

Ü-Zettel im Netz unter <http://www.tp4.rub.de/~julia/kosmo/>

Aufgabe 1 : Das Wiensche Verschiebungsgesetz (5P)

Das Wiensche Verschiebungsgesetz gibt die maximale Wellenlänge von Strahlung eines schwarzen Körpers mit der Temperatur T an. Es lautet

$$\lambda_{\max} = \frac{2.897 \text{ m K}}{T}.$$

Das Plancksche Strahlungsgesetz lautet in der Formulierung mit der Frequenz

$$B_{\nu}(T) = \frac{dI(T)}{|d\nu|} = \frac{h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}.$$

- Geben Sie das Plancksche Strahlungsgesetz in der Formulierung mit der Wellenlänge $B_{\lambda}(T)$ an.
- Stellen Sie eine Gleichung auf, mit Hilfe derer sich die maximale Wellenlänge λ_{\max} bestimmen lässt.
- Leiten Sie nun das Wiensche Verschiebungsgesetz her, indem Sie λ_{\max} bestimmen.
Hinweis: Verwenden Sie eine geeignete Substitution und Näherung, nachdem Sie den Ausdruck in eine einfache Form gebracht haben.

Aufgabe 2 : Gamma Ray Bursts als kleines Universum (5P)

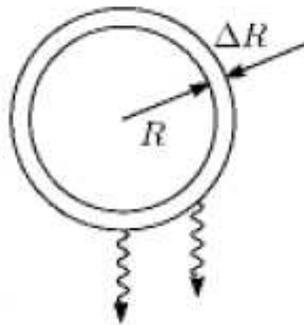
Gamma Ray Bursts können mit dem *Fireball-Modell* beschrieben werden. Ein Fireball bezeichnet hier ein undurchsichtiges Plasma, dessen Anfangsenergie E wesentlich größer als seine Ruheenergie Mc^2 ist,

$$\eta = \frac{E}{Mc^2} \gg 1.$$

Man kann sich den Fireball als eine große Menge Energie (Photonen) vorstellen, die in einer kleinen Region der Raumzeit unter ihrem eigenen Druck expandiert ($p \sim \frac{E}{3}$). Die größte Anteil an der Energie eines Fireballs ist anfangs gebunden in hochenergetischen Photonen (strahlungsdominierte Phase) mit nur einem kleinen Anteil Materie. Während sich der Fireball ausdehnt sammelt er kontinuierlich Materie (Protonen) auf, bis bei $\eta \sim 1$ die materiedominierte Phase beginnt.

Im Folgenden wird die strahlungsdominierte Phase des GRB betrachtet.

- a) Ist $\eta \gg 1$, so ist der Fireball strahlungsdominiert und die Expansion hoch relativistisch. Bestimmen Sie in Analogie zum expandierenden frühen Universum die Abhängigkeit der Energiedichte ρ vom Abstand R vom Zentrum der Explosion.
- b) Zeigen Sie, dass der Fireball abkühlt während er sich ausdehnt.
- c) Betrachten Sie nun eine Schale der Dicke ΔR im Abstand R vom Zentrum des expandierenden Fireballs im System des Beobachters (siehe Abbildung). Zeigen Sie, dass für den Lorentzfaktor Γ der Transformation vom



Ruhesystem des Fireballs in das Ruhesystem des Beobachters

$$\Gamma \propto R$$

gilt.

Hinweis: Für die Transformation der Temperatur gilt $T' = \Gamma \cdot T$. Beachten Sie, dass die Energiedichte lorentzinvariant ist.

- d) Fassen Sie die Unterschiede zwischen der Betrachtung eines Fireballs in der strahlungsdominierten Phase und dem frühen Universum zusammen.

Aufgabe 3 : Der Greisen-Zatsepin-Kuzmin Cutoff (5P, Zusatzaufgabe)

Einer wichtigsten Hinweise auf die Existenz eines Urknalls ("Big Bang") war die Entdeckung der kosmischen Hintergrundstrahlung von thermischen Photonen, die einer isotropen Planck Verteilung genügen. Hochenergetische Teilchen aus kosmischen Beschleunigern (z.B. aus Supernovae oder Aktiven Galaxien) Wechselwirkungen mit diesem Photon-Hintergrund auf ihrem Weg zur Erde, was zu einem Abknicken des Spektrums der kosmischen Strahlung führt (dies ist der sog. Greisen-Zatsepin-Kuzmin (GZK) Cutoff).

- (a) Berechnen Sie die Energie der Photonen im Maximum der Verteilung. Hier ist zu beachten, daß die Photonen exakt einer Planck Verteilung mit $T = 2.7$ K folgen.
- (b) Nehmen Sie im folgenden an, daß die Photonen näherungsweise die oben ausgerechnete Energie besitzen. Mit welcher Energie wird ein Proton

in der Wechselwirkung zwischen einem kosmischen Proton und einem Hintergrund Photon in dem Prozeß

$$\gamma p \rightarrow e^+ e^- p$$

erzeugt.

- (c) Schätzen Sie aus der Gesamtenergiedichte U die mittlere Photonendichte im Weltall ab. Nutzen Sie für diese Abschätzung das Stefan-Boltzmann Gesetz und die in (a) bestimmte mittlere Photonenergie.
- (d) Wie groß ist die mittlere freie Weglänge der Protonen für die Prozesse

$$\gamma p \rightarrow e^+ e^- p$$

und

$$\gamma p \rightarrow \Delta^+ \rightarrow p\pi^0,$$

wenn die Wirkungsquerschnitte für diese Prozesse gegeben sind durch

$$\begin{aligned}\sigma(\gamma p \rightarrow \Delta^+) &\approx 400 \cdot 10^{-30} \text{ cm}^2 \\ \sigma(\gamma p \rightarrow e^+ e^- p) &\approx 10 \cdot 10^{-30} \text{ cm}^2.\end{aligned}$$

Vergleichen Sie diese Zahl mit dem Durchmesser der Milchstraße und des lokalen Galaxieclusters. Was haben die oben berechneten Zahlen für eine Bedeutung für das Energiespektrum der kosmischen Strahlung?