin{aligned} \eta(t) &= Ae^{i\Omega t} = A(\cos \Omega t + i \sin \Omega t) , \\ \text{so dass} \quad \omega_1(t) &= A \cos \Omega t , \quad \omega_2(t) = A \sin \Omega t , \end{aligned} \quad (6.89)$$

mit der Konstanten  $A$ . Die Gleichungen (6.86) und (6.89) sind die vollständigen Lösungen. Für den Wert der Winkelgeschwindigkeit folgt

$$|\vec{\omega}| = \omega = \sqrt{A^2 + \tilde{\omega}_3^2} = \text{const} . \quad (6.90)$$

Wie in Abb. 6.13 skizziert, beschreibt die Projektion des Rotationsvektors  $\vec{\omega}$  auf die  $\vec{e}_1$ - $\vec{e}_2$ -Ebene senkrecht zur Symmetrieachse  $\vec{e}_3$  einen Kreis mit der Frequenz  $\Omega$  um die Symmetrieachse des symmetrischen Kreisels. Die gesamte Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  ist dem Betrag nach konstant und präzessiert mit der gleichen Frequenz um die  $\vec{e}_3$ -Achse.

Die Integrationskonstanten  $\tilde{\omega}_3$  und  $A$  (die Amplitude der Präzession) können durch die üblichen Konstanten der Bewegung ausgedrückt werden, nämlich durch die kinetische Energie des Kreisels

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \Theta A^2 + \frac{1}{2} \Theta_3 \tilde{\omega}_3^2 = \text{const}$$

und das Quadrat des Drehimpulses

$$L^2 = \Theta^2 A^2 + \Theta_3^2 \tilde{\omega}_3^2 = \text{const} .$$

Man sollte erwarten, dass die Drehachse der Erde diese Präzession ausführt, denn die äußeren auf die Erde wirkenden Drehmomente sind so schwach, dass die Rotationsbewegung als kräftefrei angesehen werden kann. Der Erdkörper hat näherungsweise die Gestalt eines abgeplatteten Rotationsellipsoids mit der Elliptizität (Abplattungsverhältnis)  $(\Theta_3 - \Theta)/\Theta \simeq$

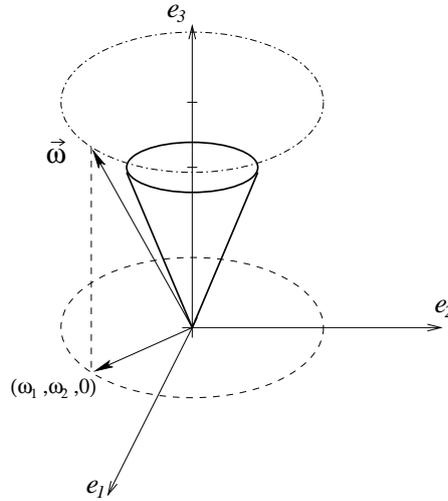


Abbildung 6.13: Kräftefreie Bewegung eines symmetrischen Kreisels

1/300. Die Winkelgeschwindigkeit seiner Rotation ist  $\omega \simeq \tilde{\omega}_3 = 2\pi/86400$ , die Präzessionsfrequenz daher  $\Omega = \tilde{\omega}_3/300$ , was einer Periode von 300 Tagen entspricht. Diese ist im Wesentlichen identisch mit der Chandler-Periode der Polschwankungen von 429 Tagen, bei denen der Abstand der Drehachse vom Nordpol im Mittel um etwa 4 m auf der Erdoberfläche schwankt.

### 6.6.3 Beispiel 3: Kräftefreier asymmetrischer Kreisel

Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass  $\Theta_1 < \Theta_2 < \Theta_3$  ist. Als erstes multiplizieren wir jede der Eulergleichungen (6.85) mit  $\omega_i$ ,

$$\begin{aligned}\Theta_1 \dot{\omega}_1 \omega_1 &= (\Theta_2 - \Theta_3) \omega_1 \omega_2 \omega_3 \\ \Theta_2 \dot{\omega}_2 \omega_2 &= (\Theta_3 - \Theta_1) \omega_1 \omega_2 \omega_3 \\ \Theta_3 \dot{\omega}_3 \omega_3 &= (\Theta_1 - \Theta_2) \omega_1 \omega_2 \omega_3 ,\end{aligned}$$

und addieren die drei Gleichungen mit dem Ergebnis

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^3 \Theta_i \dot{\omega}_i \omega_i &= \omega_1 \omega_2 \omega_3 [\Theta_2 - \Theta_3 + \Theta_3 - \Theta_1 + \Theta_1 - \Theta_2] \\ &= 0 = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \Theta_i \omega_i^2 \right] ,\end{aligned}$$

$$\text{oder} \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \Theta_i \omega_i^2 = T_{rot} = a = \text{const} , \quad (6.91)$$

was der Energieerhaltung entspricht.

## 6 Bewegung des starren Körpers

Als zweites multiplizieren wir jede der Eulergleichungen (6.85) mit  $\Theta_i \omega_i$ ,

$$\begin{aligned}\Theta_1^2 \dot{\omega}_1 \omega_1 &= \Theta_1 (\Theta_2 - \Theta_3) \omega_1 \omega_2 \omega_3 \\ \Theta_2^2 \dot{\omega}_2 \omega_2 &= \Theta_2 (\Theta_3 - \Theta_1) \omega_1 \omega_2 \omega_3 \\ \Theta_3^2 \dot{\omega}_3 \omega_3 &= \Theta_3 (\Theta_1 - \Theta_2) \omega_1 \omega_2 \omega_3 ,\end{aligned}$$

und addieren diese drei Gleichungen mit dem Ergebnis

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^3 \Theta_i^2 \dot{\omega}_i \omega_i &= \omega_1 \omega_2 \omega_3 [\Theta_1 \Theta_2 - \Theta_1 \Theta_3 + \Theta_2 \Theta_3 - \Theta_2 \Theta_1 + \Theta_1 \Theta_3 - \Theta_2 \Theta_3] , \\ &= 0 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \sum_{i=1}^3 \Theta_i^2 \omega_i^2 \right] ,\end{aligned}$$

$$\text{oder } \sum_{i=1}^3 \Theta_i^2 \omega_i^2 = L^2 = b = \text{const.} \quad (6.92)$$

Gleichung (6.92) besagt, dass der Betrag des Drehimpulses eine Konstante der Bewegung ist.

Wir lösen die Gleichungen (6.91) und (6.92) jeweils nach  $\omega_2^2$  auf und setzen beide Ausdrücke gleich:

$$\omega_2^2 = \frac{1}{\Theta_2} [2a - \Theta_1 \omega_1^2 - \Theta_3 \omega_3^2] = \frac{1}{\Theta_2} [b - \Theta_1^2 \omega_1^2 - \Theta_3^2 \omega_3^2] . \quad (6.93)$$

Es folgt

$$\left[ \frac{\Theta_3^2}{\Theta_2^2} - \frac{\Theta_3}{\Theta_2} \right] \omega_3^2 = \frac{b - 2a\Theta_2}{\Theta_2^2} + \left[ \frac{\Theta_1}{\Theta_2} - \frac{\Theta_1^2}{\Theta_2^2} \right] \omega_1^2 ,$$

$$\text{oder } \omega_3^2 = \gamma_1 - \gamma_2 \omega_1^2 , \quad (6.94)$$

$$\text{mit } \gamma_1 = \frac{2a\Theta_2 - b}{\Theta_3 (\Theta_2 - \Theta_3)} , \quad \gamma_2 = \frac{\Theta_1 (\Theta_2 - \Theta_1)}{\Theta_3 (\Theta_2 - \Theta_3)} . \quad (6.95)$$

Setzen wir Gleichung (6.94) in Gleichung (6.93) ein, so erhalten wir

$$\omega_2^2 = \beta_1 - \beta_2 \omega_1^2 , \quad (6.96)$$

$$\text{mit } \beta_1 = \frac{2a\Theta_3 - b}{\Theta_2 (\Theta_3 - \Theta_2)} , \quad \beta_2 = \frac{\Theta_1 (\Theta_3 - \Theta_1)}{\Theta_2 (\Theta_3 - \Theta_2)} . \quad (6.97)$$

Die erste Eulergleichung (6.85a)

$$\frac{\dot{\omega}_1}{\omega_2 \omega_3} = \frac{\Theta_2 - \Theta_3}{\Theta_1}$$

liefert nach Einsetzen der Gleichungen (6.94) und (6.96) das elliptische Integral 1. Gattung

$$\frac{\Theta_2 - \Theta_3}{\Theta_1} t = \int_{\omega_1(0)}^{\omega_1} \frac{d\omega}{\sqrt{\beta_1 - \beta_2 \omega^2} \sqrt{\gamma_1 - \gamma_2 \omega^2}} . \quad (6.98)$$

Die Lösungen  $\omega_i(t)$  führen dann auf Jacobische elliptische Funktionen.

## 6.7 Die Eulerschen Winkel

Für nicht-verschwindende äußere Drehmomente  $\vec{D} \neq \vec{0}$  müssen wir die Orientierung des körperfesten Koordinatensystems relativ zum raumfesten Koordinatensystem mit Hilfe von drei unabhängigen Parametern beschreiben. Nur wenn man solche generalisierten Koordinaten gefunden hat, können wir auch den Lagrange-Formalismus im raumfesten Inertialsystem auf den starren Körper anwenden. Eine spezielle Wahl dieser Koordinaten sind die Eulerschen Winkel  $\phi$ ,  $\theta$  und  $\psi$ .

Gesucht ist eine Transformationsmatrix  $\hat{A}(\phi, \theta, \psi)$ , die einen Vektor in den raumfesten Koordinaten  $(x, y, z)$  in die körperfesten Koordinaten  $(x', y', z')$  transformiert, d.h.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \hat{A}(\phi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (6.99)$$

$$\text{mit} \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a_{ij} = a_{ij}(\phi, \theta, \psi). \quad (6.100)$$

Man kann die Transformation mittels dreier aufeinanderfolgender Drehungen ausführen, wobei vorher genau festgelegt wird, welche drei Drehungen in welcher Reihenfolge ausgeführt werden sollen. Jede dieser Drehungen kann durch einen Drehwinkel festgelegt werden, z. B. ist nach Gleichung (6.9) die Drehmatrix für eine Drehung um einen Winkel  $\phi$  um die  $z$ -Achse

$$\hat{A}_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Eulerschen Winkel sind die Drehwinkel dreier spezieller einparametriger Drehungen, die hintereinander geschaltet werden:

### 1. Drehung um den Winkel $\phi$ um die $z$ -Achse:

$$\hat{D}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dadurch ergibt sich das in Abb. 6.14 gezeigte Koordinatensystem  $(\xi, \eta, \chi)$  durch

$$(\xi, \eta, \chi) = \hat{D}(\phi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

### 2. Drehung um den Winkel $\theta$ um die $\xi$ -Achse (neue $x$ -Achse):

## 6 Bewegung des starren Körpers

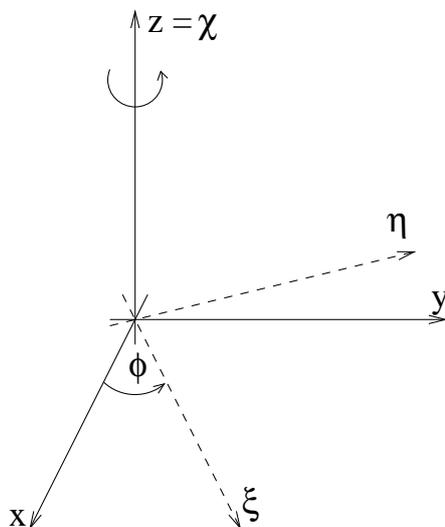


Abbildung 6.14: Ergebnis der 1. Drehung

Dadurch ergibt sich das in Abb. 6.15 gezeigte Koordinatensystem  $(\xi', \eta', \chi')$  durch

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \chi' \end{pmatrix} = \hat{C}(\theta) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \chi \end{pmatrix},$$

mit

$$\hat{C}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

### 3. Drehung um den Winkel $\psi$ um die $\chi'$ -Achse (2. neue $z$ -Achse):

Dadurch ergibt sich das in Abbildung 6.16 gezeigte Koordinatensystem  $(x', y', z')$  durch

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \hat{B}(\psi) \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \chi' \end{pmatrix},$$

mit

$$\hat{B}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Transformationsmatrix  $\hat{A}$ , die einen Vektor von raumfesten in körperfeste Koordinaten transformiert, erhalten wir dann

$$\hat{A} = \hat{A}(\phi, \theta, \psi) = \hat{B}(\psi) \hat{C}(\theta) \hat{D}(\phi). \quad (6.101)$$

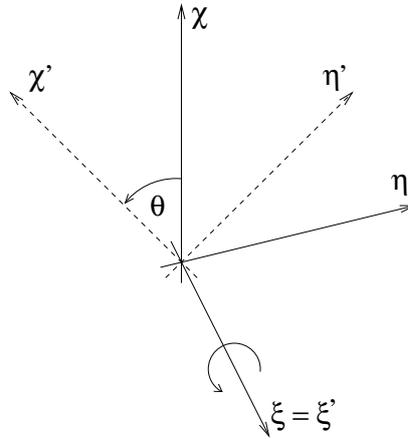


Abbildung 6.15: Ergebnis der 2. Drehung

Führen wir damit die Operation (6.99) nacheinander aus:

$$\begin{aligned}\hat{D}(\phi)\vec{x} &= \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\phi + y\sin\phi \\ -x\sin\phi + y\cos\phi \\ z \end{pmatrix}, \\ \hat{C}(\theta)\hat{D}(\phi)\vec{x} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\cos\phi + y\sin\phi \\ -x\sin\phi + y\cos\phi \\ z \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} x\cos\phi + y\sin\phi \\ (-x\sin\phi + y\cos\phi)\cos\theta + z\sin\theta \\ (x\sin\phi - y\cos\phi)\sin\theta + z\cos\theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\hat{B}(\psi)\hat{C}(\theta)\hat{D}(\phi)\vec{x} &= \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\cos\phi + y\sin\phi \\ (-x\sin\phi + y\cos\phi)\cos\theta + z\sin\theta \\ (x\sin\phi - y\cos\phi)\sin\theta + z\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [x\cos\phi + y\sin\phi]\cos\psi + z\sin\psi\sin\theta + \sin\psi\cos\theta[-x\sin\phi + y\cos\phi] \\ -[x\cos\phi + y\sin\phi]\sin\psi + z\cos\psi\sin\theta + \cos\psi\cos\theta[-x\sin\phi + y\cos\phi] \\ (x\sin\phi - y\cos\phi)\sin\theta + z\cos\theta \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Gemäß Gleichung (6.101) folgt dann für die gesamte Drehmatrix

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi\cos\theta & \sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta \\ -\cos\phi\sin\psi - \sin\phi\cos\psi\cos\theta & -\sin\phi\sin\psi + \cos\phi\cos\psi\cos\theta & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & -\cos\phi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (6.102)$$

## 6 Bewegung des starren Körpers

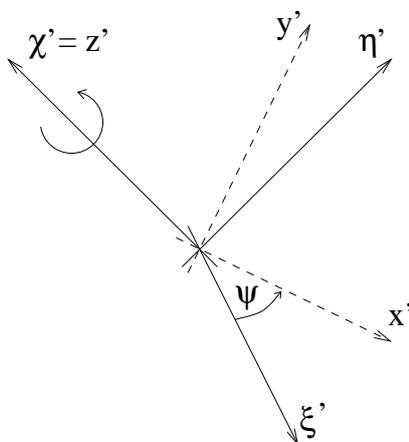


Abbildung 6.16: Ergebnis der 3. Drehung

$\hat{A}$  ist wieder eine orthogonale Matrix, weil sie aus der Multiplikation orthogonaler Matrizen entsteht. Deshalb ist die inverse Matrix  $\hat{A}^{-1} = \hat{A}^T$ , die Vektoren von körperfesten in raumfeste Koordinaten transformiert, d.h.

$$\vec{x} = \hat{A}^{-1} \vec{x}' = \hat{A}^T \vec{x}' , \quad (6.103)$$

gleich der transponierten Matrix  $\hat{A}^T$ , die man durch Vertauschen von Zeilen und Spalten aus  $\hat{A}$  erhält.

## 6.8 Lagrange-Mechanik des starren Körpers

### 6.8.1 Lagrange-Funktion des Kreisels

Als körperfeste Achsen wählen wir die Hauptachsen des starren Körpers. Nach Gleichung (6.70) erhalten wir dann für die Rotationsenergie

$$T_{rot} = \frac{\Theta_1}{2} \omega_{x'}^2 + \frac{\Theta_2}{2} \omega_{y'}^2 + \frac{\Theta_3}{2} \omega_{z'}^2 . \quad (6.104)$$

Die zur Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  gehörende allgemeine infinitesimale Drehung kann so aufgefasst werden, als bestünde sie aus drei aufeinanderfolgenden infinitesimalen Drehungen mit den Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_\phi = \dot{\phi}$ ,  $\omega_\theta = \dot{\theta}$  und  $\omega_\psi = \dot{\psi}$ , so dass

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} \vec{e}_1 + \dot{\theta} \vec{e}_2 + \dot{\psi} \vec{e}_3 , \quad (6.105)$$

oder komponentenweise

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \omega_{x'} &= \dot{\phi}_{x'} + \dot{\theta}_{x'} + \dot{\psi}_{x'} \\ \text{(b)} \quad \omega_{y'} &= \dot{\phi}_{y'} + \dot{\theta}_{y'} + \dot{\psi}_{y'} \\ \text{(c)} \quad \omega_{z'} &= \dot{\phi}_{z'} + \dot{\theta}_{z'} + \dot{\psi}_{z'} . \end{aligned} \quad (6.106)$$

Es müssen also die Projektionen der Winkelgeschwindigkeiten der einzelnen Drehungen auf die körperfesten Achsen bestimmt werden. Dabei ist nach Kap. 6.7  $\dot{\vec{\phi}} \parallel z$  zur raumfesten  $z$ -Achse,  $\dot{\vec{\theta}} \parallel \xi = \xi'$ -Achse und  $\dot{\vec{\psi}} \parallel z'$ -Achse, d.h.

$$\dot{\vec{\psi}} \parallel \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z' \end{pmatrix}. \quad (6.107)$$

Mit  $\dot{\vec{\phi}} \parallel (0, 0, z) = \hat{A}^T(0, 0, z')$  folgt aus Gleichung (6.102)

$$\dot{\vec{\phi}} = \dot{\phi} \begin{pmatrix} \sin \psi \sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$\text{so dass} \quad \dot{\phi}_{x'} = \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta, \quad \dot{\phi}_{y'} = \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta, \quad \dot{\phi}_{z'} = \dot{\phi} \cos \theta. \quad (6.108)$$

Mit  $\dot{\vec{\theta}} \parallel \xi'$ -Achse folgt wegen

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{B}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aus der Inversion der Matrix  $\hat{B}$

$$\dot{\vec{\theta}} = \dot{\theta} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ -\sin \psi \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{so dass} \quad \dot{\theta}_{x'} = \dot{\theta} \cos \psi, \quad \dot{\theta}_{y'} = -\dot{\theta} \sin \psi, \quad \dot{\theta}_{z'} = 0. \quad (6.109)$$

Mit den Gleichungen (6.107)–(6.109) folgt für die Gleichungen (6.106)

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \omega_{x'} &= \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \text{(b)} \quad \omega_{y'} &= \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \text{(c)} \quad \omega_{z'} &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (6.110)$$

Wir erhalten sofort

$$\omega_{x'}^2 = \dot{\phi}^2 \sin^2 \psi \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \cos^2 \psi + 2\dot{\phi}\dot{\theta} \sin \psi \sin \theta \cos \psi, \quad (6.111)$$

$$\omega_{y'}^2 = \dot{\phi}^2 \cos^2 \psi \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \sin^2 \psi - 2\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \psi \sin \theta \sin \psi \quad (6.112)$$

$$\text{und} \quad \omega_{z'}^2 = \dot{\phi}^2 \cos^2 \theta + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi} \cos \theta. \quad (6.113)$$

Für die Rotationsenergie (6.104) folgt dann

$$\begin{aligned} T_{rot} &= \frac{\Theta_1}{2} \left[ \dot{\phi}^2 \sin^2 \psi \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \cos^2 \psi + 2\dot{\phi}\dot{\theta} \sin \psi \sin \theta \cos \psi \right] \\ &+ \frac{\Theta_2}{2} \left[ \dot{\phi}^2 \cos^2 \psi \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \sin^2 \psi - 2\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \psi \sin \theta \sin \psi \right] \\ &+ \frac{\Theta_3}{2} \left[ \dot{\phi}^2 \cos^2 \theta + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi} \cos \theta \right]. \end{aligned} \quad (6.114)$$

## 6 Bewegung des starren Körpers

Bei festgehaltenem ( $\vec{V}_{SP} = 0$ ) Schwerpunkt gilt dann für die Lagrange-Funktion des Kreisel

$$\begin{aligned}
 L = T_{rot} - V(\phi, \theta, \psi) &= \frac{\Theta_1}{2} \left[ \dot{\phi}^2 \sin^2 \psi \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \cos^2 \psi + 2\dot{\phi}\dot{\theta} \sin \psi \sin \theta \cos \psi \right] \\
 &+ \frac{\Theta_2}{2} \left[ \dot{\phi}^2 \cos^2 \psi \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \sin^2 \psi - 2\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \psi \sin \theta \sin \psi \right] \\
 &+ \frac{\Theta_3}{2} \left[ \dot{\phi}^2 \cos^2 \theta + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi} \cos \theta \right] - V(\phi, \theta, \psi) \\
 &= L(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \phi, \theta, \psi) .
 \end{aligned} \tag{6.115}$$

Die Lagrange-Gleichungen lauten

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial L}{\partial \phi} , \\
 \text{(b)} \quad & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta} , \\
 \text{(c)} \quad & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial L}{\partial \psi} .
 \end{aligned} \tag{6.116}$$

### 6.8.2 Beispiel: Schwerer, symmetrischer Kreisel

Die Symmetrieachse ist natürlich eine der Hauptachsen und soll als  $z'$ -Achse des körperfesten Systems gewählt werden. Die Nullpunkte des raumfesten und körperfesten Koordinatensystems seien in den Unterstützungspunkt des Kreisels gelegt (siehe Abb. 6.17).  $l$  ist der Abstands des Schwerpunkts vom Unterstützungspunkt.

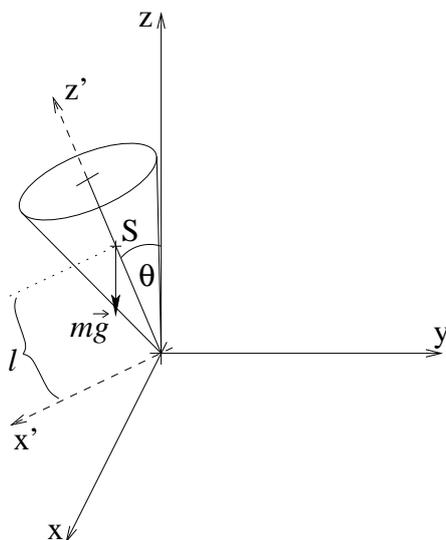


Abbildung 6.17: Schwerer, symmetrischer Kreisel

Für den symmetrischen Kreisel ist  $\Theta_1 = \Theta_2$  und mit

$$\omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2 = \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2$$

reduziert sich die Lagrange-Funktion (6.115) auf

$$L = \frac{\Theta_1}{2} [\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2] + \frac{\Theta_3}{2} [\dot{\phi}^2 \cos^2 \theta + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi} \cos \theta] - V(\phi, \theta, \psi), \quad (6.117)$$

wobei  $\Theta_1$  und  $\Theta_3$  die Hauptträgheitsmomente bezüglich des gewählten Ursprungs des körperfesten Koordinatensystems sind.

Die potentielle Energie ist einfach

$$V = Mgl \cos \theta, \quad (6.118)$$

wobei  $M$  die Masse des Kreisels ist. Dann erhalten wir für die Lagrange-Funktion (6.117)

$$L = \frac{\Theta_1}{2} [\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2] + \frac{\Theta_3}{2} [\dot{\phi}^2 \cos^2 \theta + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi} \cos \theta] - Mgl \cos \theta. \quad (6.119)$$

Die Koordinaten  $\phi$  und  $\psi$  sind zyklisch, so dass  $p_\phi$  und  $p_\psi$  Erhaltungsgrößen sind:

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \Theta_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + \Theta_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \cos \theta = \text{const} \quad (6.120)$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \Theta_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = \text{const}. \quad (6.121)$$

Setzen wir Gleichung (6.121) in Gleichung (6.120) ein, so folgt

$$p_\phi = \Theta_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + p_\psi \cos \theta, \quad (6.122)$$

oder 
$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{\Theta_1 \sin^2 \theta}, \quad (6.123)$$

mit dem Integral 
$$\phi(t) - \phi(t_0) = \int_{\phi(t_0)}^{\phi(t)} d\phi = \int_{t_0}^t dt' \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta(t')}{\Theta_1 \sin^2 \theta(t')}, \quad (6.124)$$

falls die Lösung  $\theta(t)$  bekannt ist.

Nach Gleichung (6.121) ist ebenfalls

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi}{\Theta_3} - \dot{\phi} \cos \theta = \frac{p_\psi}{\Theta_3} - \cos \theta \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{\Theta_1 \sin^2 \theta}, \quad (6.125)$$

wobei wir Gleichung (6.123) eingesetzt haben. Die Integration dieser Gleichung liefert

$$\psi(t) - \psi(t_0) = \int_{\psi(t_0)}^{\psi(t)} d\psi = \int_{t_0}^t dt' \left[ \frac{p_\psi}{\Theta_3} - \cos \theta(t') \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta(t')}{\Theta_1 \sin^2 \theta(t')} \right], \quad (6.126)$$

bei bekannter Lösung  $\theta(t)$ .

## 6 Bewegung des starren Körpers

Da das System konservativ ist, ist die Gesamtenergie ebenfalls eine Erhaltungsgröße:

$$\begin{aligned} E = T + V &= \frac{\Theta_1}{2} [\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2] + \frac{\Theta_3}{2} [\dot{\phi}^2 \cos^2 \theta + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi} \cos \theta] + Mgl \cos \theta \\ &= \frac{\Theta_1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{\Theta_1}{2} \left( \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{\Theta_1 \sin \theta} \right)^2 + \frac{p_\psi^2}{2\Theta_3} + Mgl \cos \theta . \end{aligned} \quad (6.127)$$

wobei die Gleichungen (6.121) und (6.123) verwandt wurden. Es folgt

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{\Theta_1} \left( E - \frac{p_\psi^2}{2\Theta_3} - \frac{1}{2\Theta_1} \left( \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 - Mgl \cos \theta \right) . \quad (6.128)$$

Zur Lösung substituieren wir  $u \equiv \cos \theta$ , oder  $\theta = \arccos u$ , so dass

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dt}$$

und  $\sin^2 \theta = 1 - u^2$ . Dann erhalten wir für Gleichung (6.128)

$$\begin{aligned} \frac{\dot{u}^2}{1-u^2} &= \frac{2}{\Theta_1} \left( E - \frac{p_\psi^2}{2\Theta_3} \right) - \frac{(p_\phi - p_\psi u)^2}{\Theta_1^2 (1-u^2)} - \frac{2Mglu}{\Theta_1} , \\ \text{oder} \quad \dot{u}^2 &= (1-u^2) \left[ \frac{2}{\Theta_1} \left( E - \frac{p_\psi^2}{2\Theta_3} \right) - \frac{2Mglu}{\Theta_1} \right] - \left( \frac{p_\phi - p_\psi u}{\Theta_1} \right)^2 . \end{aligned} \quad (6.129)$$

Gleichung (6.129) führt auf das Integral

$$t - t_0 = \pm \int_{u(t_0)}^{u(t)} \frac{du}{\sqrt{\frac{2}{\Theta_1} (1-u^2) \left( E - \frac{p_\psi^2}{2\Theta_3} - Mglu \right) - \left( \frac{p_\phi - p_\psi u}{\Theta_1} \right)^2}} , \quad (6.130)$$

das die formale Lösung  $u(t)$  und damit  $\theta(t)$  ergibt. Das Polynom unter der Wurzel von Gleichung (6.130) ist 3. Grades in  $u$ , so dass wir auf elliptische Integrale als vollständige Lösungen kommen.

Allerdings ist eine qualitative Diskussion der möglichen Lösungen leicht möglich. Dazu definieren wir die Funktion

$$f(u) \equiv \frac{2}{\Theta_1} (1-u^2) \left( E - \frac{p_\psi^2}{2\Theta_3} - Mglu \right) - \left( \frac{p_\phi - p_\psi u}{\Theta_1} \right)^2 . \quad (6.131)$$

Damit lautet Gleichung (6.129) einfach

$$\dot{u}^2 = f(u) . \quad (6.132)$$

Offensichtlich brauchen wir für reelle Werte von  $\dot{u}$ , dass  $f(u) \geq 0$  zwischen  $|u| \leq 1$ . An den Nullstellen der Funktion  $f$  wechseln  $\dot{u}$  und damit  $\dot{\theta}$  ihr Vorzeichen, d.h. diese Nullstellen definieren gerade die Umkehrpunkte der Bewegung von  $\theta$ .

Für sehr große Absolutwerte von  $|u| \rightarrow \infty$  verhält sich  $f$  asymptotisch wie

$$f(|u| \gg 1) \simeq \frac{2Mgl}{\Theta_1} u^3 \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{für } u \rightarrow \infty \\ -\infty & \text{für } u \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Für die Werte  $u = \pm 1$  ist

$$f(u = \pm 1) = - \left( \frac{p_\phi \mp p_\psi}{\Theta_1} \right)^2 < 0$$

negativ, so dass eine der drei Nullstellen  $u_3 > 1$  von  $f$  im Gebiet  $u > 1$  liegt. Qualitativ ergibt sich das in Abb. 6.18 gezeigte Verhalten der Funktion  $f(u)$ .

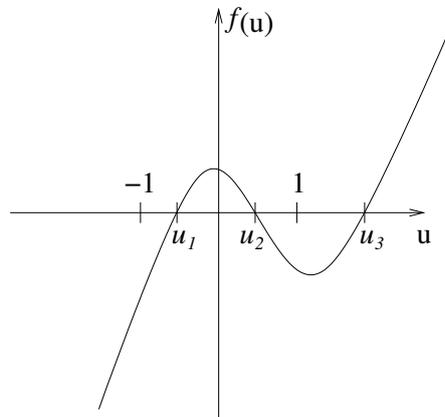


Abbildung 6.18: Qualitatives Verhalten der Funktion  $f(u)$

Die beiden anderen Nullstellen liegen zwischen  $-1 \leq u_1 \leq u_2 < 1$ . Der Winkel  $\Theta$  läuft dann zwischen den Grenzwerten

$$\arccos u_1 \leq \theta \leq \arccos u_2 . \quad (6.133)$$

Diese Neigung der Figurenachse wird *Nutation* genannt.

Es ist üblich, die Bewegung des Kreisels dadurch zu beschreiben, dass man die Schnittkurve der Figurenachse auf einer Kugel mit Einheitsradius um den festgehaltenen Punkt aufträgt. Diese Kurve wird *Locus* der Figurenachse genannt. Die Kugelkoordinaten der Punkte auf dem Locus sind mit den Eulerschen Winkeln  $\phi$  und  $\theta$  identisch. Nach Bedingung (6.133) liegt der Locus zwischen den Kreisen  $\theta_1$  und  $\theta_2$ . Der Verlauf des Winkels  $\phi$  richtet sich nach den Werten von Gleichung (6.123):

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{\Theta_1 \sin^2 \theta}$$

für die möglichen Werte von  $\theta$ .

Je nach den Werten vom Zähler  $p_\phi - p_\psi \cos \theta$  dieses Ausdrucks kann man vier Fälle unterscheiden:

## 6 Bewegung des starren Körpers

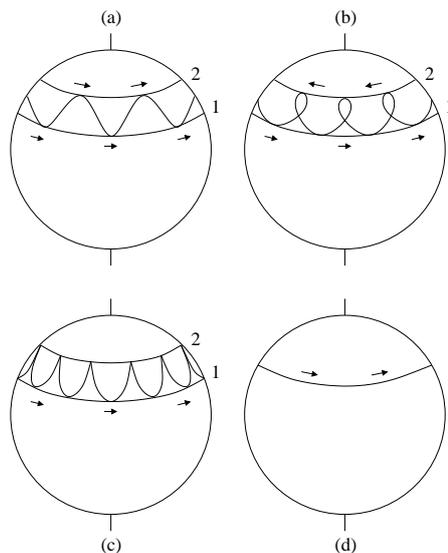


Abbildung 6.19: Nutation des schweren symmetrischen Kreisels

- (a)  $p_\phi - p_\psi \cos \theta_1 \neq 0$  hat das gleiche Vorzeichen wie  $p_\phi - p_\psi \cos \theta_2 \neq 0$ . Dann ergibt sich die in Abb. 6.19a skizzierte zeitliche Variation der Figurenachse.
- (b)  $p_\phi - p_\psi \cos \theta_1 \neq 0$  hat von  $p_\phi - p_\psi \cos \theta_2 \neq 0$  verschiedene Vorzeichen, so dass die Richtung der Präzession an den Grenzkreisen verschieden ist. Es entstehen Schleifen (Abb. 6.19b).
- (c)  $p_\phi - p_\psi \cos \theta_2 = 0$  verschwindet am oberen Kreis, so dass  $\dot{\phi}$  und  $\dot{\theta}$  gleichzeitig Null werden. Die Bahnkurve enthält Spitzen (Abb. 6.19c). Dieser Fall tritt immer dann ein, wenn die Symmetrieachse  $z'$  am Anfang festgehalten wird, so dass sich der Kreisel anfangs nur um seine Symmetrieachse dreht. Die Anfangsbedingungen lauten dann  $\dot{\phi}(0) = \dot{\theta}(0) = \dot{\psi}(0) = 0$  und  $\theta(0) = \theta_2$ .
- (d) Für  $\dot{\theta}(0) = 0$  und bestimmte Anfangsbedingungen führt der schwere Kreisel eine nutationsfreie Präzession (Abb. 6.19d) durch, für die exakt  $\theta = \text{const} \neq 0$  gilt. Diesen Fall diskutieren wir etwas ausführlicher.

### 6.8.3 Nutationsfreie Präzession des schweren, symmetrischen Kreisels

Wir gehen von den Lagrange-Gleichungen für die Winkel  $\theta$ ,  $\phi$  und  $\psi$  aus und setzen dort  $\theta = \theta_0 = \text{const}$  ein.

Aus der Lagrange-Funktion (6.119) folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \Theta_1 \ddot{\theta}, \\ \text{und} \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \Theta_1 \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + \Theta_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) (-\dot{\phi} \sin \theta) + Mgl \sin \theta \\ &= \sin \theta \left[ Mgl + \dot{\phi}^2 (\Theta_1 - \Theta_3) \cos \theta - \Theta_3 \dot{\phi} \dot{\psi} \right], \end{aligned}$$

so dass die erste Lagrange-Gleichung lautet

$$\Theta_1 \ddot{\theta} - \sin \theta \left[ (\Theta_1 - \Theta_3) \dot{\phi}^2 \cos \theta - \Theta_3 \dot{\psi} \dot{\phi} + Mgl \right] = 0.$$

Mit  $\theta = \theta_0 = \text{const}$  folgt  $\ddot{\theta} = 0$  und diese Lagrange-Gleichung liefert

$$(\Theta_1 - \Theta_3) \dot{\phi}^2 \cos \theta_0 - \Theta_3 \dot{\psi} \dot{\phi} + Mgl = 0. \quad (6.134)$$

Ebenso erhalten wir aus der Lagrange-Funktion (6.119)

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= 0 \\ \text{und} \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} &= \Theta_1 \sin^2 \theta \dot{\phi} + \Theta_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \cos \theta \\ &= \Theta_1 \sin^2 \theta_0 \dot{\phi} + \Theta_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta_0) \cos \theta_0, \end{aligned}$$

so dass

$$\Theta_1 \sin^2 \theta_0 \ddot{\phi} + \Theta_3 \cos \theta_0 (\ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos \theta_0) = 0. \quad (6.135)$$

Schließlich erhalten wir aus der Lagrange-Funktion (6.119)

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} &= 0 \\ \text{und} \quad \frac{\partial L}{\partial \psi} &= \Theta_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \\ &= \Theta_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta_0), \end{aligned}$$

so dass aus der Lagrange-Gleichung bezüglich  $\psi$  folgt

$$\Theta_3 (\ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos \theta_0) = 0. \quad (6.136)$$

Setzen wir Gleichung (6.136) in Gleichung (6.135) ein, so folgt sofort  $\ddot{\phi} = 0$  und damit  $\dot{\phi} = \dot{\phi}_0 = \text{const}$ . Damit ergibt sich gemäß Gleichung (6.136)  $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 = \text{const}$ . Beide Konstanten müssen Gleichung (6.134) erfüllen; d.h.

$$(\Theta_1 - \Theta_3) \cos \theta_0 \dot{\phi}_0^2 - \Theta_3 \dot{\phi}_0 \dot{\psi}_0 + Mgl = 0. \quad (6.137)$$

## 6 Bewegung des starren Körpers

(a) 1. Fall: für  $\theta_0 = \pi/2$  oder  $\Theta_1 = \Theta_3$  muss gerade

$$\dot{\phi}_0 = \frac{Mgl}{\Theta_3 \dot{\psi}_0} . \quad (6.138)$$

erfüllt sein.

(b) 2. Fall: für  $\theta_0 \neq \pi/2$  und  $\Theta_1 \neq \Theta_3$  hat die quadratische Gleichung (6.137) für  $\dot{\phi}_0$  die beiden Lösungen

$$\dot{\phi}_{0,1,2} = \frac{1}{2(\Theta_1 - \Theta_3) \cos \theta_0} \left[ \Theta_3 \dot{\psi}_0 \pm \sqrt{\Theta_3^2 \dot{\psi}_0^2 - 4Mgl(\Theta_1 - \Theta_3) \cos \theta_0} \right] . \quad (6.139)$$

Reelle Lösungen existieren nur, wenn das Argument der Wurzel nicht negativ ist, d.h.

$$\dot{\psi}_0^2 \geq \frac{4Mgl(\Theta_1 - \Theta_3) \cos \theta_0}{\Theta_3^2} .$$

Für

$$\dot{\psi}_0 = \left( \frac{2}{\Theta_3} \right) \sqrt{Mgl(\Theta_1 - \Theta_3) \cos \theta_0}$$

ergibt Gleichung (6.139) gerade eine Präzessionsfrequenz

$$\dot{\phi}_0 = \sqrt{\frac{Mgl}{(\Theta_1 - \Theta_3) \cos \theta_0}} ,$$

mit  $\theta_0 \neq \pi/2$ . Für

$$\dot{\psi}_0 > \left( \frac{2}{\Theta_3} \right) \sqrt{Mgl(\Theta_1 - \Theta_3) \cos \theta_0}$$

ergeben sich die zwei Präzessionsfrequenzen (6.139).

Zusammenfassend: Die nutationsfreie Präzession wird nur erreicht, wenn der Kreisel durch einen geeigneten anfänglichen Stoß eine Anfangsgeschwindigkeit  $\dot{\phi}(0) = \dot{\phi}_0$  erhält, die gleich den in den Gleichungen (6.138) und (6.139) errechneten Werten ist.

## 7 Spezielle Relativitätstheorie

Eine große Anzahl von Untersuchungen, besonders die berühmten Experimente von Michelson und Morley, haben gezeigt, dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Richtungen immer gleich ist, und dass sie unabhängig von den relativen gleichförmigen Bewegungen des Beobachters, des übertragenden Mediums und der Lichtquelle ist. Die Galileische Transformation (2.16) kann deshalb nicht richtig sein (siehe Kap. 7.1.2) und muss durch eine andere, die *Lorentz-Transformation*, ersetzt werden, die die Lichtgeschwindigkeit in allen Systemen erhält.

Einstein zeigte, dass eine solche Transformation die Revision der in der Newton-Mechanik gewohnten Begriffe von Zeit und Gleichzeitigkeit erfordert. Er ging noch weiter: aus der experimentellen Tatsache, dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Systemen konstant ist, verallgemeinerte er als grundlegendes Postulat, dass alle Erscheinungen der Physik in allen gleichförmig bewegten Systemen gleich erscheinen. Dieses sogenannte *Äquivalenzpostulat* behauptet, dass es im Sinn einer physikalischen Messung unmöglich ist, ein Koordinatensystem als wirklich *stationär* oder *gleichförmig bewegt* zu kennzeichnen; man kann nur schließen, dass sich zwei Systeme *relativ* zueinander bewegen. Somit müssen Messungen, die vollständig *innerhalb* eines Systems gemacht werden, ungeeignet sein, das System von allen anderen zu unterscheiden, die sich ihm gegenüber gleichförmig bewegen. Das Äquivalenzpostulat fordert, dass alle physikalischen Gesetze für alle gleichförmig bewegten Systeme in identischer Weise ausgedrückt werden müssen. Die Behauptung zum Beispiel, dass die Lichtgeschwindigkeit überall  $c$  ist, bedeutet, dass eine skalare Wellengleichung der Form

$$\vec{\nabla}^2\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (7.1)$$

die Lichtfortpflanzung in allen Systemen beschreibt.

Das Programm der speziellen Relativitätstheorie besteht deshalb aus zwei Teilen. Zuerst muss eine Transformation zwischen zwei gleichförmig bewegten Systemen gewonnen werden, die die Lichtgeschwindigkeit erhält. Zweitens müssen die Gesetze der Physik bezüglich ihrer Transformationseigenschaften gegenüber dieser Lorentz-Transformation überprüft werden. Die Gesetze, deren Form nicht invariant ist, sind so zu verallgemeinern, dass sie dem Äquivalenzpostulat genügen (sog. *kovariante Formulierung physikalischer Gesetze*).

### 7.1 Die Lorentz-Transformation

#### 7.1.1 Ableitung der Transformationsgleichungen

Man denke sich zwei Bezugssysteme  $K$  und  $K'$ , die sich in  $x$ -Richtung mit einer konstanten Relativgeschwindigkeit  $\vec{V}$  zueinander bewegen (Abb.7.1). Aufgrund der Isotropie des Raums

## 7 Spezielle Relativitätstheorie

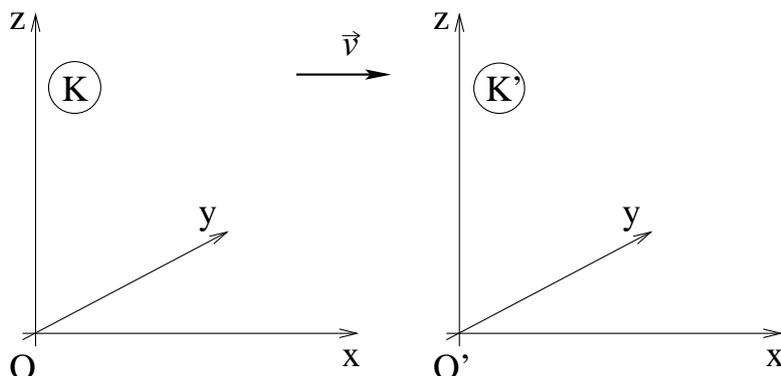


Abbildung 7.1: Die Bezugssysteme  $K$  und  $K'$

ist keine Richtung besonders ausgezeichnet, so dass wir die  $x$ -Achse parallel zu  $\vec{V}$  wählen können.

Zur Zeit  $t = 0$  fallen die Ursprünge der beiden Koordinatensysteme zusammen. Zu diesem Zeitpunkt strahle eine im Ursprung des ungestrichenen Systems befestigte Lichtquelle einen Lichtblitz aus. Ein Beobachter, der sich bezüglich dieses Systems in Ruhe befindet, wird eine sich ausbreitende Kugelwelle sehen, die mit der Geschwindigkeit  $c$  fortschreitet. Die Gleichung der beobachteten Wellenfront lautet:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2. \quad (7.2)$$

Das experimentelle Faktum der Invarianz der Lichtgeschwindigkeit bedeutet, dass auch ein Beobachter im bewegten System  $K'$  das Licht auch so sieht, als breite es sich als Kugelwelle um *seinen* Ursprung aus. Die entsprechende Gleichung der Wellenfront lautet:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \quad (7.3)$$

Wie müssen die Transformationen von  $(x, y, z, t)$  auf  $(x', y', z', t')$  gewählt werden, damit die Gleichungen (7.2) und (7.3) erfüllt sind?

Nach Voraussetzung liegt die Relativgeschwindigkeit  $\vec{V}$  in  $x$ -Richtung. Man kann daher davon ausgehen, dass die Komponenten  $y$  und  $z$  bei der Transformation unangetastet bleiben, d.h.

$$y' = y, \quad z' = z. \quad (7.4)$$

Für  $x'$  und  $t'$  setzen wir lineare Transformationsgleichungen der Art

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad x' &= ax + bt \\ \text{(b)} \quad t' &= ex + ft \end{aligned} \quad (7.5)$$

an, wobei  $a, b, e, f$  Konstanten sind, die von  $V$  und  $c$  abhängen.

Mit den Gleichungen (7.2)–(7.5) folgt

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2 = a^2 x^2 + 2abxt + b^2 t^2 - c^2 (e^2 x^2 + 2efxt + f^2 t^2). \quad (7.6)$$

## 7.1 Die Lorentz-Transformation

Die Gleichung (7.6) gilt für unabhängige Werte von  $x$  und  $t$ , so dass die Koeffizienten vor  $x^2$ ,  $t^2$  und  $xt$  einzeln verschwinden müssen:

$$a^2 - c^2 e^2 = 1, \quad (7.7)$$

$$b^2 - c^2 f^2 = -c^2 \quad (7.8)$$

und 
$$ab - c^2 ef = 0, \quad (7.9)$$

so dass wir drei Gleichungen für vier Unbekannte ( $a, b, e, f$ ) haben.

Die vierte Bestimmungsgleichung folgt aus der Bedingung, dass zur Zeit  $t = 0$  die Nullpunkte der Koordinatensysteme zusammenfallen. Dies impliziert, dass die Position des Ursprungs  $O'$  durch  $x' = 0$  oder  $x = Vt$  gegeben ist. Nach Gleichung (7.5a) heißt das

$$0 = aVt + bt,$$

oder 
$$b = -Va. \quad (7.10)$$

Ebenso ist die Position des Ursprung  $O$  durch  $x = 0$  oder  $x' = -Vt'$  gegeben, so dass nach den Gleichungen (7.5)

$$-Vt' = 0 + bt, \quad t' = 0 + ft,$$

woraus sofort folgt 
$$b = -Vf. \quad (7.11)$$

Der Vergleich der Gleichungen (7.10) und (7.11) liefert dann

$$a = f. \quad (7.12)$$

Setzen wir das Ergebnis (7.11) in Gleichung (7.8) ein, so erhalten wir

$$V^2 f^2 - c^2 f^2 = -c^2,$$

oder 
$$f^2 = \frac{c^2}{c^2 - V^2} = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \gamma^2,$$

mit 
$$\gamma \equiv \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \quad (7.13)$$

und mit Gleichung (7.12) gilt

$$a = f = \gamma. \quad (7.14)$$

In der Definition (7.13) haben wir die positive Wurzel gewählt, damit wir für kleine ( $V \ll c$  so dass  $\gamma \simeq 1$ ) Relativgeschwindigkeiten aus den Transformationen (7.5) wieder die Galilei-Transformation (2.16) erhalten.

Aus den Gleichungen (7.11) und (7.14) folgt weiterhin

$$b = -V\gamma. \quad (7.15)$$

und Gleichung (7.9) liefert

$$e = \frac{b}{c^2} = -\frac{V\gamma}{c^2}. \quad (7.16)$$

## 7 Spezielle Relativitätstheorie

Mit diesen Werten ist Gleichung (7.7) dann ebenfalls erfüllt, denn

$$a^2 - c^2 e^2 = \gamma^2 - c^2 \frac{V^2 \gamma^2}{c^4} = \gamma^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = 1.$$

Für die Transformationsgleichungen (7.5) erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad x' &= \gamma(x - Vt) \\ \text{(b)} \quad t' &= \gamma\left(-\frac{Vx}{c^2} + t\right). \end{aligned} \quad (7.17)$$

Als Umkehrtransformation ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad x &= \gamma(x' + Vt') \\ \text{(b)} \quad \text{und} \quad t &= \gamma\left(\frac{Vx'}{c^2} + t'\right). \end{aligned} \quad (7.18)$$

Es ist üblich, das Verhältnis

$$\beta \equiv \frac{V}{c} \quad (7.19)$$

einzuführen und die Gleichungen (7.17b) und (7.18b) mit  $c$  zu multiplizieren. Wir erhalten dann neben der Beziehung (7.4)

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \quad (7.20)$$

$$\text{und} \quad \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix}. \quad (7.21)$$

Die Gleichungen (7.4), (7.20) und (7.21) werden als *Lorentz-Transformation* bezeichnet. Im Grenzfall  $\beta \ll 1$  folgt sofort mit  $\gamma \simeq 1 + (\beta^2/2) \simeq 1$  aus Gleichung (7.20) die Galilei-Transformation  $x' \simeq x - Vt$  und  $t' \simeq t$ .

Für manche Anwendungen ist es nützlich, die Transformationsformeln auch für den allgemeinen Fall, dass die Relativgeschwindigkeit  $\vec{V}$  nicht in Richtung der  $x$ -Achse zeigt, zu kennen. Man erhält diese, indem man den Ortsvektor

$$\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp} \quad (7.22)$$

in einen Anteil  $\vec{r}_{\parallel} \parallel \vec{V}$  und  $\vec{r}_{\perp} \perp \vec{V}$  aufspaltet. Aus den Gleichungen (7.4) und (7.17) folgt dann

$$\vec{r}'_{\perp} = \vec{r}_{\perp}, \quad \vec{r}'_{\parallel} = \gamma(\vec{r}_{\parallel} - \vec{V}t), \quad t' = \gamma\left(t - \frac{\vec{V} \cdot \vec{r}_{\parallel}}{c^2}\right). \quad (7.23)$$

Weil aber

$$\vec{r}_{\parallel} = \frac{(\vec{r} \cdot \vec{V}) \vec{V}}{V^2}, \quad \vec{r}_{\perp} = \vec{r} - \vec{r}_{\parallel},$$

folgen mit den Gleichungen (7.23)

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= \vec{r}'_{\perp} + \vec{r}'_{\parallel} = \vec{r}_{\perp} + \gamma(\vec{r}_{\parallel} - \vec{V}t) \\ &= \vec{r} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{V})\vec{V}}{V^2} + \gamma \left( \frac{(\vec{r} \cdot \vec{V})\vec{V}}{V^2} - \vec{V}t \right) \\ &= \vec{r} + \frac{\gamma - 1}{V^2} (\vec{r} \cdot \vec{V})\vec{V} - \gamma\vec{V}t\end{aligned}\quad (7.24)$$

und

$$t' = \gamma \left( t - \frac{\vec{V} \cdot \frac{(\vec{r} \cdot \vec{V})\vec{V}}{V^2}}{c^2} \right) = \gamma \left( t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{V}}{c^2} \right) \quad (7.25)$$

als allgemeine Transformationsgleichungen.

Bevor wir einige der bekanntesten Konsequenzen der Lorentztransformation ableiten, betrachten wir das Verhalten der skalaren Wellengleichung (7.1) bei Galilei-Transformation und Lorentz-Transformation.

### 7.1.2 Verhalten der skalaren Wellengleichung bei Galilei-Transformation

Mit der Galilei-Transformation  $x' = x - Vt$ ,  $y' = y$ ,  $z' = z$  und  $t' = t$  und ihrer Umkehrung  $x = x' + Vt$ ,  $y = y'$ ,  $z = z'$  und  $t = t'$  folgt für die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'}, \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} = -V \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y'}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}, \\ \text{so dass} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x'^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y'^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z'^2}\end{aligned}\quad (7.26)$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \left( \frac{\partial}{\partial t'} - V \frac{\partial}{\partial x'} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t'} - V \frac{\partial}{\partial x'} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + V^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2V \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'}.\end{aligned}\quad (7.27)$$

Setzen wir die Ergebnisse (7.26)–(7.27) in die skalare Wellengleichung (7.1) ein, so geht diese von der Form

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

in die Form

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2} + \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} + 2 \frac{V}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x' \partial t'} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2} = 0$$

über. Damit ist bewiesen, dass bei Galilei-Transformation die skalare Wellengleichung nicht forminvariant ist.

### 7.1.3 Verhalten der skalaren Wellengleichung bei Lorentz-Transformation

Wir untersuchen jetzt das Verhalten der skalaren Wellengleichung bei der Lorentz-Transformation (7.17) und (7.4). In diesem Fall erhalten wir für die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} = \gamma \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{V\gamma}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'}, \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} = -V\gamma \frac{\partial}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial}{\partial t'}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y'}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial y'^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z'^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \left( \gamma \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{V\gamma}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right) \left( \gamma \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{V\gamma}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right) \\ &= \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{V^2 \gamma^2}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2 \frac{V\gamma^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} \\ \text{und} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \left( \gamma \frac{\partial}{\partial t'} - V\gamma \frac{\partial}{\partial x'} \right) \left( \gamma \frac{\partial}{\partial t'} - V\gamma \frac{\partial}{\partial x'} \right) \\ &= \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + V^2 \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2\gamma^2 V \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'}.\end{aligned}$$

Mit den beiden letzten Ergebnissen folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{V^2 \gamma^2}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2 \frac{V\gamma^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} \\ &\quad - \frac{\gamma^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{V^2 \gamma^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{2\gamma^2 V}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} \\ &= \gamma^2 \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \left( \frac{V^2}{c^2} - 1 \right) \frac{\gamma^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2}.\end{aligned}$$

Damit ist die Forminvarianz der skalaren Wellengleichung bei Lorentz-Transformation bewiesen.

### 7.1.4 Additionstheorem der Geschwindigkeiten

Wir betrachten jetzt zwei aufeinander folgende Lorentz-Transformationen vom System  $K$  mit der Geschwindigkeit  $\beta_1 = V_1/c$  in das System  $K'$ , und anschließend vom System  $K'$  mit der Geschwindigkeit  $\beta_2 = V_2/c$  in das System  $K''$ . Wir berechnen den Wert der Geschwindigkeit  $\beta_3 = V_3/c$ , mit der sich das System  $K''$  relativ zum System  $K$  bewegt.

Zum einen gilt nach dem Transformationsgesetz (7.20)

$$\begin{pmatrix} x'' \\ ct'' \end{pmatrix} = \gamma_3 \begin{pmatrix} 1 & -\beta_3 \\ -\beta_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}, \quad (7.28)$$

wobei  $\gamma_3 = (1 - \beta_3^2)^{-1/2}$ .

Zum anderen ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'' \\ ct'' \end{pmatrix} &= \gamma_2 \begin{pmatrix} 1 & -\beta_2 \\ -\beta_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} \\ &= \gamma_2 \begin{pmatrix} 1 & -\beta_2 \\ -\beta_2 & 1 \end{pmatrix} \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 & -\beta_1 \\ -\beta_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7.29)$$

wobei  $\gamma_{1,2} = (1 - \beta_{1,2}^2)^{-1/2}$ .

Gleichung (7.29) ergibt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'' \\ ct'' \end{pmatrix} &= \gamma_2 \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 & -\beta_2 \\ -\beta_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \beta_1 ct \\ -\beta_1 x + ct \end{pmatrix} \\ &= \gamma_2 \gamma_1 \begin{pmatrix} x - \beta_1 ct - \beta_2 (-\beta_1 x + ct) \\ -\beta_2 (x - \beta_1 ct) - \beta_1 x + ct \end{pmatrix} \\ &= \gamma_2 \gamma_1 \begin{pmatrix} (1 + \beta_1 \beta_2) x - (\beta_1 + \beta_2) ct \\ -(\beta_1 + \beta_2) x + (1 + \beta_1 \beta_2) ct \end{pmatrix} \\ &= \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2) \begin{pmatrix} x - \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} ct \\ -\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} x + ct \end{pmatrix} \\ &= \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} \\ -\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7.30)$$

Aus der Gleichheit der Ausdrücke (7.28) und (7.30) folgt das *Additionstheorem der Geschwindigkeiten*

$$\beta_3 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}, \quad (7.31)$$

oder 
$$V_3 = \frac{V_1 + V_2}{1 + \frac{V_1 V_2}{c^2}}, \quad (7.32)$$

Das Additionstheorem (7.31) impliziert

$$\begin{aligned} \gamma_3 = (1 - \beta_3^2)^{-1/2} &= \frac{1 + \beta_1 \beta_2}{\sqrt{(1 + \beta_1 \beta_2)^2 - (\beta_1 + \beta_2)^2}} \\ &= \frac{1 + \beta_1 \beta_2}{\sqrt{1 + 2\beta_1 \beta_2 + \beta_1^2 \beta_2^2 - \beta_1^2 - 2\beta_1 \beta_2 - \beta_2^2}} \\ &= \frac{1 + \beta_1 \beta_2}{\sqrt{1 + \beta_1^2 \beta_2^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2}} \\ &= \frac{1 + \beta_1 \beta_2}{\sqrt{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)}} = \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2). \end{aligned}$$

## 7 Spezielle Relativitätstheorie

Gleichung (7.31) besagt, dass  $\beta_3 \leq 1$  immer kleiner als 1 ist  $\forall \beta_1 \leq 1$  und  $\forall \beta_2 \leq 1$ . Es gibt also keine Relativgeschwindigkeiten  $V > c$ , die größer als die Lichtgeschwindigkeit sind.

### 7.1.5 Längenkontraktion

Wir betrachten einen starren Stab, der bezüglich des ungestrichenen Systems in Ruhe ist und auf der  $x$ -Achse liegt. Er habe die Länge  $l = x_2 - x_1$ .

Ein bewegter Beobachter im System  $K'$  misst die Länge des Stabes, indem er die Lage der beiden Endpunkte  $x'_1$  und  $x'_2$  in seinem System zu einem Zeitpunkt  $t'$  lokalisiert. Nach Gleichung (7.18a) finden wir

$$x_1 = \gamma (x'_1 + Vt') , \quad x_2 = \gamma (x'_2 + Vt')$$

und damit für die scheinbare Länge

$$l' = x'_2 - x'_1 = \frac{1}{\gamma} (x_2 - x_1) = \frac{1}{\gamma} l = \sqrt{1 - \beta^2} l . \quad (7.33)$$

Der Stab erscheint dem bewegten Beobachter um den Faktor  $\sqrt{1 - \beta^2}$  verkürzt, dies ist die sog. *Längenkontraktion*.

Man beachte, dass nicht Gleichung (7.17a) zur Berechnung verwendet werden darf, da die Messung zum gleichen Zeitpunkt  $t'$  erfolgt.

### 7.1.6 Zeitdilatation

Wir setzen eine Uhr im ungestrichenen System an einen Punkt  $x_1$ . Zur Zeit  $t_1$  nach dieser Uhr bemerkt ein Beobachter, der sich in diesem Punkt, jedoch im bewegten System, befindet, eine Zeit nach Gleichung (7.17b)

$$t'_1 = \gamma \left( t_1 - \frac{Vx_1}{c^2} \right) .$$

Zur Zeit  $t_2$  findet ein ähnlicher Beobachter in seinem System die Zeit

$$t'_2 = \gamma \left( t_2 - \frac{Vx_1}{c^2} \right) ,$$

so dass das scheinbare Zeitintervall

$$t'_2 - t'_1 = \gamma (t_2 - t_1) = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (7.34)$$

ist. Wenn nach der stationären Uhr eine Stunde vergangen ist, findet der bewegte Beobachter, dass auf seiner Uhr  $\gamma (> 1)$  Stunden vergangen sind. Er wird sagen, die stationäre Uhr gehe langsamer, sie gehe nach. Dies wird *Zeitdilatation* genannt.

Es gilt auch die Umkehrung, da kein System als ein stationäres System ausgezeichnet ist: Ein Beobachter im ungestrichenen System, der die Geschwindigkeit einer Uhr prüft, die fest im gestrichenen System ist, kommt ebenfalls zu dem Schluss, dass die Uhr im Vergleich zu seiner langsamer läuft.

## 7.2 Minkowski-Raum

Wenden wir uns jetzt der zweiten Aufgabe der speziellen Relativitätstheorie zu, nämlich der Prüfung physikalischer Gesetze auf Forminvarianz gegenüber der Lorentz-Transformation. Die Prüfung dieser Kovarianz wird sehr erleichtert, wenn man formal eine vierte Koordinate  $ct$  einführt. Der *Minkowski-Raum* (auch als *Welt-Raum* bezeichnet) besteht dann aus den drei Dimensionen des gewöhnlichen Ortsraums und einer vierten Dimension, die proportional zur Zeit  $t$  ist.

Ein Punkt in diesem vier-dimensionalen Raum erhält dann eine Darstellung in

$$\text{kontravarianten Komponenten:} \quad (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z) \quad (7.35)$$

und eine Darstellung in

$$\text{kovarianten Komponenten:} \quad (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (ct, -x, -y, -z) , \quad (7.36)$$

die durch Stellung der Indizes unterschieden werden. Ein Vektor im Minkowski-Raum mit griechischen Indizes erhält die Bezeichnung

$$(x_\mu) \equiv (x_0, x_1, x_2, x_3) , \quad (x^\mu) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) .$$

Man verwendet die Einsteinsche Summenkonvention, dass in einem Produkt über gleiche griechische Indizes automatisch über diese von 0 bis 3 summiert wird, d.h.

$$x_\mu x^\mu \equiv \sum_{\mu=0}^3 x_\mu x^\mu .$$

Zwischen den kovarianten und kontravarianten Komponenten besteht die Beziehung

$$(x^\mu) = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \equiv (g^{\mu\nu} x_\nu) . \quad (7.37)$$

Das Quadrat des Abstands im Minkowski-Raum wird definiert durch

$$\tau^2 \equiv \frac{1}{c^2} x_\mu x^\mu . \quad (7.38)$$

Gemäß Gleichung (7.37) gilt

$$\tau^2 = \frac{1}{c^2} x_\mu g^{\mu\nu} x_\nu ,$$

d.h.  $g^{\mu\nu}$  definiert den Abstand und wird daher *metrischer Tensor* oder einfach *Metrik* genannt.

Gehen wir jetzt auf infinitesimale Abstände über, so ist das Quadrat des Abstands von zwei nahe benachbarten Ereignissen gegeben durch

$$(d\tau^2) = \frac{1}{c^2} (dx_\mu) (dx^\mu) = \frac{1}{c^2} [c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2] . \quad (7.39)$$

## 7 Spezielle Relativitätstheorie

Die Gleichungen (7.2) und (7.3) implizieren, dass für  $ds = cd\tau = 0$  ebenfalls auch  $ds' = cd\tau' = 0$  im relativ bewegten System erfüllt ist. Es folgt, dass  $ds = ads'$ , und weil weder das ruhende noch das bewegte System ausgezeichnet sind, auch  $ds' = ads$ . Daher muss  $a^2 = 1$  oder  $a = 1$  sein und

$$ds = cd\tau = ds' = cd\tau' \quad (7.40)$$

ist invariant unter Lorentz-Transformation.

Zur anschaulichen Bedeutung von Gleichung (7.38) bemerken wir, dass im Ursprung des Koordinatensystems

$$\tau^2 = \frac{1}{c^2} x_\mu x^\mu = \frac{1}{c^2} \left[ c^2 t^2 - (x=0)^2 - (y=0)^2 - (z=0)^2 \right] = t^2 \quad (7.41)$$

ist, d.h.  $\tau$  entspricht der systemeigenen Zeit (*Eigenzeit*, *Weltzeit*).

Mit diesen Bezeichnungen können wir die Gleichungen (7.2) und (7.3) schreiben als

$$x_\mu x^\mu = x'_\mu x'^\mu . \quad (7.42)$$

Die Lorentztransformation (7.4) und (7.20) lautet

$$x'_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu , \quad (7.43)$$

mit

$$\Lambda_\mu^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (7.44)$$

### 7.2.1 Vierer-Skalare, Vierer-Vektoren und Vierer-Tensoren

In Analogie zur Definition von Skalaren, Vektoren und Tensoren im dreidimensionalen Ortsraum (Kap. 1.5) definieren wir einen Vierer-Vektor (oder einen Tensor 1. Ordnung) als eine Menge von vier Komponenten, die sich gemäß Gleichung (7.44) transformieren, also das gleiche Transformationsverhalten zeigen wie der Vierer-Ortsvektor (7.35).

Ebenso ist ein Vierer-Tensor 2. Ordnung eine Größe mit 16 Komponenten, die sich gemäß

$$T'_{\mu\nu} (x'_\mu) = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\eta T_{\alpha\eta} (x_\mu) \quad (7.45)$$

transformieren.

Ein Vierer-Skalar ist demnach ein Vierer-Tensor 0. Ordnung und ist invariant unter Lorentz-Transformation, d.h.

$$S' (x'_\mu) = S (x_\mu) . \quad (7.46)$$

Das Abstandselement  $(d\tau)^2$  ist ein Vierer-Skalar.

Wenn sich Vierer-Vektoren wie der Vierer-Ortsvektor transformieren, dessen Abstandselement ein Vierer-Skalar ist, dann ist auch das Skalarprodukt eines beliebigen Vierer-Vektors  $Q_\mu = (Q_0, -Q_x, -Q_y, -Q_z)$  mit sich selbst ebenfalls invariant unter Lorentztransformation, d.h.

$$Q^2 = Q_\mu Q^\mu = Q_0^2 - Q_1^2 - Q_2^2 - Q_3^2 = const . \quad (7.47)$$

### 7.3 Lagrange-Formulierung der relativistischen Mechanik

Ebenfalls folgt für zwei Vierer-Vektoren  $Q_\mu$  und  $R_\mu$  mit Gleichung (7.47)

$$(Q_\mu + R_\mu)^2 = Q_\mu Q^\mu + 2Q_\mu R^\mu + R_\mu R^\mu = Q^2 + R^2 + 2Q_\mu R^\mu = \text{const} ,$$

dass das Skalarprodukt

$$Q_\mu R^\mu = Q'_\mu R'^\mu \quad (7.48)$$

invariant ist.

Gelingt es, die physikalischen Gesetze mithilfe von Vierer-Tensoren gleicher Ordnung zu formulieren, ist die Kovarianz besonders leicht zu erkennen.

### 7.3 Lagrange-Formulierung der relativistischen Mechanik

Es seien ein Inertialsystem  $K$  und ein bewegtes Teilchen vorgegeben, das sich mit der momentanen Geschwindigkeit  $\vec{v}$  relativ zu  $K$  bewegt. Es sei weiter  $K_0$  das momentane Ruhesystem des Teilchens, wobei wir die Achsen des Bezugssystems  $K_0$  parallel zu denen von  $K$  wählen. Die Verknüpfung dieser beiden Systeme ist dann durch die Lorentztransformation (7.24) zur Geschwindigkeit  $\vec{V} = \vec{v}$  gegeben. Es gilt dann

$$\begin{aligned} (d\tau)^2 &= \frac{1}{c^2} [c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2] \\ &= \frac{(dt)^2}{c^2} \left[ c^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right] \\ &= (dt)^2 \frac{c^2 - v^2}{c^2} = \frac{(dt)^2}{\gamma^2} , \end{aligned}$$

oder für die Vierer-Invariante

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} , \quad (7.49)$$

mit dem momentanen Lorentzfaktor des Teilchens

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} . \quad (7.50)$$

Das Äquivalenzpostulat erfordert die Gültigkeit des Hamilton-Prinzips in allen Inertialsystemen, d.h. es muss kovariant formuliert werden, d. h. es darf sich der Form nach unter einer Lorentz-Transformation nicht ändern.

Deshalb versucht man, das Wirkungsintegral in den Koordinaten und Geschwindigkeiten des Minkowski-Raums und der Eigenzeit  $\tau$  darzustellen:

$$S = \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau L'(x_\mu, u_\mu, \tau) , \quad (7.51)$$

wobei die Vierer-Geschwindigkeit  $u_\mu$  definiert ist durch

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} = \gamma(c, -\dot{x}, -\dot{y}, -\dot{z}) = \gamma c(1, -\beta_x, -\beta_y, -\beta_z) \quad (7.52)$$

## 7 Spezielle Relativitätstheorie

die Ableitung des Vierer-Ortsvektors  $x_\mu$  nach der Invariante  $\tau$ , und deshalb wieder ein Vierer-Vektor ist. Es gilt

$$u_\mu u^\mu = \gamma^2 [c^2 - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)] = \gamma^2 [c^2 - v^2] = c^2 . \quad (7.53)$$

Die Variation des Wirkungsintegrals (7.51) führt auf die Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L'}{\partial u_\mu} \right) - \frac{\partial L'}{\partial x_\mu} = 0 . \quad (7.54)$$

Man hat jetzt das Problem, dass man zur Berechnung der Lagrange-Funktion  $L'$  eine kovariante Form der Kräfte benötigt. Dies ist aber nur für die elektromagnetische Kraft der Fall, aber nicht bei der Gravitationskraft oder bei Zwangskräften.

Deshalb behandeln wir im Folgenden nur die Lagrange-Formulierung des relativistischen freien Teilchens und von geladenen Teilchen im elektromagnetischen Feld.

### 7.3.1 Freies Teilchen

Wir definieren den *Vierer-Impuls* als

$$p^\mu = m u^\mu = \gamma m (c, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) . \quad (7.55)$$

Die Ortskomponenten ergeben im Grenzfall  $\beta \rightarrow 0$  den bekannten Linear-Impuls  $p$ .

Wir setzen die Lagrange-Funktion für das freie Teilchen an als

$$L' = \frac{m}{2} u_\mu u^\mu . \quad (7.56)$$

da dieser Ansatz zum einen im Grenzfall  $\beta \rightarrow 0$   $L = mv^2/2$  ergibt. Zum anderen ist mit Gleichung (7.53) diese Lagrange-Funktion ein Vierer-Skalar und damit auch das Wirkungsintegral (7.51).

Die Lagrange-Gleichung (7.54) führt dann auf

$$\frac{d}{d\tau} (m u^\mu) = \frac{d p^\mu}{d\tau} = 0 , \quad (7.57)$$

oder  $p^\mu = const .$

Wir definieren die relativistische Energie des freien Teilchens als

$$E = \gamma m c^2 . \quad (7.58)$$

Damit ist dann  $\gamma m c = E/c$  und der Vierer-Impuls (7.55) ist

$$p^\mu = \left( \frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) , \quad (7.59)$$

mit  $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z) = m \gamma \vec{v} .$

Nach Gleichung (7.53) ist dann

$$\begin{aligned} p_\mu p^\mu &= m^2 u_\mu u^\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{m^2 c^4 \gamma^2}{c^2} - m^2 \gamma^2 v^2 \\ &= m^2 \gamma^2 (c^2 - v^2) = m^2 c^2 = const , \end{aligned} \quad (7.60)$$

oder  $E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2 .$  (7.61)

### 7.3.2 Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld

Für ein Teilchen der Ladung  $e$  bietet sich als invariante Lagrange-Funktion an

$$L' = \frac{1}{2} m u_\mu u^\mu + \frac{e}{c} u_\mu A^\mu, \quad (7.62)$$

wobei 
$$A^\mu \equiv (\Phi, A_x, A_y, A_z) \quad (7.63)$$

das Vierer-Potential des elektromagnetischen Feldes ist, dass aus dem in Gleichung (3.232) eingeführten skalaren Potential  $\Phi$  und den Komponenten des Vektorpotentials  $\vec{A}$  gebildet wird.

Für den kanonisch konjugierten Vierer-Impuls folgt damit

$$p^\mu = \frac{\partial L'}{\partial u_\mu} = m u^\mu + \frac{e}{c} A^\mu. \quad (7.64)$$

Insbesondere für die Ortskomponenten ergibt sich wieder Gleichung (3.240)

$$p^i = m u^i + \frac{e}{c} A^i.$$

Bilden wir die Lagrange-Gleichungen mit der Lagrange-Funktion (7.62) erhalten wir

$$\frac{d}{d\tau} \left( m u^\mu + \frac{e}{c} A^\mu \right) - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( \frac{e}{c} u_\nu A^\nu \right) = 0,$$

oder 
$$\frac{d}{d\tau} (m u^\mu) = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( \frac{e}{c} u_\nu A^\nu \right) - \frac{e}{c} \frac{dA^\mu}{d\tau}. \quad (7.65)$$

Schreiben wir dies als generalisierte Newtonsche Bewegungsgleichung

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu \quad (7.66)$$

so folgt die Minkowski-Kraft

$$F^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( \frac{e}{c} u_\nu A^\nu \right) - \frac{e}{c} \frac{dA^\mu}{d\tau}. \quad (7.67)$$

Im Grenzfall  $\beta \rightarrow 0$  stimmen die Ortskomponenten der Minkowski-Kraft mit der früher abgeleiteten Beziehung (3.233) überein.

## 7 *Spezielle Relativitätstheorie*

## 8 Kosmologie fast ohne Allgemeine Relativitätstheorie

In diesem Abschnitt wollen wir die Friedmann-Gleichung für ein Newtonsches Universum ableiten, in dem alle Bewegungen nichtrelativistisch sind und die Gravitation aufgrund der Anziehung zwischen Massen zustandekommt. Wir folgen dabei der Arbeit von Jordan (*Am. J. Phys.* **73**, 653 (2005)).

Die Friedmann-Gleichung entspricht dann der Energieerhaltungsgleichung für die Bewegung einer Galaxie (= Milchstraße) im expandierenden Universum. Durch Ersetzen der Massendichte durch die dazugehörige Energiedichte ergibt sich dann exakt die Friedmann-Gleichung der allgemeinen Relativitätstheorie. Berücksichtigt man die geleistete Arbeit durch den Druck des expandierenden Universums, so folgen die zwei Einstein-Gleichungen, die die Expansion des Universums beschreiben. Ergänzt wird dieses Gleichungssystem durch die Einbeziehung von Strahlungsdruck und Vakuumdruck. Wie wir sehen werden, können wir damit die grundlegende zeitliche Entwicklung des Universums nachvollziehen.

### 8.1 Die Friedmann-Gleichung

Zwei Gleichungen der Kosmologie bestimmen die Expansion des Universums. Beide lassen sich als Energiegleichungen verstehen. Die eine besagt, dass für die Bewegung einer Galaxie im Universum die Summe aus kinetischer und potentieller Energie konstant ist. Die andere beschreibt die geleistete Arbeit, die durch den Druck im expandierenden Universum entsteht. Die Expansion des Universums wird beobachtet als Bewegung von Galaxien zueinander. Das Universum verhält sich wie ein expandierendes Gas von Massenpunkten, wobei die einzelnen Galaxien den Massenpunkten entsprechen: eine einzelne Galaxie expandiert nicht. Hubble hat herausgefunden, dass die Geschwindigkeiten der sich von uns fortbewegenden Galaxien proportional ist zum Abstand  $R$  von uns:

$$\frac{dR}{dt} = HR, \quad (8.1)$$

wobei  $H$  als Hubble-Parameter bezeichnet wird.

Die Gültigkeit des Hubble-Gesetzes (8.1) ist in einem sphärisch isotropen homogenen Universum zu erwarten. Wir nehmen an, dass es genauso gilt für Beobachter an jedem anderen Ort des Universums. Wir nehmen weiter an, dass das Universum in der Tat homogen ist, überall gleich zu jeder Zeit. Gegenwärtig kann diese Homogenität natürlich nur für Längenskalen gelten, die größer als Galaxienhaufen sind.

Die Gravitationskraft zwischen einzelnen Galaxien wirkt gegen die Expansion. Die Gravitationskraft auf eine Galaxie mit der Masse  $m$  im Abstand  $R$  durch die ausgedehnte Masse

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \quad (8.2)$$

des homogenen ( $\rho = \text{const}$ ) Universums innerhalb der Kugel mit dem Radius  $R$  ist genauso groß als wenn diese gesamte Masse im Zentrum der Kugel konzentriert wäre (siehe Vorlesung Elektrodynamik (3.26)). Es existiert keine Gravitationskraft von Kugelschalen des homogenen Universums außerhalb der Kugelschale mit dem Radius  $R$ . Die Summe aus kinetischer und gravitativer potentieller Energie für die Bewegung der Galaxie mit der Masse  $m$  ist dann

$$\frac{1}{2}m \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{GMm}{R} = E, \quad (8.3)$$

wobei  $G$  die Gravitationskonstante bezeichnet und die Konstante  $E$  positiv, negativ oder gleich Null sein kann. Mit dem Hubble-Gesetz (8.1) und Gleichung (8.2) folgt

$$\frac{2E}{mR^2} = H^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho. \quad (8.4)$$

Zu einer gegebenen Zeit unseres homogenen Universums sind  $H$  und  $\rho$  konstant im gesamten Raum des Universums. Deshalb muss auch die linke Seite dieser Gleichung  $2E/mR^2$  für alle Galaxien gleich sein.

Ist die Konstante  $E$  verschieden von Null, können wir die Einheiten und einen Zeitpunkt  $t_1$  so wählen, dass

$$\left| \frac{2E}{mR^2(t_1)} \right| = 1$$

ist. Gleichung (8.4) schreibt sich dann als

$$\frac{\left( \frac{dR}{dt} \right)^2}{R^2} - \frac{8}{3}\pi G\rho = -\frac{kR^2(t_1)}{R^2}, \quad (8.5)$$

wobei  $k = -2E/(mR^2(t_1))$  gleich 1, 0 oder  $-1$  ist, je nachdem ob  $E$  negativ, gleich Null oder positiv ist.  $R^2(t_1)$  entspricht gerade dem Betrag von  $2|E|/m$  und bleibt konstant, während sich  $R$ ,  $dR/dt$ ,  $H$  und  $\rho$  mit der Zeit ändern dürfen.

Aus der speziellen Relativitätstheorie (Kap. 7) kennen wir den Zusammenhang  $E = mc^2$ . Masse und Energie sind äquivalent. Wir benutzen speziell ein Einheitensystem, in dem die Lichtgeschwindigkeit  $c = 1$  ist.  $\rho$  bezeichnet dann die Energiedichte des Universums. Mit  $\rho$  als Energiedichte wird Gleichung (8.5) identisch zur *Friedmann-Gleichung* der allgemeinen Relativitätstheorie, wobei die Werte von  $k = -1, 0, 1$  anzeigen, ob die Krümmung des Raums positiv, Null oder negativ ist.

## 8.2 Die Einstein-Gleichungen

Die Friedmann-Gleichung (8.5) ist eine der beiden Einstein-Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie für das homogene Universum. Die zweite Gleichung folgt aus der Überlegung, dass bei der infinitesimalen Änderung  $dV$  eines Volumenelements  $V$  im Universum

der Druck  $p$  im Volumenelement die Arbeit  $p dV$  leistet, die die Energie im Volumenelement so vermindert, dass für eine Kugel mit dem Radius  $R$

$$d\left(\rho \frac{4}{3}\pi R^3\right) = -pd\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

ist. Es folgt

$$\frac{d(\rho R^3)}{dt} = -p \frac{dR^3}{dt}, \quad (8.6)$$

$$\text{oder} \quad R \frac{d\rho}{dt} + 3(\rho + p) \frac{dR}{dt} = 0. \quad (8.7)$$

Wir schreiben die Friedmann-Gleichung (8.5) als

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi G \rho R^2 - kR^2(t_1). \quad (8.8)$$

Wir berechnen die zeitliche Ableitung dieser Beziehung:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = 2 \frac{dR}{dt} \frac{d^2R}{dt^2} = \frac{8}{3}\pi G \left[2R \frac{dR}{dt} \rho + R^2 \frac{d\rho}{dt}\right],$$

$$\text{d. h.} \quad \frac{dR}{dt} \frac{d^2R}{dt^2} = \frac{4}{3}\pi G R \left[2 \frac{dR}{dt} \rho + R \frac{d\rho}{dt}\right].$$

Auf der rechten Seite benutzen wir Gleichung (8.7) für  $R d\rho/dt$  mit dem Ergebnis

$$\frac{dR}{dt} \frac{d^2R}{dt^2} = \frac{4}{3}\pi G R \frac{dR}{dt} [2\rho - 3(\rho + p)],$$

$$\text{so dass} \quad \frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi G (\rho + 3p) R. \quad (8.9)$$

Die beiden Gleichungen (8.8) und (8.9) werden als *Einstein-Gleichungen* der Kosmologie bezeichnet.

### 8.3 Dichte und Druck des Universums

Der Druck des Universums wird durch die Energiedichte der Bestandteile des Universums bestimmt. Die Energiedichte kommt durch Materie, Strahlung oder das Vakuum zustande. Jede dieser Komponenten ergibt einen anderen Druck.

Die Energiedichte der Materie erzeugt keinen Druck, der die Expansion des Universums beeinflusst. In unserer Näherung stoßen Galaxien nicht zusammen und erzeugen daher keinen thermischen Druck, wie etwa Moleküle in einem Gas. Zwischen der Energiedichte und dem Druck elektromagnetischer Strahlung besteht der Zusammenhang

$$p_\gamma = \frac{1}{3}\rho_\gamma. \quad (8.10)$$

## 8 Kosmologie fast ohne Allgemeine Relativitätstheorie

Für jede einzelne Komponente des Universums gilt die Druckgleichung (8.6):

$$\frac{d(\rho_i R^3)}{dt} = -p_i \frac{dR^3}{dt}, \quad (8.11)$$

wobei  $i$  für  $m$  (Materie),  $\gamma$  (Strahlung) oder  $v$  (Vakuum) steht.

### 8.3.1 Materie

Für Materie ist  $p_m = 0$ , so dass

$$\frac{d(\rho_m R^3)}{dt} = 0, \quad (8.12)$$

$$\text{so dass} \quad \rho_m(t) \propto R^{-3}(t). \quad (8.13)$$

Die Energie in einer Materiekugel ändert sich bei Expansion nicht; die Energiedichte wird gemäß Gleichung (8.13) verdünnt.

### 8.3.2 Strahlung

Für Strahlung folgt aus den Gleichungen (8.10) und (8.11) für

$$\begin{aligned} \frac{d(\rho_\gamma R^4)}{dt} &= \rho_\gamma R^3 \frac{dR}{dt} + R \frac{d(\rho_\gamma R^3)}{dt} = \rho_\gamma R^3 \frac{dR}{dt} - R p_\gamma \frac{dR^3}{dt} \\ \rho_\gamma R^3 \frac{dR}{dt} - \frac{1}{3} R \rho_\gamma 3R^2 \frac{dR}{dt} &= 0, \\ \text{so dass} \quad \rho_\gamma(t) &\propto R^{-4}(t). \end{aligned} \quad (8.14)$$

Der Vergleich der zeitlichen Entwicklung von Materie (Gleichung (8.13)) und Strahlung (Gleichung (8.14)) zeigt, dass zu früheren Zeiten das Universum strahlungsdominiert war.

### 8.3.3 Vakuum

Die Energiedichte des Vakuums ändert sich nicht:

$$\frac{d\rho_v}{dt} = 0. \quad (8.15)$$

Diese Beziehung werden wir im Abschnitt 8.4 mit der Lorentz-Invarianz begründen. Gemäß Gleichung (8.11) folgt dann

$$\frac{d(\rho_v R^3)}{dt} = \rho_v \frac{dR^3}{dt} = -p_v \frac{dR^3}{dt}, \quad (8.16)$$

$$\text{oder} \quad \rho_v = -p_v. \quad (8.17)$$

Das Vakuum besitzt also einen negativen Druck! Damit haben die Energie und der Druck des Vakuums den gleichen Effekt wie Einsteins kosmologische Konstante  $\Lambda$  in den Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie. In der kosmologischen Literatur wird daher  $\Lambda$  oft zur Kennzeichnung von Vakuumenergie und Vakuumdruck benutzt.

### 8.3.4 Quintessenz

Nehmen wir an, dass im Universum eine Komponente existiert mit der Druck-Energie-Beziehung

$$p_w = w\rho_w, \quad (8.18)$$

wobei  $w$  konstant ist. Mit Gleichung (8.11) erhalten wir dann für

$$\begin{aligned} \frac{d(\rho_w R^{3+3w})}{dt} &= R^{3w} \frac{d(\rho_w R^3)}{dt} + \rho_w R^3 \frac{dR^{3w}}{dt} = \\ &= -p_w R^{3w} \frac{dR^3}{dt} + 3w\rho_w R^{3w+2} \frac{dR}{dt} = \\ &= -w\rho_w 3R^{3w+2} \frac{dR}{dt} + 3w\rho_w R^{3w+2} \frac{dR}{dt} = 0, \end{aligned} \quad (8.19)$$

so dass 
$$\rho_w(t) \propto R^{-3-3w}(t). \quad (8.20)$$

Die früheren Gleichungen (8.12), (8.13) und (8.14) ergeben sich gerade als Spezialfälle der Gleichung (8.20) für die Werte  $w = 0$ ,  $w = 1/3$  und  $w = -1$ . Eine Vielzahl von Hypothesen über die Bestandteile des Universums existieren unter dem Namen von *Quintessenz-Modellen*, bei denen man das Druck-Energie-Verhältnis  $w$  frei wählt, insbesondere kleiner als  $-1/3$  wählt und auch als zeitabhängig untersucht.

## 8.4 Vakuumdruck

Die Energiedichte ist die Zeit-Zeit-Komponente  $T_{00}$  des relativistischen Energie-Impuls-Tensors  $T_{\mu\nu}$ . In einem homogenen gleichförmig expandierenden Universum verschwinden für einen Beobachter, der das Universum in Ruhe beobachtet, alle nichtdiagonalen Tensorelemente  $T_{\mu\nu} = 0$  für  $\mu \neq \nu$ , und es gilt

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (8.21)$$

Eine Lorentz-Transformation auf ein anderes Inertialsystem, das sich mit der Geschwindigkeit  $-v$  in z-Richtung bewegt, ergibt gemäß Gleichung (7.45)

$$T'_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\eta} T_{\alpha\eta}, \quad (8.22)$$

mit ( $c=1$ ) 
$$\Lambda_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 & \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix}. \quad (8.23)$$

Wir erhalten dann

$$T'_{00} = \frac{\rho + v^2 p}{1 - v^2}, \quad T'_{11} = T'_{22} = T'_{33} = \frac{p + v^2 \rho}{1 - v^2}. \quad (8.24)$$

Die Forderung nach der Lorentz-Invarianz des Vakuums

$$T_{\mu\nu} = T'_{\mu\nu}$$

liefert dann sofort

$$p = -\rho \quad (8.25)$$

als Zustandsgleichung für das Vakuum.

## 8.5 Zeitliche Entwicklung des Universums

Während der zeitlichen Entwicklung des Universums ändert sich die Energiedichte der Strahlung (8.14) schneller als die von Materie (8.13), wobei die Energiedichte des Vakuums (8.15) konstant bleibt. Zu früheren Zeiten muss daher die Strahlungsenergiedichte dominierend gewesen sein. Zu späten Zeiten muss die Vakuumenergiedichte dominieren. In einem gewissen mittleren Zeitabschnitt ist die Energiedichte durch Materie dominant.

Aufgrund dieser unterschiedlichen zeitlichen Abhängigkeiten der Energiedichten von Strahlung, Materie und Vakuum ist die zeitliche Entwicklung des Universums unterschiedlich zu verschiedenen Zeiten. Wir illustrieren dies anhand der Friedmann-Gleichung (8.8) für verschwindende ( $k = 0$ ) oder vernachlässigbare Werte des Parameters  $k$ .

Es gilt dann

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 \propto \rho R^2. \quad (8.26)$$

Wir betrachten alle Konstituenten des Universums einzeln.

### 8.5.1 Strahlung

Für Strahlung erhalten wir mit Gleichung (8.14)

$$\frac{dR}{dt} \propto \frac{1}{R}, \quad (8.27)$$

oder 
$$R \propto t^{1/2}. \quad (8.28)$$

### 8.5.2 Materie

Für Materie erhalten wir mit Gleichung (8.13)

$$\frac{dR}{dt} \propto \frac{1}{R^{1/2}}, \quad (8.29)$$

oder 
$$R \propto t^{2/3}. \quad (8.30)$$

### 8.5.3 Vakuum

Für das Vakuum erhalten wir mit Gleichung (8.15)

$$\frac{dR}{dt} \propto R, \quad (8.31)$$

oder 
$$R \propto e^{ht}. \quad (8.32)$$

mit der Konstanten  $h = (dR/dt)/R$ . Die exponentielle Expansion durch das Vakuum wird als *Inflation* bezeichnet.

### 8.5.4 Quintessenz mit $w = const.$

Für die Quintessenz mit konstantem  $w$ ,  $w \neq -1$  erhalten wir mit Gleichung (8.20)

$$\frac{dR}{dt} \propto R^{-\frac{1+3w}{2}}, \quad (8.33)$$

oder 
$$R \propto t^{\frac{2}{3+3w}}. \quad (8.34)$$

### 8.5.5 Materie und Vakuum

Für Materie und Vakuum erhalten wir mit den Gleichungen (8.13) und (8.15) geschrieben als

$$\rho_v = \rho_{v0} = \frac{\Lambda}{8\pi G},$$

(als Definition von  $\Lambda$ ) und

$$\rho_m = \rho_0 \frac{R_0^3}{R^3}$$

und aus (8.5) (mit  $k = 0$ ) die Differentialgleichung

$$\left( \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{\Lambda}{3} + \frac{8\pi G \rho_0 R_0^3}{3R^3}.$$

Durch Einsetzen zeigt man, dass die Lösung durch

$$R(t) = c_1 \sinh^{2/3} \left[ \sqrt{3\Lambda} \frac{t}{2} \right] \propto \sinh^{2/3} \left[ \sqrt{6\pi G \rho_v t} \right]. \quad (8.35)$$

gegeben ist, wobei

$$c_1^3 = \frac{8\pi G \rho_0 R_0^3}{\Lambda} = \frac{\rho_0 R_0^3}{\rho_{v0}}.$$

## 8.6 Kritische Dichte

Für  $k = 0$  ergibt die Friedmann-Gleichung (8.5)

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (8.36)$$

was als *kritische Dichte* bezeichnet wird. Wir setzen

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi G\rho}{3H^2}. \quad (8.37)$$

Wir schreiben die Friedmann-Gleichung (8.5) in der Form

$$H^2(\Omega - 1) = k \frac{R^2(t_1)}{R^2}. \quad (8.38)$$

Wir erkennen, dass für  $k = 0$   $\Omega = 1$  ist. Wenn  $k = -1$  muss  $\Omega < 1$  sein, während für  $k = 1$   $\Omega > 1$  ist. Weil  $H^2 R^2 \geq 0$  entspricht  $k = 1$  oder  $\Omega > 1$  einem geschlossenen Universum,  $k = 0$  oder  $\Omega = 1$  einem flachen Universum und  $k = -1$  oder  $\Omega < 1$  einem offenen Universum.

Neben dem Gesamt-Omega-Parameter (8.37) definieren wir noch

$$\Omega_v = \frac{\rho_v}{\rho} \Omega, \quad \Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho} \Omega, \quad \Omega_\gamma = \frac{\rho_\gamma}{\rho} \Omega. \quad (8.39)$$

Die Friedmann-Gleichung (8.5) lässt sich auch schreiben als

$$\frac{\rho - \rho_c}{\rho} = \frac{\rho - \left(\frac{3H^2}{8\pi G}\right)}{\rho} = \frac{3kR^2(t_1)}{8\pi G\rho R^2}. \quad (8.40)$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt den Anteil der Energiedichte dar, der von der kritischen Dichte abweicht. Aus Beobachtungen wissen wir, dass zur heutigen Zeit dieser Anteil sehr klein ist. Die rechte Seite von Gleichung (8.40) zeigt an, wie sich dieser Anteil als Funktion von  $R$  mit der Expansion des Universums entwickelt hat. Benutzen wir speziell Gleichung (8.14), so sehen wir, dass im frühen Universum, als Strahlung die Energiedichte bestimmt hat, der Anteil (8.40) proportional zu  $\propto R^2$  angewachsen ist. Da der Anteil jetzt klein ist, muss er im frühen Universum sehr klein gewesen sein. Dies verlangt nach einer Erklärung. Man glaubt, dass es im sehr jungen Universum eine inflationäre Phase gegeben hat, in der die Energiedichte hauptsächlich durch Vakuumenergie bestimmt war (siehe Kap. 8.5.3). Da die Vakuumenergiedichte konstant war, fiel der Anteil (8.40) gemäß Gleichung (8.31) proportional zu  $\propto R^{-2} = \exp(-2ht)$  auf sehr kleine Werte.

## 8.7 Zukünftige Beschleunigung des Universums

Für das Verhalten des gegenwärtigen und zukünftigen Universums betrachten wir nur Materie und Vakuum und vernachlässigen den Einfluss der Strahlung, die im frühen Universum wichtig war. Für die Einstein-Gleichung (8.9) erhalten wir dann mit  $p_m = 0$  und  $p_v = -\rho_v$

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi G (\rho_m - 2\rho_v) R. \quad (8.41)$$

## 8.7 Zukünftige Beschleunigung des Universums

Die Beschleunigung ist positiv, Null oder negativ, je nachdem, ob  $2\rho_v$  größer, gleich, oder kleiner als  $\rho_m$  ist. Mit den Omega-Parametern (8.39) gilt für Gleichung (8.41)

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi G\rho_c (\Omega_m - 2\Omega_v) R . \quad (8.42)$$

Wir beginnen mit dem vakuumfreien Fall  $\Omega_v = 0$ . Die Expansion stoppt, falls  $\Omega_m > 1$ , weil damit das Gesamt-Omega  $\Omega > 1$  ist und gemäß Gleichung (8.38) dann  $k = 1$  positiv ist. Gemäß Gleichung (8.3) ist die Konstante  $E$  dann negativ, und die potentielle Energie dominiert die kinetische Energie.

Als nächstes betrachten wir den Fall  $\Omega_v \neq 0$ . Allgemein hört die Expansion des Universums irgendwann einmal auf, falls  $d^2 R/dt^2$  negativ ist und negativ bleibt, bis  $dR/dt = 0$  wird. Wir bezeichnen mit  $\tilde{\rho}_m$  und  $\tilde{R}$  die Werte, für die  $d^2 R/dt^2 = dR/dt = 0$  gilt, und mit  $\rho_m$  und  $R$  die heutigen Werte. Man beachte, dass  $\tilde{\rho}_v = \rho_v$  konstant und immer gleich ist. Nach Gleichung (8.41) gilt dann

$$\tilde{\rho}_m - 2\rho_v = 0 , \quad (8.43)$$

während Gleichung (8.8) für ein geschlossenes ( $k = 1$ ) Universum auf

$$\frac{8}{3}\pi G (\tilde{\rho}_m + \rho_v) \tilde{R}^2 = kR^2 (t_1) = R^2 (t_1) \quad (8.44)$$

führt. Gleichung (8.12) impliziert

$$\rho_m R^3 = \tilde{\rho}_m \tilde{R}^3 . \quad (8.45)$$

Das Einsetzen der Gleichungen (8.43) und (8.45) in Gleichung (8.44) ergibt

$$8\pi G\rho_v \left( \frac{\rho_m}{2\rho_v} \right)^{2/3} = \frac{R^2 (t_1)}{R^2} . \quad (8.46)$$

Die Friedmann-Gleichung (8.5) für  $k = 1$  lautet

$$\frac{R^2 (t_1)}{R^2} = \frac{8}{3}\pi G\rho - H^2 . \quad (8.47)$$

Das Gleichsetzen der Gleichungen (8.46) und (8.47) führt nach Division durch  $H^2$  mit den Omega-Parametern (8.39) und  $\Omega_\gamma = 0$  auf

$$1 - \Omega_m - \Omega_v + \frac{3}{2^{2/3}}\Omega_v^{1/3}\Omega_m^{2/3} = 0 . \quad (8.48)$$

Zur Lösung dieser Gleichung setzen wir

$$x = 1 - \frac{1}{\Omega_m} , \quad y = \left( \frac{\Omega_v}{4\Omega_m} \right)^{1/3} . \quad (8.49)$$

Damit schreibt sich Gleichung (8.48) als

$$4y^3 - 3y + x = 0 , \quad (8.50)$$

oder

$$y^3 - \frac{3}{4}y + \frac{x}{4} = 0 .$$

## 8 Kosmologie fast ohne Allgemeine Relativitätstheorie

Die Zahl der reellen Lösungen hängt ab vom Wert der Diskriminante

$$D = \left(\frac{x}{8}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{x^2 - 1}{64} = \frac{1}{64\Omega_m^2} [1 - 2\Omega_m] . \quad (8.51)$$

Für  $D > 0$  oder  $\Omega_m < 1/2$  erhalten wir als einzige reelle Lösung

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2} \left[ \left( \sqrt{x^2 - 1} - x \right)^{1/3} - \left( \sqrt{x^2 - 1} + x \right)^{1/3} \right] \\ \text{und damit } \Omega_{v1} &= 4\Omega_m y_1^3 \\ &= 1 - \Omega_m + \frac{3}{2}\Omega_m^{2/3} \left( \sqrt{1 - 2\Omega_m} + 1 - \Omega_m \right)^{1/3} \\ &\quad - \frac{3}{2}\Omega_m^{2/3} \left( \sqrt{1 - 2\Omega_m} - 1 + \Omega_m \right)^{1/3} . \end{aligned} \quad (8.52)$$

Für  $D = 0$  oder  $\Omega_m = 1/2$  ist  $x = -1$ , und Gleichung (8.50) reduziert sich auf

$$4y^3 - 3y - 1 = 4(y - 1) \left( y + \frac{1}{2} \right)^2 = 0 ,$$

mit den Lösungen  $y_1 = 1$  und  $y_2 = -1/2$ , so dass

$$\Omega_{v1} = 2 , \quad \Omega_{v2} = -\frac{1}{4} . \quad (8.53)$$

Für  $D < 0$  oder  $\Omega_m > 1/2$  erhalten wir die drei reellen Lösungen

$$y_1 = \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos x \right] , \quad (8.54)$$

$$y_2 = \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos x + \frac{\pi}{3} \right] , \quad (8.55)$$

$$y_3 = \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos x - \frac{\pi}{3} \right] , \quad (8.56)$$

$$\text{oder } \Omega_{v1} = 4\Omega_m \cos^3 \left[ \frac{1}{3} \arccos x \right] \quad (8.57)$$

$$\Omega_{v2} = 4\Omega_m \cos^3 \left[ \frac{1}{3} \arccos x + \frac{\pi}{3} \right] , \quad (8.58)$$

$$\Omega_{v3} = 4\Omega_m \cos^3 \left[ \frac{1}{3} \arccos x - \frac{\pi}{3} \right] . \quad (8.59)$$

## 8.8 Rotverschiebung, Lichtlaufzeit und Alter des Universums

Licht, das von einer entfernten Galaxie bei der Wellenlänge  $\lambda$  emittiert wird, wird von einem Beobachter hier bei der Wellenlänge  $\lambda_0$  beobachtet, wobei

$$\lambda_0 = \lambda(1 + z) \quad (8.60)$$

## 8.8 Rotverschiebung, Lichtlaufzeit und Alter des Universums

und  $z$  der *Rotverschiebungsparameter* ist. Mit der Expansion des Universums vergrößern sich die Wellenlängen proportional zum Abstand  $R$ . Mit dem gegenwärtigen Wert  $R_0$  definieren wir

$$r = \frac{R}{R_0}, \quad (8.61)$$

so dass zum Zeitpunkt der Lichtemission

$$r = \frac{1}{1+z}. \quad (8.62)$$

Es bietet sich an, die Abstände als Funktion von  $r$  zu schreiben und die Zeit  $t = \tau/H_0$  in Einheiten der gegenwärtigen Hubble-Zeit  $H_0^{-1}$  mit  $H_0 = H(R_0)$  zu messen. Die Gleichungen (8.13) und (8.14) führen dann auf

$$\rho_m = \rho_{m0} \left( \frac{R_0}{R} \right)^3 = \frac{\rho_{m0}}{r^3}, \quad \rho_\gamma = \rho_{\gamma0} \left( \frac{R_0}{R} \right)^4 = \frac{\rho_{\gamma0}}{r^4}, \quad (8.63)$$

wobei  $\rho_{m0} = \rho_m(R_0)$  und  $\rho_{\gamma0} = \rho_\gamma(R_0)$  die heutige Materiedichte und Strahlungsdichte sind und  $\rho_v = \rho_{v0} = \text{const.}$

Für die Einstein-Gleichung (8.9) erhalten wir dann

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\frac{\Omega_{\gamma0}}{r^3} - \frac{\Omega_{m0}}{2r^2} + \Omega_{v0}r. \quad (8.64)$$

Für das heutige Hubble-Gesetz gilt nach Gleichung (8.1)

$$\frac{dR}{dt} = H_0 R,$$

oder

$$\frac{dr}{d\tau} = r = 1 \quad (8.65)$$

bei  $r = 1$ . Nach Multiplikation der Einstein-Gleichung (8.64) mit  $dr/d\tau$  folgt

$$\frac{dr}{d\tau} \frac{d^2 r}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 = \left[ -\frac{\Omega_{\gamma0}}{r^3} - \frac{\Omega_{m0}}{2r^2} + \Omega_{v0}r \right] \frac{dr}{d\tau},$$

mit dem Integral 
$$\left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 = c_2 + \left[ \frac{\Omega_{\gamma0}}{r^2} + \frac{\Omega_{m0}}{r} + \Omega_{v0}r^2 \right] \quad (8.66)$$

und der Integrationskonstanten  $c_2$ . Für  $r = 1$  erhalten wir aus dieser Gleichung mit Gleichung (8.65)

$$c_2 = 1 - \Omega_{\gamma0} - \Omega_{m0} - \Omega_{v0} = 1 - \Omega_0.$$

Für Gleichung (8.66) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 &= 1 - \Omega_{\gamma0} - \Omega_{m0} - \Omega_{v0} + \left[ \frac{\Omega_{\gamma0}}{r^2} + \frac{\Omega_{m0}}{r} + \Omega_{v0}r^2 \right] \\ &= 1 - \Omega_0 + \left[ \frac{\Omega_{\gamma0}}{r^2} + \frac{\Omega_{m0}}{r} + \Omega_{v0}r^2 \right], \end{aligned} \quad (8.67)$$

oder 
$$\frac{dr}{d\tau} = \left[ 1 - \Omega_0 + \frac{\Omega_{\gamma0}}{r^2} + \frac{\Omega_{m0}}{r} + \Omega_{v0}r^2 \right]^{1/2}, \quad (8.68)$$

## 8 Kosmologie fast ohne Allgemeine Relativitätstheorie

mit der Lösung für die Lichtlaufzeit vom Ort  $r$  zu uns

$$t(r) = H_0^{-1} \tau(r) = H_0^{-1} \int_r^1 \frac{dx}{\left[1 - \Omega_0 + \frac{\Omega_{\gamma 0}}{x^2} + \frac{\Omega_{m0}}{x} + \Omega_{v0} x^2\right]^{1/2}}. \quad (8.69)$$

Für  $r = 0$  ergibt sich das Alter des Universums zu

$$t(0) = H_0^{-1} \int_0^1 \frac{dx}{\left[1 - \Omega_0 + \frac{\Omega_{\gamma 0}}{x^2} + \frac{\Omega_{m0}}{x} + \Omega_{v0} x^2\right]^{1/2}}. \quad (8.70)$$

### 8.8.1 Strahlungsdominiertes Universum ( $\Omega_{v0} = \Omega_{m0} = 0$ )

Besteht die Energiedichte des Universums nur aus Strahlung ( $\Omega_{v0} = \Omega_{m0} = 0$ ), so folgt für die Lichtlaufzeit (8.69)

$$\tau(r) = \int_r^1 dx \frac{x}{\sqrt{\Omega_{\gamma 0} + (1 - \Omega_{\gamma 0}) x^2}} = \frac{1}{1 - \Omega_{\gamma 0}} \left[1 - \sqrt{\Omega_{\gamma 0} + (1 - \Omega_{\gamma 0}) r^2}\right] \quad (8.71)$$

und für das Alter des Universums (8.70)

$$\tau(0) = \frac{1 - \sqrt{\Omega_{\gamma 0}}}{1 - \Omega_{\gamma 0}} = \frac{1}{1 + \Omega_{\gamma 0}^{1/2}}. \quad (8.72)$$

### 8.8.2 Materiedominiertes Universum ( $\Omega_{v0} = \Omega_{\gamma 0} = 0$ )

Besteht die Energiedichte des Universums nur aus Materie ( $\Omega_{v0} = \Omega_{\gamma 0} = 0$ ), so folgt für die Lichtlaufzeit (8.69)

$$\tau(r, \Omega_{m0}) = \int_r^1 dx \frac{x}{\sqrt{\Omega_{m0} x + (1 - \Omega_{m0}) x^2}}.$$

Für  $\Omega_{m0} = 1$  erhalten wir

$$\tau(r, \Omega_{m0} = 1) = \frac{2}{3} \left(1 - r^{3/2}\right), \quad (8.73)$$

so dass das Alter durch

$$\tau(0, \Omega_{m0} = 1) = \frac{2}{3} \quad (8.74)$$

gegeben ist. Für nahe Objekte  $r = 1/(1+z)$  mit  $z \ll 1$  folgt aus Gleichung (8.73)

$$\tau\left(\frac{1}{1+z}, \Omega_{m0} = 1, z \ll 1\right) \simeq z - \frac{5}{4} z^2. \quad (8.75)$$

## 8.8 Rotverschiebung, Lichtlaufzeit und Alter des Universums

Für  $\Omega_{m0} < 1$  gilt

$$\begin{aligned} \tau(r, \Omega_{m0} < 1) = & \frac{1 - \sqrt{\Omega_{m0}r + (1 - \Omega_{m0})r^2}}{1 - \Omega_{m0}} \\ & - \frac{\Omega_{m0}}{2[1 - \Omega_{m0}]^{3/2}} \\ & \times \ln \frac{2\sqrt{1 - \Omega_{m0}} + 2 - \Omega_{m0}}{2\sqrt{(1 - \Omega_{m0})[\Omega_{m0}r + (1 - \Omega_{m0})r^2]} + 2(1 - \Omega_{m0})r + \Omega_{m0}} \end{aligned} \quad (8.76)$$

und für das Alter

$$\tau(0, \Omega_{m0} < 1) = \frac{1}{1 - \Omega_{m0}} - \frac{\Omega_{m0}}{2[1 - \Omega_{m0}]^{3/2}} \ln \frac{2\sqrt{1 - \Omega_{m0}} + 2 - \Omega_{m0}}{\Omega_{m0}}. \quad (8.77)$$

Für  $\Omega_{m0} > 1$  gilt

$$\begin{aligned} \tau(r, \Omega_{m0} > 1) = & \frac{\sqrt{\Omega_{m0}r + (1 - \Omega_{m0})r^2} - 1}{\Omega_{m0} - 1} \\ & + \frac{\Omega_{m0}}{2[\Omega_{m0} - 1]^{3/2}} \\ & \times \left[ \arcsin \Omega_{m0} - 2(\Omega_{m0} - 1)r\Omega_{m0} - \arcsin \frac{2 - \Omega_{m0}}{\Omega_{m0}} \right] \end{aligned} \quad (8.78)$$

und für das Alter

$$\tau(0, \Omega_{m0} > 1) = \frac{\Omega_{m0}}{2[\Omega_{m0} - 1]^{3/2}} \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{2 - \Omega_{m0}}{\Omega_{m0}} \right] - \frac{1}{\Omega_{m0} - 1}. \quad (8.79)$$

### 8.8.3 Vakuumdominiertes Universum ( $\Omega_{m0} = \Omega_{\gamma 0} = 0$ )

Besteht die Energiedichte des Universums nur aus Vakuum ( $\Omega_{m0} = \Omega_{\gamma 0} = 0$ ), so folgt für die Lichtlaufzeit (8.69)

$$\tau(r) = \frac{1}{\Omega_{v0}^{1/2}} \left[ \operatorname{arsinh} \frac{\Omega_{v0}^{1/2}}{1 - \Omega_{v0}^{1/2}} - \operatorname{arsinh} \frac{\Omega_{v0}^{1/2}}{1 - \Omega_{v0}^{1/2}} r \right] \quad (8.80)$$

und für das Alter

$$\tau(0) = \frac{1}{\Omega_{v0}^{1/2}} \operatorname{arsinh} \frac{\Omega_{v0}^{1/2}}{1 - \Omega_{v0}^{1/2}}. \quad (8.81)$$

8 *Kosmologie fast ohne Allgemeine Relativitätstheorie*

# A Anhang

## A.1 Mathematischer Anhang

### A.1.1 Näherungsformeln

Taylor-Entwicklung um den Punkt  $x_0$ :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n .$$

Für Werte  $x \ll 1$  gelten folgende Näherungen aus der Taylor-Entwicklung:

$$\begin{aligned} \sin x &\simeq x, & \cos x &\simeq 1, & \tan x &\simeq x \\ \sqrt{1 \pm x} &\simeq 1 \pm \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{1 \mp x} &\simeq 1 \pm x \end{aligned}$$

und allgemein

$$(1 + x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x .$$

### A.1.2 Eulersche Formeln und Umkehrung

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x & \cos x &= \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) \\ e^{-ix} &= \cos x - i \sin x & \sin x &= \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) . \end{aligned}$$

### A.1.3 Darstellung des $\vec{\nabla}$ -Operators in verschiedenen Koordinatensystemen

$$\begin{aligned} \text{I) kartesisch:} & \quad \vec{\nabla} = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} \\ \text{II) zylindrisch:} & \quad \vec{\nabla} = \vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \\ \text{III) sphärisch:} & \quad \vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} . \end{aligned}$$

### A.1.4 Rechenregeln für den $\vec{\nabla}$ -Operator (vgl. auch 1.10)

#### I Summenregeln

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(f+g) &= \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{a} + \vec{\nabla} \cdot \vec{b} \\ \vec{\nabla} \times (\vec{a} + \vec{b}) &= \vec{\nabla} \times \vec{a} + \vec{\nabla} \times \vec{b}.\end{aligned}$$

#### II Produktregeln

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(fg) &= f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f \\ \vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) + (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} \\ \vec{\nabla} \cdot (f\vec{a}) &= f(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) + \vec{a} \cdot (\vec{\nabla}f) \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b}) \\ \vec{\nabla} \times (f\vec{a}) &= f(\vec{\nabla} \times \vec{a}) + \vec{a} \times (\vec{\nabla}f) \\ \vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) &= (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} + \vec{a}(\vec{\nabla} \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}).\end{aligned}$$

#### III Quotientenregeln

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \left( \frac{f}{g} \right) &= \frac{g\vec{\nabla}f - f\vec{\nabla}g}{g^2} \\ \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{a}}{g} \right) &= \frac{g(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla}g)}{g^2} \\ \vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{a}}{g} \right) &= \frac{g(\vec{\nabla} \times \vec{a}) + \vec{a} \times (\vec{\nabla}g)}{g^2}.\end{aligned}$$

#### IV Kombination vektorieller Differentialoperatoren

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \operatorname{grad} f &= \vec{\nabla}^2 f = \Delta f \\ \operatorname{rot} \operatorname{grad} f &= \vec{0} \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} &= 0 \\ \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{a}) &= \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{a}) - \Delta \vec{a} \\ \operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) &= \vec{b} \cdot (\operatorname{rot} \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\operatorname{rot} \vec{b}).\end{aligned}$$

V Für eine Funktion  $f$ , die nur vom Betrag  $r = |\vec{x}|$  eines Vektors  $\vec{x}$  abhängt, gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i} f(r) &= f'(r) \frac{\partial r}{\partial x_i} = f'(r) \frac{x_i}{r} \\ \text{und} \quad \vec{\nabla} f(r) &= f'(r) \frac{\vec{x}}{r}.\end{aligned}$$

## **A.2 Empfohlene Literatur**

### **A.2.1 Bücher zur Theoretischen Mechanik:**

Goldstein: Klassische Mechanik

Greiner: Mechanik I+II

Fließbach: Mechanik

Landau Lifshitz: Lehrbuch der theoretischen Physik, Band 1: Mechanik

### **A.2.2 Bücher für mathematische Formeln (“Grundausstattung”):**

K. Rottmann: Mathematische Formelsammlung

I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, G. Musiol, H. Mühlig: Taschenbuch der Mathematik, Harri Deutsch Verlag

M. Abramowitz, I. A. Stegun: Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards (oder Dover Publ.)

I, S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik: Tables of Integrals, Series and Products (deutsche Übersetzung: Harri Deutsch Verlag)

### **A.2.3 Bücher für mathematische Physik (“Grundausstattung”):**

G. Arfken: Mathematical Methods for Physicists, Academic Press

C. R. Wylie: Advanced Engineering Mathematics, McGraw-Hill

P. M. Morse, H. Feshbach: Methods of Theoretical Physics, Vol. I and II, McGraw-Hill