# Übungen zur 'Einführung in die Astroteilchenphysik'

WS 2010/11 - Zettel 4 (Ausgabe: 26.Nov. 2010, Abgabe: 10.Dez. 2010)

Vorlesung: Jun-Prof Dr. J. Becker
Übung: K. Brodatzki & M. Olivo (Raum: NB 7/29, Tel: 23458)

Ü-Zettel im Netz unter http://www.tp4.rub.de/∼julia/atp/

## Aufgabe 9) Gyromagnetischer Radius (5 Punkte)

Bei der Bewegung eines geladenen Teilchens in einem magnetischen Feld ist der sog. gyromagnetische Radius durch das Kräftegleichgewicht zwischen Lorentz- und Zentrifugalkraft definiert.

(a) Bestimmen Sie den gyromagnetischen Radius in Abhängigkeit der Energie für einen Kern der Ladung Z unter der Annahme, dass der interstellare Raum von einem Magnetfeld der Stärke $B = 3\,\mu$G erfüllt ist.

(b) Berechnen Sie konkrete Werte für Protonen und Eisenkerne mit Energien von $10^{15}$ eV, $10^{18}$ eV und $10^{20}$ eV. Geben Sie das Ergebnis in der Einheit pc an.

(c) Berechnen Sie die Grenzenergien für Protonen und Eisenkerne, die gerade noch in der Milchstraße gehalten werden können.

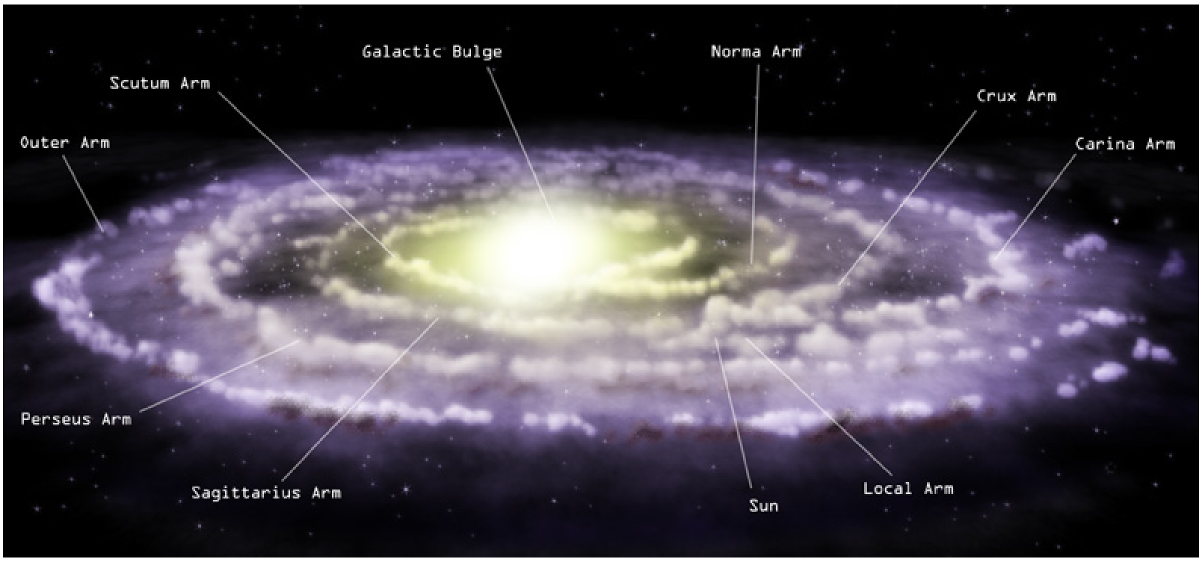


Abbildung 1: Illustration der Milchstrasse mit Spiralarmen, zentralem Bulge und der Sonnenposition. (Illustration: NASA/CXC/M.Weiss, http://chandra.harvard.edu/photo/2006/w3/more.html)

## Aufgabe 10) Vierer-Beschleunigung (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die parallele und die senkrechte Komponente der Vierer-Beschleunigung folgende Relationen erfüllen:

$$a'_{||} = \gamma^3 a_{||} \qquad \text{und} \qquad a'_\perp = \gamma^2 a_\perp \ . \tag{1}$$

Hinweise:

i) Zeigen Sie zunächst, dass aus der Definition der Vierer-Geschwindigkeit, $\vec{U} = \gamma(c, \vec{u})$, folgt:

$$\vec{A} = \frac{d\vec{U}}{d\tau} = \gamma^2 \left( \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} c,\ \vec{a} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \vec{u} \right) \qquad \text{mit} \qquad \dot{\gamma} = \gamma^3 \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{c^2} \ . \tag{2}$$

Dabei ist $\tau = t/\gamma$ die Eigenzeit. Beachten Sie, dass für einen Vektor $\vec{v}$ allgemein gilt: $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$.

ii) Teilen Sie das Problem in zwei Teile auf. Wählen Sie z.B. für die parallele Komponente ein System $K'$, in dem das Teilchen instantan ruht ($\vec{v}' = 0, \gamma = 1$) und welches sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = v\hat{x}$ bewegt. In einem solchen System erfährt das Teilchen dann die Beschleunigung $\vec{a'} = (0, a', 0, 0)$. Außerdem sind die Komponenten von $\vec{a}$ und $\vec{a}'$ bzw. $\vec{A}$ und $\vec{A}'$ über die Lorentztransformation miteinander verknüpft. Wählen Sie für die senkrechte Komponente analog ein System $K''$, in dem $\vec{a}'' = (0, 0, a''_y, a''_z)$.

## Aufgabe 11) Strahlungsleistung (5 Punkte)

Betrachten Sie ein geladenes Teilchen (Ruhesystem $K'$), das sich im System $K$ mit relativistischer Geschwindigkeit bewegt.

(a) Zeigen Sie, dass für die Leistung $dP/d\Omega = (dW/dt)/d\Omega$, die von einem ruhenden Beobachter (System $K$) empfangen wird, gilt:

$$\frac{dP_r}{d\Omega} = [\gamma^4 (1 + \beta \cos\theta')^4] \frac{dP'}{d\Omega'} \tag{3}$$

und

$$\frac{dP_r}{d\Omega} = \left[ \frac{1}{\gamma^4 (1 - \beta \cos\theta)^4} \right] \frac{dP'}{d\Omega'} \ , \tag{4}$$

wobei $d\Omega = d\cos\theta\, d\phi$ und $d\Omega' = d\cos\theta'\, d\phi'$. Benutzen Sie dazu folgende Relationen:

$$\frac{dW}{d\Omega} = [\gamma^3 (1 + \beta \cos\theta')^3] \frac{dW'}{d\Omega'} \qquad \text{und} \qquad \cos\theta = \frac{\cos\theta' + \beta}{1 + \beta \cos\theta'} \ . \tag{5}$$

(b) Geschieht die Beschleunigung senkrecht zur Geschwindigkeit, dann gilt für die Strahlungsleistung im Beobachtersystem:

$$\frac{dP_\perp}{d\Omega} = \frac{q^2 {a_\perp}^2}{4\pi c^3} \frac{1}{(1 - \beta \cos\theta)^4} \left[ 1 - \frac{\sin^2\theta \cos^2\phi}{\gamma^2 (1 - \beta\cos\theta)^2} \right] \ . \tag{6}$$

Leiten Sie folgenden Ausdruck für das extrem relativistische Limit her ($\gamma \gg 1$):

$$\frac{dP_\perp}{d\Omega} \approx \frac{4 q^2 {a_\perp}^2}{\pi c^3} \gamma^8 \frac{1 - 2\gamma^2\theta^2 \cos(2\phi) + \gamma^4\theta^4}{(1 + \gamma^2\theta^2)^6} \ . \tag{7}$$

Benutzen Sie die in der Vorlesung vorgestellten Näherungen für $\cos\theta$ und $1 - \beta\cos\theta$.