Übungen zur 'Einführung in die Astroteilchenphysik'

WS 2010/11 - Zettel 3 (Ausgabe: 12.Nov. 2010, Abgabe: 26.Nov. 2010)

Vorlesung: Jun-Prof Dr. J. Becker
Übung: K. Brodatzki & M. Olivo (Raum: NB 7/29, Tel: 23458)

Ü-Zettel im Netz unter http://www.tp4.rub.de/∼julia/atp/

Aufgabe 6) Rankine-Hugoniot Schockbedingungen (5 Punkte)

Betrachten Sie ein ideales Gas mit einer ebenen Schockfront in dem Bezugssystem, in dem die Schockfront ruht. Die sogenannten Rankine-Hugoniot Relationen geben die physikalischen Kontinuitätsbedingungen an der Schockfront zwischen dem ungeschockten (Index „1") und geschockten (Index „2") Plasma an (siehe Vorlesung):

$$\begin{aligned} \rho_1 \cdot v_1 &= \rho_2 \cdot v_2 \quad \text{(Masse)} && (1)\\ p_1 + \rho_1 \cdot v_1^2 &= p_2 + \rho_2 \cdot v_2^2 \quad \text{(Impuls)} && (2)\\ \rho_1 \cdot v_1 \cdot \left(\frac{1}{2}v_1^2 + \epsilon_1 + \frac{p_1}{\rho_1}\right) &= \rho_2 \cdot v_2 \cdot \left(\frac{1}{2}v_2^2 + \epsilon_2 + \frac{p_2}{\rho_2}\right) \quad \text{(Energie)} && (3) \end{aligned}$$

Hier ist v_i Geschwindigkeit, p_i Druck, ρ_i Dichte und ϵ_i innere Energie für $i = 1, 2$.

Im idealen Gas gilt

$$\epsilon + \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p}{\rho}\,. \qquad (4)$$

Ziel dieser Aufgabe ist es, Ausdrücke für die Verhältnisse von Dichte und Druck in Abhängigkeit der Machzahl $M_1 = v_1/c_1$ des ungeschockten Plasmas und des Adiabatenkoeffizienten $\gamma = c_p/c_v$ herzuleiten. Hier sind $c_1 = \sqrt{\gamma \cdot p_1/\rho_1}$ Schallgeschwindigkeit des betrachteten Mediums, und c_p sowie c_v die spezifische Wärme bei konstantem Druck bzw. konstantem Volumen.

Gehen Sie hierfür wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie unter Verwendung von Gleichung (1) und (2), dass

$$j^2 = \frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}}\,. \qquad (5)$$

Hier ist $j := v_1 \cdot \rho_1 = v_2 \cdot \rho_2$.

(b) Leiten Sie unter Verwendung der Gleichungen (3) und (5) folgenden Ausdruck für das Verhältnis der Dichten her:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1) \cdot p_2 + (\gamma-1) \cdot p_1}{(\gamma+1) \cdot p_1 + (\gamma-1) \cdot p_2}\,. \qquad (6)$$

(c) Eliminieren Sie ρ_2 in Gleichung (5) unter der Verwendung von Gleichung (6), und verwenden Sie das Resultat, um folgende Beziehung herzuleiten:

$$v_1^2 = \frac{1}{2}\frac{p_1}{\rho_1} \cdot \left((\gamma+1) \cdot \frac{p_2}{p_1} + (\gamma - 1)\right)\,. \qquad (7)$$

Ersetzen Sie dann v_1 durch die Machzahl $M_1 = v_1 \cdot \sqrt{\rho_1/(\gamma \cdot p_1)}$ und bestimmen Sie das Verhältnis p_2/p_1 in Abhängigkeit von M_1 und γ:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\,\gamma\,M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}\,. \qquad (8)$$

(d) Bestimmen Sie p_2/p_1 für große Geschwindigkeiten, $M_1 >> 1$. Setzen Sie den erhaltenen Ausdruck in Gleichung (6) ein und bestimmen Sie auch das Verhältnis ρ_2/ρ_1 für große Geschwindigkeiten.

(e) Für monoatomare Gase gilt $\gamma = 5/3$. Wie lautet das Verhältnis ρ_2/ρ_1 für ein monoatomares Gas im Grenzwert großer Geschwindigkeiten?

Aufgabe7) Die Kontinuitätsgleichung (5 Punkte)

Zur Herleitung der Kontinuitätsgleichung wird das 0. Moment der Boltzmanngleichung gebildet (siehe Vorlesung). Hierbei tritt folgender Term auf:

$$\int \frac{\vec{F}}{m} \Delta_v f \, d^3 v \tag{9}$$

Die Kraft $\vec{F}$ ist gegeben durch

$$\vec{F} = q \cdot \left[\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \right] . \tag{10}$$

Zeigen Sie, dass der Term (9) verschwindet, wenn über den gesammten Geschwindigkeitsraum $\mathbb{R}^3$ integriert wird.

Aufgabe 8) Spallation (5 Punkte)

Wie in der Vorlesung besprochen, lauten die Differentialgleichungen für leichte („L”) und mittelschwere („M”) Kerne:

$$\frac{\partial n_L}{\partial t} = -\frac{n_L}{\tau_L} + \frac{P_{LM}}{\tau_M} \cdot n_M \tag{11}$$

$$\frac{\partial n_M}{\partial t} = -\frac{n_M}{\tau_M} . \tag{12}$$

Zeigen Sie, dass die Lösungen der Gleichungen (11) und (12) wie folgt lauten:

$$n_M(t) = n_{M,0} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_M} \right) \tag{13}$$

$$n_L(t) = n_M(t) \cdot P_{ML} \cdot \frac{\tau_L}{\tau_M - \tau_L} \cdot \left[1 - \exp\left(\frac{t}{\tau_M} - \frac{t}{\tau_L} \right) \right] . \tag{14}$$

Hinweis: Die Differentialgleichung für n_L wird am einfachsten durch Erweiterung mit $\exp(t/\tau_L)$ und Integration über t gelöst.